ESERCIZI
DI
PROPAGAZIONE

I LINEE DI TRASMISSIONE

La propagazione in una linea di trasmissione omogenea è retta dalle equazioni [1]

$$-\frac{dV}{dz} = j\omega L_{eq} I = (j\omega L + R)I = jkZ_0 I$$

$$-\frac{dI}{dz} = j\omega C_{eq} V = (j\omega C + G)V = j\frac{k}{Z_0}V$$

dove L, R, C, G sono dette costanti primarie e k, Z_0 costanti secondarie . In particolare

$$k^2 = \omega L_{eq} C_{eq}, \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}} = \frac{\omega L_{eq}}{k} = \frac{k}{\omega C_{eq}}$$

Se assumiamo $R \ll \omega L,\ G \ll \omega C$ (piccole perdite) allora

$$k = \omega\sqrt{LC}\left[1 - j\left(\frac{R}{2\omega L} + \frac{G}{2\omega C}\right)\right], \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\left[1 - j\left(\frac{R}{2\omega L} - \frac{G}{2\omega C}\right)\right]$$

Se $R/L = G/C$ (condizione di Heaviside) allora Z_0 è reale (qualunque sia l'entità delle perdite)

La soluzione del sistema di equazioni può essere espressa nelle due forme equivalenti (progressiva e stazionaria)

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz}, \\ I(z) = \dfrac{1}{Z_0}[V^+ e^{-jkz} - V^- e^{jkz}], \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(z) = V(0)\cos kz - jZ_0 I(0)\,\mathrm{sen}\,kz, \\ I(z) = I(0)\cos kz - j\dfrac{V(0)}{Z_0}\,\mathrm{sen}\,kz, \end{cases}$$

Tra le costanti di integrazione valgono le relazioni.

$$V(0) = V^+ + V^- \qquad V^+ = \frac{1}{2}[V(0) + Z_0 I(0)]$$

$$I(0) = \frac{1}{Z_0}[V^+ - V^-] \qquad V^- = \frac{1}{2}[V(0) - Z_0 I(0)]$$

Il rapporto

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)}$$

è l'impedenza, alla ascissa z, del tratto a valle di tale ascissa (con la convenzione dell'utilizzatore).

---

[1] La corrente I è assunta, per convenzione, positiva nella direzione positiva dell'asse z

In presenza di una discontinuità delle caratteristiche della linea sia $V(z)$, $I(z)$, sia $Z(z)$ sono funzioni continue. Se però tra due tratti di linea (di caratteristiche uguali o diverse) sono presenti impedenze e/o generatori concentrati, le condizioni di raccordo si ottengono applicando i principi di Kirchhoff alla discontinuità (che per ipotesi ha dimensioni trascurabili).

L'impedenza di **ingresso** di un tratto di linea omogeneo, di lunghezza ℓ, e chiuso su un carico Z_c, vale

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_c + jZ_0 \operatorname{tg} k\ell}{Z_0 + jZ_c \operatorname{tg} k\ell}$$

(formula del "trasporto dell'impedenza") ed è indipendente dalla direzione scelta per l'asse z (Z_{in} è sempre definita con la convenzione dell'utilizzatore).

Si definisce coefficiente di riflessione il rapporto

$$\Gamma(z) = \frac{V^- e^{jkz}}{V^+ e^{-jkz}} = \frac{Z(z) - Z_0}{Z(z) + Z_0}$$

Per una linea omogenea

$$\Gamma(z) = \Gamma(0) e^{-2j\beta z}$$

per cui, se la linea è priva di perdite, $|\Gamma(z)|$ è costante. Invece oltre una discontinuità $\Gamma(z)$ è *discontinuo* (in quanto varia l'impedenza caratteristica).

Si definisce rapporto d'onda stazionaria la quantità

$$ROS = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

costante su una linea omogenea e priva di perdite. Possiamo anche definire, per una discontinuità, un coefficiente di trasmissione

$$\mathcal{T} = \frac{V_2(0)}{V_1^+} = 1 + \Gamma = \frac{2Z_{in}}{Z_{in} + Z_0}$$

(Se la seconda linea è illimitata, allora $\mathcal{T} = \frac{V_2^+}{V_1^+}$). E' anche facile vedere che, per linee prive di perdite, il valore massimo e minimo di $|V(z)|$ e $|I(z)|$ sono dati da $|V^+|(1 \pm |\Gamma|)$, $\frac{|V^+|}{Z_0}(1 \pm |\Gamma|)$ e si hanno nei punti in cui $\Gamma(z)$ è reale. L'energia immagazinata in una linea è pari a

$$\frac{1}{4} L \int |I(z)|^2 dz + \frac{1}{4} C \int |V(z)|^2 dz$$

Il flusso di potenza complessa su una linea omogenea è

$$P_c(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = \frac{1}{2} Z(z) |I(z)|^2 = \frac{1}{2Z^*(z)} |V(z)|^2$$

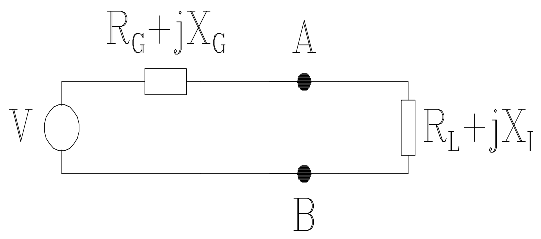
ovvero in termini di $\Gamma(z)$

$$P_c(z) = \frac{1}{2Z_0^*} |V^+|^2 \left\{ [1 - |\Gamma|^2] + 2j I_m[\Gamma(z)] \right\}$$

Se la linea è senza perdite, la potenza trasmessa è

$$P_T = P_{inc}(1 - |\Gamma|^2)$$

essendo $|V^+|^2/2Z_0$ la potenza incidente. Segue anche da questo che $|\Gamma| \leq 1$ (tale limite non si estende al caso di perdite). Se la linea è priva di perdite allora segue (dal teorema di Poynting) che P_T è costante con z e che la potenza all'ingresso della linea è pari a quella dissipata sul carico. La condizione $|\Gamma| = 0$ consente di trasferire la massima potenza ad un carico alimentato da una linea indefinita. Una condizione più generale può ricavarsi dal circuito che segue, (a cui è sempre possibile ricondursi), in cui si suppongono *fissi* V e R_G e variabili gli altri termini.



