Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea in Matematica

Esame di Geometria 1

2 Febbraio 2016

1. Sono dati i polinomi

$$p_1 = 1 + x^3 \qquad p_2 = -1 + k\,x + 3x^3 \qquad p_3 = k + 1 + k\,x^2 + (2k + 1)x^3$$

dove k è un numero reale.
a) Determinare la dimensione dello spazio vettoriale U generato dai polinomi p_1, p_2, p_3 al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
b) Posto $k = 0$, trovare un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}_3[x]$ tale che $\mathbb{R}_3[x] = U \oplus W$.
c) Scelta una base B_1 di U e B_2 di W, si trovi la matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}_3[x]$ alla base $B = B_1 \cup B_2$.

2. Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, discutere e risolvere, al variare dei parametri reali k e h, il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + h\,y + k\,z = k \\ k\,x + z = 0 \\ x + h\,y + z = 2 \end{cases}$$

3. Sia f: $M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'endomorfismo definito da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-c+d & 2b-d \\ d & d \end{pmatrix}$$

a) Determinare i sottospazi Ker(f) e Im(f), ed una loro base.
b) Stabilire se f è biiettivo.
c) Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di $M_2(\mathbb{R})$ formata da autovettori di f.