Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

6 febbraio 2020

Esercizio 1

Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x aventi grado minore o uguale a 3, e siano

$$p_1 = 1 + x,\ \ p_2 = x + x^2,\ \ p_1 = x^2,\ \ p_4 = 1 - x^3$$

a) Verificare che $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$è una base di $\mathbb{R}_3[x]$
b) Verificare che l'applicazione $f\colon \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che ad ogni $p \in \mathbb{R}_3[x]$ associa $f(p) = (p(0), p(1)) \in \mathbb{R}^2$ è lineare
c) Trovare una base di $\ker(f)$
d) Si consideri l'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la cui matrice associata, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ e alla base B di $\mathbb{R}_3[x]$ di cui al punto a), è

$$M_{B_C B}(g) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$. Trovare il polinomio $(g \circ f)(1 + 2x + x^2)$
e) Determinare gli eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ affinché 2 sia autovalore dell'endomorfismo $g \circ f$

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ stabilire se il seguente sistema lineare è compatibile ed in caso affermativo trovarne le soluzioni

$$\begin{cases} (k+2)x_1 + 2kx_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + kx_3 = -k \\ x_2 + x_3 = k \end{cases}$$

Esercizio 3

Sia V lo spazio vettoriale reale costituito dalle matrici simmetriche di ordine 2.

Dimostrare che per ogni $h \in \mathbb{R}$ esiste un unico endomorfismo di V tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2h+1 \\ 2h+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trovare il valore di $h \in \mathbb{R}$ affinché f sia diagonalizzabile.