In tal caso la condizione di massimo è che l'impedenza a sinistra e destra della sezione AB (che divide il *generatore* dal *carico*) siano l'una il coniugato dell'altra.

$$R_L + jX_L = (R_G + jX_G)^*$$

sempre che tale condizione sia **verificabile.** (2)

E' facile vedere che in tali ipotesi, se $X_G = 0$ ed il generatore è adattato alla linea, la condizione data corrisponde a $\Gamma = 0$. Vale anche il viceversa: infatti dal teorema di Thevenin (valido anche nel caso di linee di trasmissione) segue che una linea indefinita su cui è presente un' onda incidente $V^+e^{-j\beta z}$, equivale ad un generatore di ampiezza $2V^+$ con in serie una resitenza pari alla impedenza caratteristica della linea Z_0.

Qualora la condizione $Z_L = Z_G^*$ non sia verificabile, ovvero qualora non ricorrono le ipotesi fatte, è necessario procedere alla massimizzazione con le tecniche usuali.

· ∘ ○ ◯ ○ ∘ ·

L 1 Per una linea di cui siano note le costanti secondarie, $\alpha = 0.037\ m^{-1}$, $\beta = 0.18\ rad/m$, $Z_0 = 560 - j115\ \Omega$, alla frequenza $f = 3\ MHz$, determinare quelle primarie.

◊◊◊

Le relazioni fra le costanti primarie e secondarie sono

$$k = \beta - j\alpha = \omega\sqrt{L_{eq}C_{eq}} = \frac{1}{j}\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

(2) La non verificabilità di tale condizione può essere dovuta a varie cause. Ricordiamo tra queste il caso in cui l'intervallo di variabilità di R_L non include R_G, oppure il caso in cui X_G è fisso e R_L e X_L dipendono entrambi da uno stesso parametro e per nessun valore di tale parametro si ha $Z_L = Z_G^*$

Moltiplicando membro a membro si trova $(\beta - j\alpha)(R_0 + jX_0) = -j(R + j\omega L)$ e separando parte reale e coefficiente dell'immaginario

$$\omega L = \alpha X_0 + \beta R_0$$

$$R = \alpha R_0 - \beta X_0$$

da cui $L = 5.12 \mu H/m$, $R = 41.42\ \mu\Omega/m$.

Analogamente, dividendo membro a membro

$$\omega C = \beta \frac{R_0}{|Z_0|^2} - \alpha \frac{X_0}{|Z_0|^2}$$

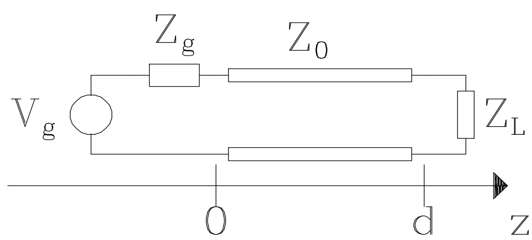
$$G = \alpha \frac{R_0}{|Z_0|^2} + \beta \frac{X_0}{|Z_0|^2}$$

da cui $C = 17\ pF/m$, $G = 61.2\ nS/m$.

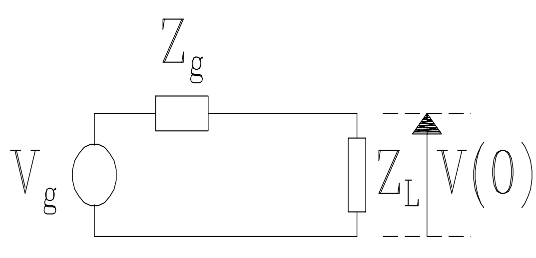
L 2 Una linea priva di perdite, lunga 25 m, ha impedenza caratteristica $Z_0 = 100\ \Omega$ e $v_f = 3 \cdot 10^8\ m/sec$. Viene alimentata con un generatore $V_g = 50\ V$ con impedenza $Z_g = 50\ \Omega$ ed è chiusa su un carico $Z_L = Z_0$. Sapendo che la frequenza di alimentazione è $f = 100\ MHz$, calcolare la tensione e la corrente sul carico.

◊◊◊

Poichè $\lambda = \frac{v_f}{f} = 3\ m$ la linea è lunga $(8 + \frac{1}{3})\lambda$.



Lo schema di figura può essere semplificato riportando Z_L alla ascissa $z = 0$. Si ha allora



(Z_L è adattato rispetto alla linea) e quindi

$$V(0) = V_g \frac{Z_L}{Z_g + Z_L} = \frac{100}{3} V$$

Poichè il carico è adattato, sulla linea è presente la sola onda progressiva, e quindi $V(0) = V^+$. Risulta pertanto

$$V_L = V(d) = V^+ e^{-j\beta d} \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

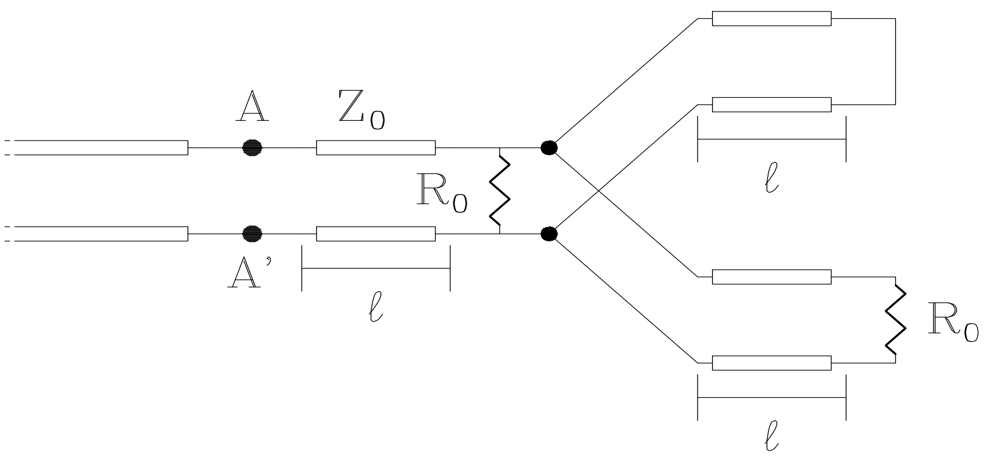
Ma $\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (8 + \frac{1}{3})\lambda = 16\pi + \frac{2\pi}{3}$ e, grazie alla periodicità delle funzioni trigonometriche,

$$V_L = V^+ e^{(-j\frac{2\pi}{3})} = \frac{50}{3}(-1 - j\sqrt{3})\ V$$

$$I_L = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{1}{6}(-1 - j\sqrt{3})\ A$$

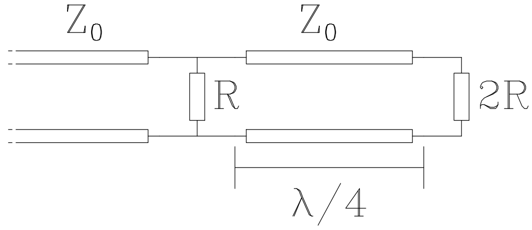
N.B. $V_L = I_L \cdot Z_L$ ed essendo Z_L reale, V_L ed I_L sono tra loro in fase.

