Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

21 Febbraio 2019

Esercizio 1

Stabilire se esiste un'applicazione

$$f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$$

tale che

$$f\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = 2x+1, \quad f\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = x^2-1, \quad f\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} = x^3-x+1, \qquad f\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix} = -x^2+x.$$

In caso affermativo, si trovi una base di $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2

Siano $\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{w_2} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ e $\mathbf{w_3} = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ vettori dello spazio vettoriale $M_{2\times3}(\mathbb{R})$, e sia $W = L(\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3})$. Si consideri l'applicazione lineare

$$f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow W$$

così definita:

$$f\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b & 0 & 2(a+b-c-d)\\0 & -a-b & -2(c+d)\end{pmatrix}.$$

a) Trovare $\ker(f)$ e una sua base
b) Dire se il vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ appartiene a $\mathrm{Im}(f)$
c) Sia $g: W \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare tale che $g(\mathbf{w_1}) = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, $g(\mathbf{w_2}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $g(\mathbf{w_3}) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$. Stabilire se $g \circ f$ è un'applicazione suriettiva.

Esercizio 3

Si consideri la base $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ di $\mathbb{R}^4$, dove $\mathbf{v}_1 = (0,1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{v}_3 = (-1,0,0,0)$, $\mathbf{v}_4 = (0,0,1,2)$ e l'endomorfismo $f_k: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base B è data da

$$M_B(f_k) = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1\\1 & 1 & k-1 & 4\\1 & 0 & k & 4\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

a) Trovare una base di $\ker(f_k)$
b) Determinare gli eventuali valori di k per i quali f_k è diagonalizzabile ed in corrispondenza di tali valori si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f_k.