Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

7 Febbraio 2018

Esercizio 1

Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon a - b - c = 0 \ \text{ e } a + d = 0 \right\}$$

a) Trovare una base B di W
b) Trovare un sottospazio $W' \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $W \oplus W' = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
c) Verificare che l'applicazione $f \colon W \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definita da
$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d)x^3 + (c - 2d)x$$
è lineare.
d) Trovare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f

Siano $B' = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ e $B'' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ basi, rispettivamente, di $\mathbb{R}_3[x]$ e di $\mathbb{R}^2$, dove

$$\mathbf{p}_1 = x^3, \quad \mathbf{p}_2 = 2 + x, \quad \mathbf{p}_3 = x^2 - x, \quad \mathbf{p}_4 = x - 2x^3$$

$$\mathbf{v}_1 = (1,1), \quad \mathbf{v}_2 = (-1,0)$$

Sia inoltre $g \colon \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi B' e B'' è

$$M_{B'B''}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e) Trovare la matrice associata di $g \circ f$ rispetto alla base B di W, trovata nel punto a), e B'' di $\mathbb{R}^2$
f) Trovare il vettore $(g \circ f)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli discuti e trova le soluzioni, al variare del parametro reale k, del seguente sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_4 = 0 \\ kx_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - kx_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Inoltre si trovi, al variare di k, una base dello spazio vettoriale delle soluzioni.

Esercizio 3

Sia V uno spazio vettoriale e $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una sua base. Sia $f_k \colon V \longrightarrow V$ l'endomorfismo di V tale che

$$f_k(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{v}_1, \quad f_k(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 + k\mathbf{v}_3, \quad f_k(\mathbf{v}_3) = -k(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3)$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

a) Trovare i valori del parametro reale k per i quali f_k è biettiva
b) Trovare i valori del parametro reale k per i quali f_k è diagonalizzabile. Per tali valori di k si trovi una base di V formata da autovettori di f_k