L 3 Calcolare per $\ell = \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{8}$ il coefficiente di riflessione nella sezione AA'. L' impedenza caratteristica della linea vale $Z_0 = R_0$.



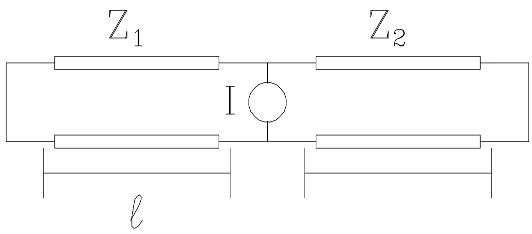
$$\left[\!\left[\ \frac{1}{3}; -1; \frac{1+2j}{5}\ \right]\!\right]$$

L 4 Calcolare il rapporto d'onda stazionaria a monte della prima resistenza, sapendo che $Z_0 = 3R$ e che la linea è priva di perdite.



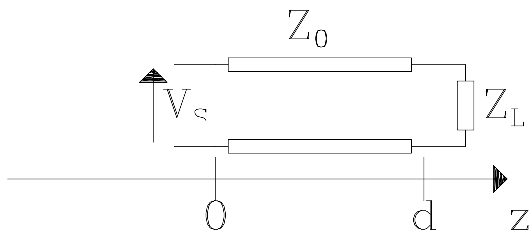
[[3.67]]

L 5 Determinare la distribuzione della tensione e della corrente lungo la linea di trasmissione seguente:



$\lambda = 20\ cm; I = 3\ A; l = 50\ cm; Z_1 = 50\ \Omega; Z_2 = 300\ \Omega$

L 6 La linea in figura ha $Z_0 = 51.5\ \Omega$, $\beta = 0.0997\ m^{-1}$ ed $\dfrac{\alpha}{\beta} = 0.0167$ ed è chiusa su un carico $Z_L = (150 - j120)\ \Omega$.
Sapendo che la linea è lunga $\ell = 250\ m$ e che all' ingresso ($z = 0$) la tensione è $V_S = 30\ V$, calcolare V^+ e V^-. Calcolare inoltre il coefficiente di riflessione per $z = 0$.



◇◇◇

Per definizione $V(0) = V^+ + V^-$ ed essendo $V^- = \Gamma(0)V^+$ si ha

$$V^+ = \frac{V_S}{1+\Gamma(0)} \qquad V^- = \Gamma(0)\frac{V_S}{1+\Gamma(0)}$$

Il coefficiente di riflessione sul carico vale

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0.623 - j0.225 = 0.662e^{-j0.346}$$

Poichè la linea è *omogenea* allora

$$\Gamma(0) = \Gamma_L e^{-2jk\ell} = \left(0.662e^{-2\alpha\ell}\right)e^{j(-0.346-2\beta\ell)}$$

sviluppando si ha, essendo $2\alpha l = 0.832$ e $2\beta\ell = 49.9$

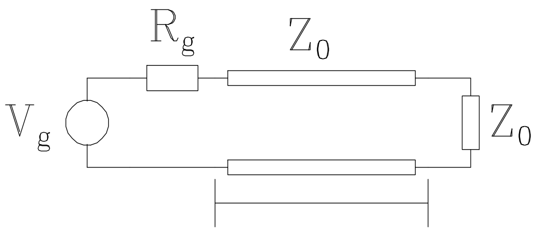
$$\Gamma(0) = 0.288e^{+j0.019} = 0.288 + j0.005$$

$$V^+ = 23.3e^{-j0.016}V$$

$$V^- = 6.71e^{+j0.05}V$$

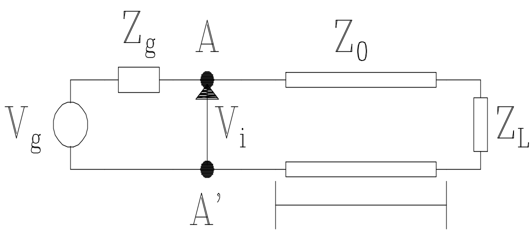
N.B. In alternativa è possibile calcolare V^+ e V^- tramite $V(0)$ e $I(0)$. Tuttavia è più semplice trasportare lungo una linea con perdite il coefficiente di riflessione che l'impedenza.

L 7 La linea priva di perdite di figura ha le seguenti caratteristiche $Z_0 = 100\ \Omega$,$V_g = 50\ V$,$R_g = 50\ \Omega$, velocità di fase $v_f = 3 \cdot 10^8\ m/sec$ e frequenza $f = 100\ MHz$. Determinare la potenza assorbita dal carico.



$\left[\!\left[\ 5.55W\ \right]\!\right]$

L 8 Calcolare la potenza dissipata su Z_L nella linea riportata in figura.



$Z_0 = 50\ \Omega$; $\alpha = 1.97 \cdot 10^{-3} m^{-1}$; $\beta = 0.592\ m^{-1}$; $\ell = 6.33\ m$; $f = 20\ MHz$; $Z_L = 36 + j20\ \Omega$; $Z_g = 50\ \Omega$; $V_g = 100\ V$

$\diamond\diamond\diamond$

La potenza media dissipata sul carico vale

$$P_L = \frac{1}{2} R_L |I_L|^2$$

e la corrente nel carico è

$$I_L = I_i \cos k\ell - j\frac{V_i}{Z_0} \operatorname{sen} k\ell$$

dove I_i, V_i sono tensione e corrente all'ingresso della linea (morsetti AA'), dati da

$$I_i = \frac{V_g}{Z_g + Z_i} \qquad V_i = V_g - Z_g I_i$$

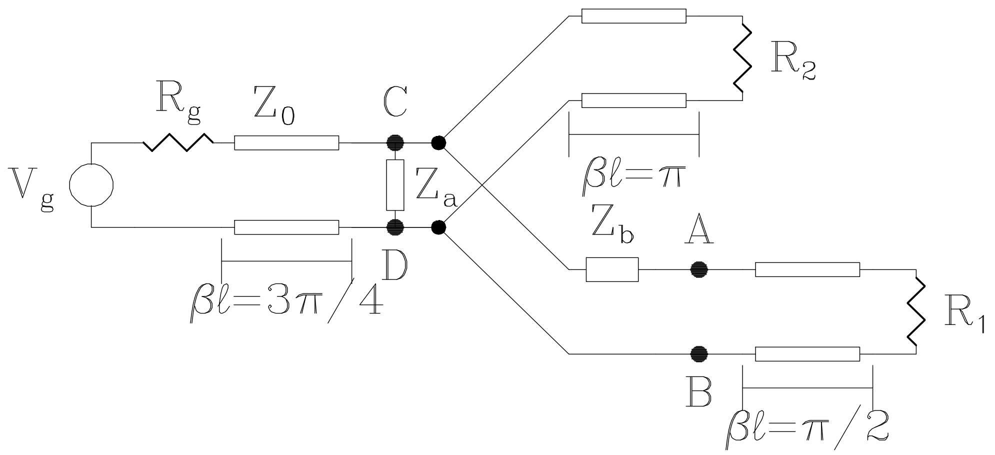
L'impedenza d'ingresso della linea (ai morsetti AA') è data da:

