Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea in Matematica

Esame di Geometria 1

15 Giugno 2016

1. Si considerino le applicazioni lineari

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tali che

$$f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \quad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \quad f(\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

e

$$g((1,2)) = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \quad g((2,-1)) = \mathbf{e}_2 + \alpha\mathbf{e}_3$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Determinare una base di $\ker(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$
b) Determinare una base di $\ker(f \circ g)$ al variare di α
c) Calcolare la dimensione di $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)$ al variare di α

2. Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, discutere e risolvere, al variare dei parametri $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + \lambda y + \mu z = 0 \\ \lambda x - y + \lambda\mu z = 0 \\ x + \mu y - 2z = \lambda + 2 \end{cases}$$

3. Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x di grado minore o uguale a 2. Si consideri l'endomorfismo

$$f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

definito da

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + kb)x^2 + (ka + b)x + kc\,.$$

dove k è un parametro reale.
Stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se f è diagonalizzabile ed, in caso positivo, determinare una base B di $\mathbb{R}_2[x]$ costituita da autovettori di f.