Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

24 Gennaio 2018

Esercizio 1

Sia

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

a) Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$
b) Trovare una base B di W
c) Trovare un sottospazio $W' \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$

Esercizio 2

Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = (-1,1,0,0), \quad \mathbf{v}_2 = (0,2,0,0), \quad \mathbf{v}_3 = (0,0,1,1), \quad \mathbf{v}_4 = (0,0,0,-1)$$

e i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}'_1 = (1,0,2), \quad \mathbf{v}'_2 = (0,0,1), \quad \mathbf{v}'_3 = (0,-1,0)$$

a) Verificare che $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e $B' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$
b) Si consideri l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alle basi B e B' è

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trova $f(0,0,1,0)$.

Esercizio 3

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli discuti e trova le soluzioni, al variare del parametro reale k, del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2kx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 = k - 1 \\ 4kx_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Esercizio 4

Si consideri l'endomorfismo f di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ così definito

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b & 2a + b \\ 2c + d & c + 2d \end{pmatrix}$$

a) Detto W il sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ costituito da tutte le matrici simmetriche, trovare $f(W)$ ed una sua base
b) Stabilire se f è diagonalizzabile. In caso affermativo, trovare una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formata da autovettori di f.