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \operatorname{tg} k\ell}{Z_0 + jZ_L \operatorname{tg} k\ell} = (68.7 + j27)\ \Omega$$

e quindi $Z_g + Z_i = (118.7 + j27)\ \Omega$, $I_i = (0.801 - j0.182)A$, $V_i = 59.95 - j9.1\ V$.

Sostituendo si trova $I_L = 1.12 \underline{/ -228^o}\ \ A$ e quindi $P_L = 22.6\ W$

L 9 Calcolare la potenza su R_1 e R_2 nella linea di figura.



$V_g = 10\ V$; $Z_g = 50\ \Omega$; $Z_0 = 50\ \Omega$; $R_1 = 40\ \Omega$; $R_2 = 60\ \Omega$; $Z_a = j100\ \Omega$; $Z_b = j10\ \Omega$.

◊◊◊

L'impedenza d'ingresso della diramazione contenente R_1 e vista dai morsetti AB è data (essendo la linea lunga $\lambda/4$) da:

$$Z' = 62.5\ \Omega$$

per cui l'impedenza della stessa linea vista dai morsetti CD è:

$$Z'' = 62.5 + j10\ \Omega$$

L'impedenza d'ingresso della linea contenente R_2, sempre vista dai morsetti CD è pari a 60 Ω, essendo la linea lunga $\lambda/2$

$$Z''' = 60\ \Omega = \frac{1}{Y'''}$$

Per il tratto contente il generatore, ricorriamo ad uno schema equivalente secondo Norton. L'impedenza ai morsetti CD e con generatore cortocircuitato risulta data da:

$$Z^{IV} = 50\ \Omega = \frac{1}{Y^{IV}}$$

poichè la linea è adattata.

Per la corrente di cortocircuito (cortocircuito nella sezione CD) si ha:

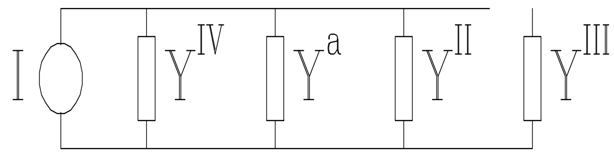
$$I_{cc} = I(\ell) = I(0)\cos\beta\ell - j\frac{V(0)}{Z_0}\operatorname{sen}\beta\ell = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[I(0) + j\frac{V(0)}{Z_0}\right]$$

in cui

$$I(0) = \frac{V_g}{Z_g + jZ_0 \operatorname{tg} \beta\ell} = 0.1(1+j)A$$

$$V(0) = V_g - Z_g I(0) = 5(1-j)V$$

Pertanto ci si riconduce al seguente schema a costanti concentrate



dove $Y_a = \frac{1}{Z_a} = -j0.01\ S$, $Y'' = 0.0156 - j0.0025\ S$, $Y''' = 0.0167\ S$, $Y^{IV} = 0.02\ S$. Poichè i tratti di linea sono senza perdite, la potenza dissipata sulle resistenze di carico sarà pari alla potenza reale in ingresso ai relativi tronchi di connessione, ovvero sulle ammettenze Y'' e Y''' del circuito equivalente.

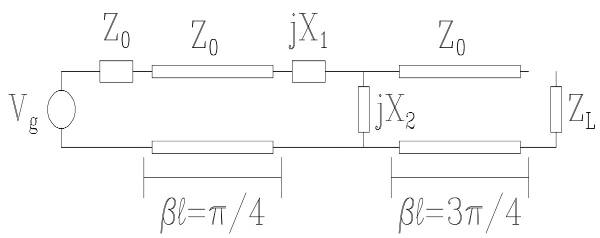
Pertanto si ha, posto $Y_{tot} = Y_a + Y'' + Y''' + Y^{IV} = 0.0523 - j0.0125\ S$ per il tronco caricato da R_1:

$$P_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(Z'')|I''|^2 = \frac{1}{2}R''|I_{cc}|^2|\frac{Y''}{Y_{tot}}|^2 = 0.108\ W$$

Per il tronco caricato da R_2:

$$P_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(Z''')|I'''|^2 = \frac{1}{2}R'''|I_{cc}|^2|\frac{Y'''}{Y_{tot}}|^2 = 0.115\ W$$

L 10 Calcolare la potenza consegnata al carico Z_L ed il rapporto d'onda stazionaria sul primo tronco di linea.



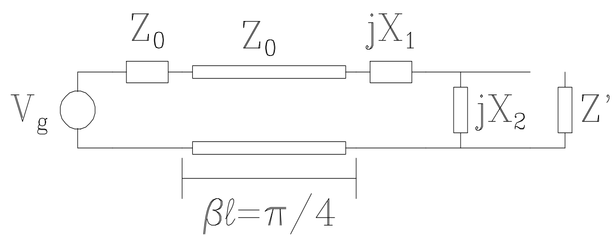
$V_g = 5\ V$; $Z_L = 200\ \Omega$; $X_1 = X_2 = 100\ \Omega$; $Z_0 = 100\ \Omega$

◇◇◇

L'impedenza d'ingresso del secondo tronco di linea:

$$Z' = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \operatorname{tg} \beta\ell}{Z_0 + jZ_L \operatorname{tg} \beta\ell} = Z_0 \frac{4+j3}{5} = 80 + j60\ \Omega$$

