Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

22 gennaio 2019

Esercizio 1

Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile x, di grado minore o uguale a 2, a coefficienti reali, e siano $p_1 = 2x,\ p_2 = x^2 + x,\ p_3 = 2$ vettori di $\mathbb{R}_2[x]$.

a) Dimostrare che $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$.

Si considerino inoltre l'applicazione lineare

$$f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

che ha

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

come matrice associata alla base B di $\mathbb{R}_2[x]$ e alla base $B' = \{(1,0),(1,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$, dove $k \in \mathbb{R}$, e l'applicazione lineare

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

la cui matrice associata rispetto alla base $B'' = \{(1,0),(0,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ e alla base B di $\mathbb{R}_2[x]$ è

$$M_{B''B}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Dire a quale polinomio è uguale $(g \circ f)(x^2 - x - 2)$
c) Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ trovare una base di $\ker(g \circ f)$ e una base di $\mathrm{Im}(g \circ f)$
d) Trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $g \circ f$ è suriettiva
e) Trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali 2 è autovalore di $g \circ f$

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_2 + kx_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = k \\ kx_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

e in corrispondenza di tali valori trovare le soluzioni del sistema.

Esercizio 3

Sia V l'insieme

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ :\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

ed $f: V \longrightarrow V$ l'applicazione definita nel seguente modo:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + c & 2b \\ -2b & a - 2b + c \end{pmatrix}$$

a) Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$
b) Dimostrare che f è un endomorfismo di V
c) Stabilire se f è diagonalizzabile. In caso affermativo trovare una base di V formata da autovettori di f.