Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea in Matematica

Esame di Geometria 1

18 Gennaio 2016

1. Siano dati i due sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : a+b+c=0 \right\} \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+2\mathrm{b}=0, b+c+d=0 \right\}$$

a) Verifica che U_1 e U_2 sono sottospazi vettoriali di $M_2(\mathbb{R})$

b) Dimostra che $M_2(\mathbb{R}) = U_1 \oplus U_2$

c) Decomponi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

come somma di un vettore di U_1 e di un vettore di U_2

d) Dopo aver scelto una base B_1 di U_1 e una base B_2 di U_2, trova la matrice di passaggio dalla base $B = B_1 \cup B_2$ alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.

2. Discutere e risolvere, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + kx_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2\mathrm{x}_3 + (k-2)\, x_4 = k \end{cases}$$

3. Siano dati i vettori

$\mathbf{v}_1 = (1,0,0,0)$, $\quad \mathbf{v}_2 = (0,-1,-1,0)$, $\quad \mathbf{v}_3 = (0,1,0,2)$, $\quad \mathbf{v}_4 = (-1,0,1,0)$.

a) Provare che $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base di $\mathbb{R}^4$

b) Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4 \qquad f(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4 \qquad f(\mathbf{v}_3) = 5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4 \qquad f(\mathbf{v}_4) = 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_4$$

Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

Inoltre si trovi una base di $f(W)$, dove W è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ dato da

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 = 0\}.$$