Il circuito diventa quindi



Effettuando il parallelo tra Z' e jX_2:

$$Z'' = \frac{Z' \cdot jX_2}{Z' + jX_2} = Z_0 \frac{1 + j2}{4} = 25 + j50\ \Omega$$

e quindi la serie fra Z'' e jX_1:

$$Z''' = Z'' + jX_1 = Z_0 \frac{1 + j6}{4} = 25 + j150\ \Omega$$

L'impedenza d'ingresso del tronco di linea vale:

$$Z_I = Z_0 \frac{Z''' + jZ_0 \operatorname{tg} \beta\ell}{Z_0 + jZ''' \operatorname{tg} \beta\ell} = Z_0 \frac{8 - j21}{5} = 160 - j420\ \Omega$$

La corrente d'ingresso I_g è data da:

$$I_g = \frac{V_g}{Z_0 + Z_I} = \frac{V_g}{Z^V}$$

dove $Z^V = Z_0 + Z_I = Z_0 \frac{13 - j21}{5} = 260 - j420\ \Omega$ e la tensione all'ingresso della linea

$$V_i = V_g - Z_0 I_g$$

inserendo i valori si trova $I_g = 5.3 + j8.6\ mA$ e $V_i = 4.47 - j0.86\ V$. Poichè la linea è senza perdite la potenza dissipata su Z_L è pari a quella dissipata su Z_I nel circuito equivalente. Quindi

$$P_D = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} \frac{|V_i|^2}{Z_I^*} \right) = \frac{1}{2} |V_i|^2 \cdot \operatorname{Re}(\frac{1}{Z_I^*})$$

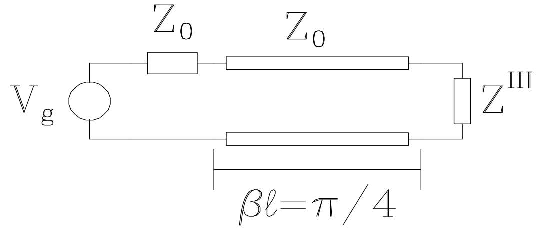
in cui

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z_I^*} \right) = \operatorname{Re}\left[\frac{Z_I}{|Z_I|^2} \right] = 7.92 \cdot 10^{-4} S$$

e pertanto

$$P_D = 8.2\ mW$$

Per calcolare il ROS sul primo tratto si consideri lo schema equivalente



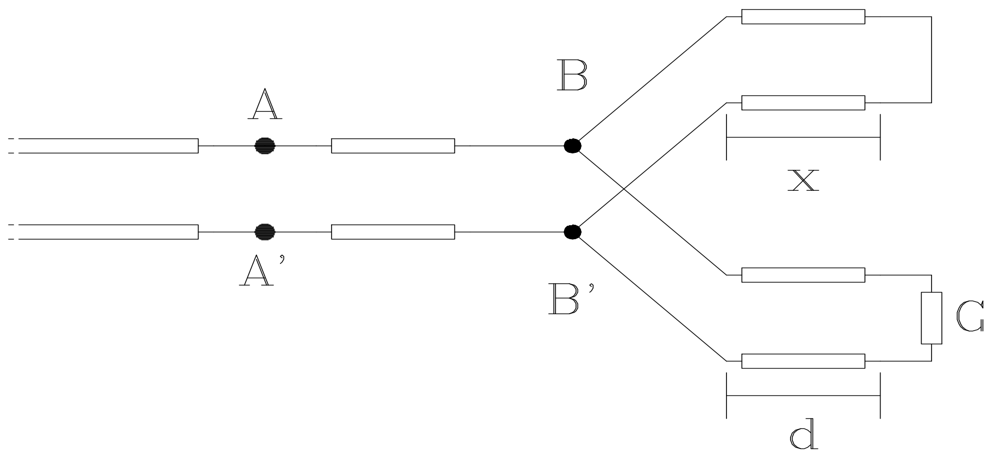
Il coefficiente di riflessione sul carico vale

$$\Gamma_c = \frac{Z''' - Z_0}{Z''' + Z_0} = 0.859 \underline{/ \; 66.4^o}$$

Il ROS è dato da

$$ROS = \frac{1 + |\Gamma_c|}{1 - |\Gamma_c|} = 13.2$$

L 11 Data la linea in figura, priva di perdite, con impedenza caratteristica $Z_0 = 10\ \Omega$, e il carico costituito da una pura conduttanza $G = 0.01\ S$, determinare la distanza e la lunghezza del tratto di linea in corto circuito in modo che il coefficiente di riflessione nella sezione AA' sia nullo. $f = 30\ MHz$



◇◇◇

Traccia: Se il coefficiente di riflessione Γ è nullo in AA', è nullo in tutta la linea a monte del tratto di linea in parallelo. Basta perciò imporre $\Gamma = 0$ nella sezione immediatamente a sinistra della diramazione BB'.

Si cerca la distanza d tale che l' ammettenza in questa sezione sia pari a $Y_0 + jB$; ciò è sempre possibile. Difatti dalla formula del trasporto dell' ammettenza

$$Y(d) = Y_0 \frac{Y_L + jY_0 \operatorname{tg} \beta d}{Y_0 + jY_L \operatorname{tg} \beta d}$$

si impone che

$$Y(d) = Y_0 + jB$$

quando $Y_L = G$.

Si ha

$$Y_0(G + jY_0 \operatorname{tg} kd) = (Y_0 + jB)(Y_0 + jG \operatorname{tg} kd)$$

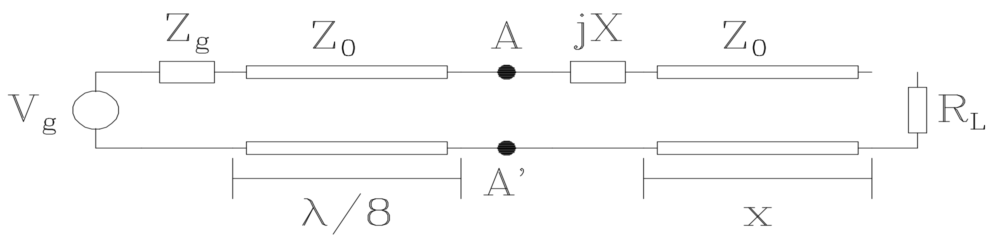
da cui uguagliando parte reale e coefficiente dell' immaginario e risolvendo il sistema in $\operatorname{tg} kd$ e B si ottiene

$$\mathrm{tg}^2\, kd = \frac{Y_0}{G} \qquad B = \frac{Y_0 - G}{G\,\mathrm{tg}\, kd} Y_0$$

Una volta trovata d, basta scegliere il tratto di linea chiuso in corto circuito, in modo che la sua ammettenza sia pari a $-jB$, ossia tale che

$$Y(x) = -jY_0 \,\mathrm{cotg}\, kx = -jB$$

L 12 Determinare x, X in modo che su R_L si dissipi la massima potenza.



