Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

7 Luglio 2016

1. Siano $\mathbb{R}_3[x]$ ed $M_2(\mathbb{R})$, rispettivamente, gli spazi vettoriali dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x aventi grado minore o uguale a 3 e delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate reali, e sia

$$f\colon \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

l'applicazione lineare tale che

$$f(x^3+x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x^3-2x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(1+x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x^2-x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare una base di ker(f) ed una base di Im(f).
b) Sia U il sottospazio vettoriale generato dai polinomi $p_1(x) = 1+x^3$, $p_2(x) = -1-2x+3x^3$, $p_3(x) = -1-2x^2-3x^3$. Trovare una base di $f(U)$.

2. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$f(1,1,0) = (0,0,0,0), \quad f(1,2,0) = (0,0,0,0), \quad f(0,0,-1) = (0,1,1,0).$$

a) Determinare una base di $f^{-1}(W)$ dove

$$W = L((-1,1,1,0), (0,0,0,1))$$

b) Denotata con $g\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ k & k & k & k \end{pmatrix}$$

stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo $f \circ g \in End(\mathbb{R}^4)$ è diagonalizzabile.

3. Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, discutere e risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} (k-1)x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + kx_3 = -1 \\ -x_2 + kx_4 = k \end{cases}$$