Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

7 Febbraio 2019

Esercizio 1

Siano dati i sottoinsiemi di $\mathbb{R}_3[x]$

$$U_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = p(0) = 0\}$$

$$U_2 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : a + 2b = 0, b + c + d = 0\}$$

a) Verificare che U_1 e U_2 sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}_3[x]$
b) Stabilire se $\mathbb{R}_3[x] = U_1 \oplus U_2$
c) Stabilire se il vettore $p = x^3 + x^2 + x + 1$ è un elemento di $U_1 + U_2$, e in caso affermativo decomporre p come somma di un vettore di U_1 e di uno di U_2

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, discutere al variare del parametro reale k, la compatibilità del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} hx_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + hx_4 = h \\ hx_1 + 2x_3 + 2x_4 = h \\ 2x_2 + hx_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

e trovarne le soluzioni nei casi nei quali il sistema è compatibile.

Esercizio 3

Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi nella variabile x di grado minore o uguale a 2, ed

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

l'applicazione così definita:

$$f(ax^2 + bx + c) = 2ax + a + b.$$

a) Verificare che f è un endomorfismo
b) Determinare una base di $\ker(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$
c) Stabilire se $\mathbb{R}_2[x] = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$
d) Stabilire se esiste una base B di $\mathbb{R}_2[x]$ tale che la matrice associata ad f rispetto a B è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
e) Stabilire se f è diagonalizzabile, e in caso affermativo trovare una base di $\mathbb{R}_2[x]$ formata da autovettori di f