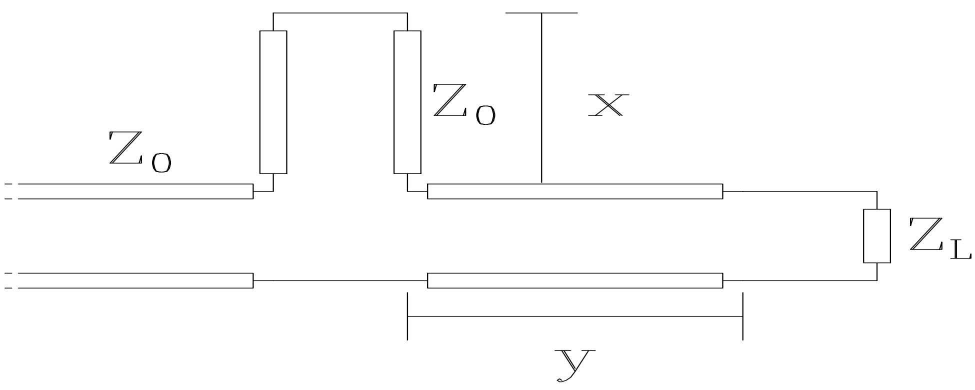
$Z_0 = 50\ \Omega$, $Z_g = (100 - j20)\ \Omega$, $R_L = 100\ \Omega$

◊◊◊

Traccia: Ponendosi alla sezione AA'si trova che la parte di linea a sinistra è costante, e che tutta la potenza che attraversa tale sezione si dissipa su R_L. A questa sezione si può allora imporre che $\overleftarrow{Z} = \overrightarrow{Z}^*$ (o, se si preferisce, $\overleftarrow{Y} = \overrightarrow{Y}^*$).

$\left[\!\left[\ x = .152\lambda,\ X = 50.36\ \Omega\ \right]\!\right]$

L 13 Adattare la linea in figura mediante un tratto di linea in corto circuito, di lunghezza x, posto in serie.

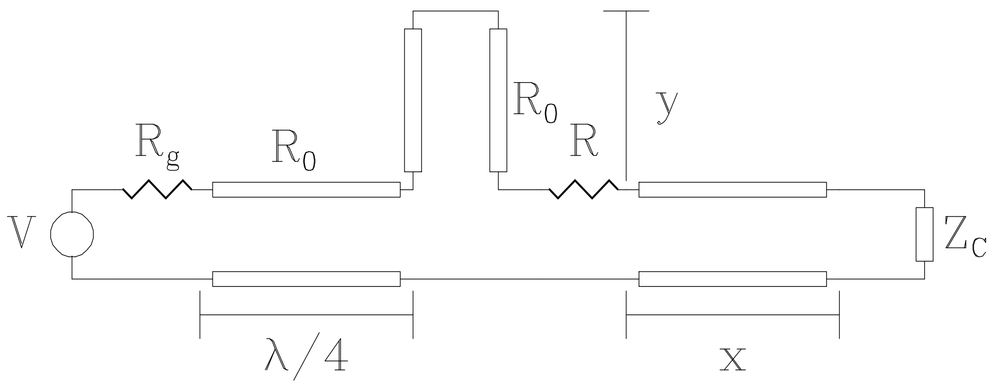


$Z_0 = 50\ \Omega$, $\lambda = 30\ cm$, $Z_L = (100 - j100)\ \Omega$

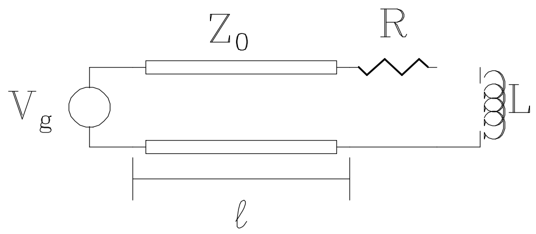
L 14 Determinare la minima lunghezza x ed il corrispondente minimo valore di y che massimizzano la potenza dissipata sul carico Z_C, ed il valore di tale potenza. Le linee sono uguali ed in aria.

$V = 30\ V$, $R = R_g = 25\ \Omega$, $Z_C = 10 + j10\ \Omega$, $R_0 = 50\ \Omega$, $f = 300\ MHz$.

$\left[\!\left[\ x = 18.5\ cm,\ y = 31.0\ cm,\ P_d = 3.6\ W\ \right]\!\right]$



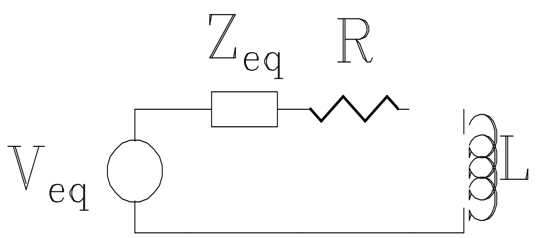
L 15 Nello schema di figura determinare R in modo che vi si dissipi la massima potenza e calcolarne il valore.



$V_g = 5\ V, f = 30\ MHz, \ell = \lambda/8; Z_0 = 75\ \Omega; L = 1\mu H$

◊◊◊

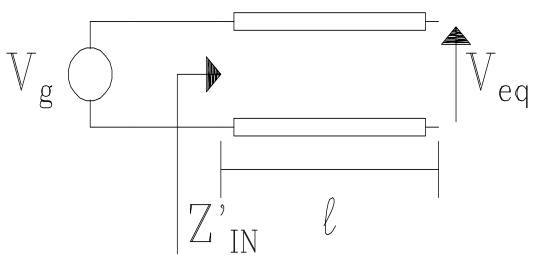
Conviene utilizzare il teorema di Thevenin ottenendo



$$Z_{eq} = jZ_0\, \mathrm{tg}\, \beta\ell = j75\ \Omega$$

Poich'e Z_{eq} è puramente reattiva, e sia Z_{eq} che L sono fissati, non è possibile imporre che le impedenze di carico e del generatore siano uguali, ma occorre trovare il massimo tramite derivazione.

