Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

21 Febbraio 2018

Esercizio 1

Sia

$$\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tali che } \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tali che } f(x, y) = (ax + by, bx + cy)\}$$

Dimostrare che $\mathcal{F}$ è uno spazio vettoriale con le usuali operazioni di somma e prodotto con uno scalare. Trovare una base di $\mathcal{F}$

Esercizio 2

Si stabilisca se la somma dei sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$W_1 = \{(x, y, z): x - 2z = 0\}, \;\; W_2 = \{(x, y, z): x - y + z = 0 \text{ e } -2x + 4z = 0\}$$

è diretta e se il vettore **v** = (-1,2,3) appartiene a $W_1 + W_2$

Esercizio 3

Stabilire per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (k+2)x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ (k+2)x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2kx_1 - 3x_2 + 3x_3 = h \end{cases}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1.

Esercizio 4

Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi nella variabile x di grado minore o uguale a 2, e $f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ l'applicazione così definita:

$$f(ax^2 + bx + c) = 2ax + a + b$$

a) Verificare che f è un endomorfismo
b) Determinare una base di $\ker(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$
c) Stabilire se $\mathbb{R}_2[x] = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$
d) Stabilire se esiste una base B di $\mathbb{R}_2[x]$ tale che la matrice associata ad f rispetto a B è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
e) Stabilire se f è diagonalizzabile, e in caso affermativo trovare una base di $\mathbb{R}_2[x]$ formata da autovettori di f