Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

21 febbraio 2020

Esercizio 1

Siano

$$U = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A = A^t\} \qquad V = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A = -A^t\}$$

i sottospazi di $M_3(\mathbb{R})$ costituiti, rispettivamente, dalle matrici simmetriche e antisimmetriche.

a) Dimostrare che $M_3(\mathbb{R}) = U \oplus V$

Si consideri l'applicazione lineare $f: V \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la cui matrice associata rispetto alle basi $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ di V e $B' = \{1 + x^3,\ -2,\ x - x^2,\ 2x\}$ di $\mathbb{R}_3[x]$ è la matrice

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Trovare $f\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

c) Trovare una base di $\mathrm{Im}(f)$

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile e in corrispondenza di tali valori trovarne le soluzioni

$$\begin{cases} kx_1 + kx_2 + x_3 - x_4 + x_5 = k \\ x_3 - x_4 = 0 \\ 2kx_2 + x_5 = k \end{cases}$$

Inoltre, in corrispondenza dei valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali l'insieme delle soluzioni del sistema è uno spazio vettoriale, si trovi una base di tale spazio.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio vettoriale

$$V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$$

dove $\mathrm{tr}(A)$ denota la "traccia" della matrice A, cioè la somma delle entrate sulla diagonale principale. Si definisca una applicazione $f: V \longrightarrow V$ tale che

$$f(A) = 2A - A^t$$

per ogni $A \in V$.

a) Verificare che f è lineare

b) Trovare una base del nucleo di f

c) Stabilire se f è diagonalizzabile. In caso affermativo trovare una base di V formata da autovettori di f