Per calcolare V_{eq} si ha



$$Z'_{IN} = -jZ_0 \operatorname{cotg} \beta\ell \qquad V(0) = V_g \qquad I(0) = \frac{V_g}{Z'_{IN}}$$

e quindi

$$V_{eq} = V(\ell) = V(0)\cos\beta\ell - jZ_0 I(0) \operatorname{sen}\beta\ell = V_g \cos\beta\ell + V_g \frac{\operatorname{sen}^2\beta\ell}{\cos\beta\ell} = \frac{V_g}{\cos\beta\ell} = \sqrt{2}\,V_g$$

La potenza dissipata su R vale

$$P = \frac{1}{2}R|I|^2 = \frac{1}{2}R\frac{2|V_g|^2}{|R + j\omega L + Z_{eq}|^2} = \frac{R|V_g|^2}{R^2 + X^2}$$

dove

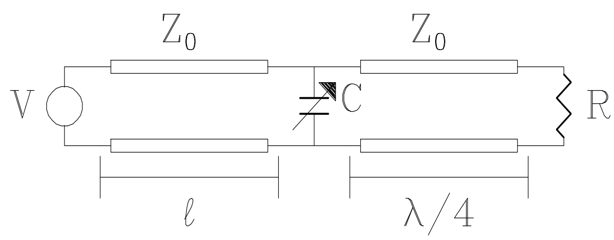
$$X = \omega L + Z_0 \operatorname{tg}\beta\ell = \omega L - Z_0 = 263.5\ \Omega$$

Derivando l'espressione per P si ottiene

$$\left(R^2 + X^2\right) - R\left(2R\right) = 0 \qquad R = |X| = 263.5\ \Omega$$

e vale $P_{MAX} = 47.5\ mW$.

L 16 Determinare il valore della capacità C che rende massima la potenza reale fornita dal generatore.



◇◇◇

L'impedenza d'ingresso del tronco di linea di destra è data da:

$$Z' = \frac{Z_0^2}{R} = \frac{1}{G}$$

Per il tratto di sinistra consideriamo lo schema equivalente secondo Norton. L'impedenza del tronco a sinistra (con generatore cortocircuitato) risulta:

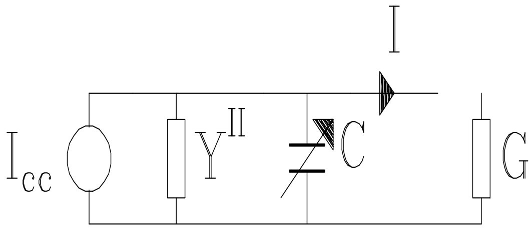
$$Z'' = jZ_0 \operatorname{tg}\beta\ell = \frac{1}{Y''}$$

e la corrente di corto circuito:

$$I_{cc} = I(\ell) = I(0)\cos\beta\ell - j\frac{V}{Z_0}\operatorname{sen}\beta\ell =$$

$$= \frac{V}{jZ_0 \operatorname{sen}\beta\ell}$$

Pertanto il sistema è riconducibile al seguente circuito a parametri concentrati.



Poichè lungo la linea non vi sono perdite, la potenza reale fornita dal generatore coincide con quella consegnata al carico ovvero dissipata su G, per cui basta massimizzare quest'ultima, data da:

$$\frac{1}{2}|I_{cc}|^2 \frac{G}{G^2 + (\omega C - Y_0 \operatorname{cotg} \beta\ell)^2}$$

Essendo C l'unico parametro variabile, il massimo si ottiene minimizzando

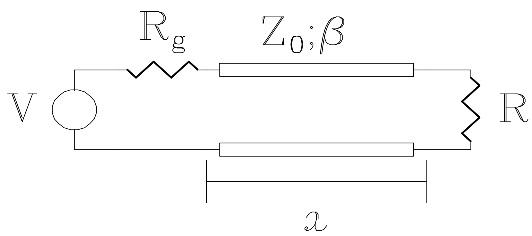
$$(\omega C - \frac{\operatorname{cotg}\beta\ell}{Z_0})^2$$

e pertanto, poichè C può assumere solo valori positivi, dovrà essere:

$$C = \frac{\operatorname{cotg} \beta\ell}{\omega Z_0} \qquad se \ \operatorname{cotg} \beta\ell \geq 0$$

$$C = 0 \qquad se \ \operatorname{cotg} \beta\ell < 0$$

L 17 Determianre la minima lunghezza x che massimizza la potenza consegnata al carico dalla linea priva di perdite.



◊◊◊

Posto $X = \operatorname{tg} \beta x$, l'impedenza di ingresso del tratto di linea vale

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{R + jz_0 X}{Z_0 + jRX} \qquad \Longrightarrow \qquad R_{IN} = \operatorname{Re} Z_{IN} = \frac{Z_0^2 R(1 + X^2)}{Z_0^2 + R^2 X^2}$$

La potenza consegnata al carico è pari a quella in ingresso alla linea e vale

$$P_C = \frac{1}{2} \frac{|V|^2}{|R_g + Z_{IN}|^2} R_{IN} = \frac{1}{2} |V|^2 Z_0^2 R \mathcal{P}(X)$$

dove

$$\mathcal{P}(X) = \frac{1+X^2}{Z_0^2(R+R_g)^2 + (RR_g+Z_0^2)^2X^2}$$

è la grandezza da massimizzare. La sua derivata vale

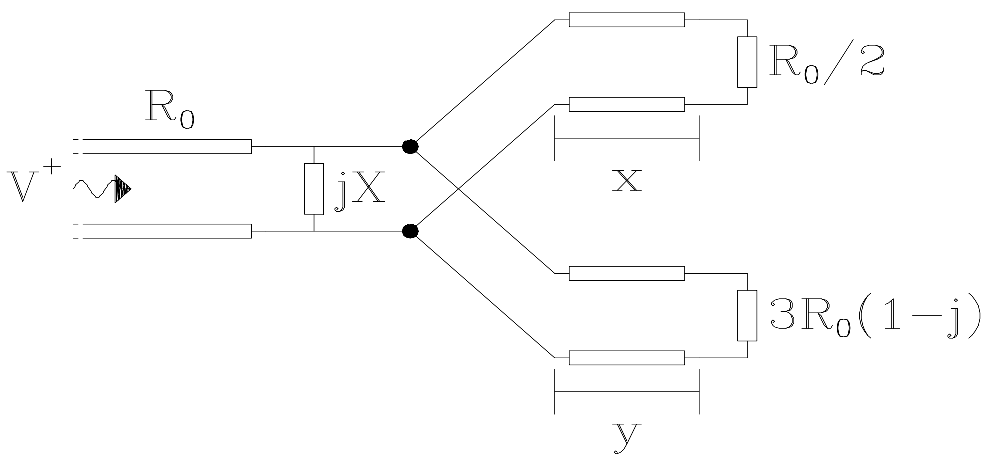
$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{P}}{dX} &= \frac{2X\left[Z_0^2(R+R_g)^2 + (RR_g+Z_0^2)^2X^2 - (RR_g+Z_0^2)^2(1+X^2)\right]}{\left[Z_0^2(R+R_g)^2 + (RR_g+Z_0^2)^2X^2\right]^2} \\ &= \frac{2X\left[Z_0^2(R^2+R_g^2) - (R^2R_g^2+Z_0^4)\right]}{\left[Z_0^2(R+R_g)^2 + (RR_g+Z_0^2)^2X^2\right]^2}\end{aligned}$$

che si annulla solo per $X = 0$. Il campo di variabilità di X è $(-\infty, +\infty)$, e

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(0) &= \frac{1}{Z_0^2(R+R_g)^2} \\ \mathcal{P}(\pm\infty) &= \frac{1}{(RR_g+Z_0)^2}\end{aligned}$$

Ne segue che se $Z_0(R+R_g) < RR_g + Z_0^2$, allora $X = 0 \Rightarrow x = 0$, altrimenti $X = \pm\infty \Rightarrow x = \lambda/4$.

L 18 Determinare i valori minimi di x, y ed il valore di X in modo che i due carichi assorbano la stessa potenza e che la somma di tali potenze sia massima.



◊◊◊

Siano Y_x, Y_y le ammettenze di ingresso dei due rami; essendo, per entrambi i rami, $P = \frac{1}{2}Re(Y^*|V|^2)$

$$\begin{cases} Re(Y_x^*) = Re(Y_y^*) & \text{Uguaglianza delle potenze} \\ Re(Y_x) + Re(Y_y) = \dfrac{1}{Z_0} & \\ & \text{condizioni di massima potenza} \\ \mathrm{Im}(Y_x) + \mathrm{Im}(Y_y) - \dfrac{1}{X} = 0 & \end{cases}$$

Dalla prima e seconda si ha

$$Re(Y_x) = \frac{1}{2Z_0}$$

e dalla formula del trasporto dell'impedenza

$$\frac{2 + 2\,\mathrm{tg}^2\,\beta x}{1 + 4\,\mathrm{tg}^2\,\beta x} = \frac{1}{2}$$

Tale equazione non ha soluzioni a meno che

$$\mathrm{tg}\,\beta x \Rightarrow \infty \qquad \text{ovvero} \qquad x = \frac{\lambda}{4}$$

Inoltre, in tal caso, $\mathrm{Im}(Y_x) = 0$.

Imponendo $Re(Y_y) = \dfrac{1}{2Z_0}$ si trova

$$\frac{3(1 + 3\,\mathrm{tg}\,\beta y) + 3\,\mathrm{tg}\,\beta y(\mathrm{tg}\,\beta y - 3)}{9 + (\mathrm{tg}\,\beta y - 3)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\beta y = 1.061; \;\; -2.26$$

Il valore minore di y si ha per $\mathrm{tg}\,\beta y = 1.061$ ovvero $\beta y = 0.815 \Rightarrow y \simeq 0.13\lambda$. Sostituendo nella espressione di Y_y si trova poi

$$\mathrm{Im}(Y_y) = \frac{1.38}{Z_0} \qquad X = 0.72\ Z_0$$

L 19 Si voglia adattare un carico di 100 Ω, puramente resistivo, ad una linea di trasmissione, che abbia una impedenza caratteristica di 50 Ω mediante un trasformatore a $\frac{\lambda}{4}$. Determinare la impedenza caratteristica del tratto di linea da interporre fra il carico e la linea principale, e la lunghezza di questo tratto, sapendo che la frequenza di operazione è 10 MHz e che la velocità di fase è 80 % della velocità della luce nel vuoto.

$$\left[\!\left[\ Z = 70.7\ \Omega, \ell = 6\ m\ \right]\!\right]$$

L 20 Si abbia un tronco di linea lungo $\ell = 15\ m$ ed operante alla frequenza di 10 MHz. Le impedenze di ingresso con l'uscita rispettivamente in corto circuito e a circuito aperto sono entrambe reali e valgono $R_{cc} = 0.5\ \Omega \qquad R_{oc} = 5\ k\Omega$

Si calcolino le costanti primarie e secondarie della linea stessa.

◇◇◇

Risulta

$$R_{cc} = jZ_0\,\mathrm{tg}\,k\ell \qquad , \qquad R_{oc} = -jZ_0\,\mathrm{cotg}\,k\ell$$

per cui, moltiplicando membro a membro, $Z_0 = \sqrt{R_{cc} \cdot R_{oc}} = 50\ \Omega$.

Si ha poi

$$\mathrm{tg}\,k\ell = \mathrm{tg}(\beta - j\alpha)\ell = -j\frac{R_{cc}}{Z_0}$$

(la costante di propagazione deve essere complessa affinchè R_{cc}, R_{oc} possano essere reali). Segue

$$\operatorname{tg}\beta\ell - j\operatorname{tgh}\alpha\ell = -j\frac{R_{cc}}{Z_0}(1 + j\operatorname{tg}\beta\ell\operatorname{tgh}\alpha\ell)$$

$$\operatorname{tg}\beta\ell = \frac{R_{cc}}{Z_0}\operatorname{tg}\beta\ell\operatorname{tgh}\alpha\ell$$

$$\operatorname{tgh}\alpha\ell = \frac{R_{cc}}{Z_0}$$

da cui

$$\operatorname{tg}\beta\ell = 0 \qquad \beta\ell = n\pi \qquad \beta = n \cdot 0.209 \qquad m^{-1}$$

(n intero positivo qualunque)
ed essendo

$$\frac{R_{cc}}{Z_0} \ll 1 \qquad \operatorname{tgh}\alpha\ell \simeq \alpha\ell \Rightarrow \alpha \simeq \frac{R_{cc}}{l \cdot Z_0} = 0.666 \cdot 10^{-3} m^{-1}$$

Si ha poi, essendo Z_0 reale (condizione di Heaviside)

$$L = \frac{\beta Z_0}{\omega} = n \cdot 0.167\frac{\mu H}{m} \qquad C = \frac{\beta}{\omega Z_0} = n \cdot 66.5\frac{pF}{m}$$

Inoltre

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \Rightarrow \alpha = \beta\frac{R}{\omega L} = \frac{R}{Z_0} = \frac{G}{Y_0}$$

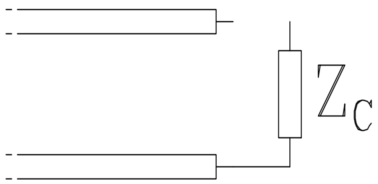
e quindi

$$R = 33.3\frac{m\Omega}{m} \qquad , G = 13.3\frac{\mu S}{m}$$

L 21 L'impedenza d'ingresso a 20 MHz di una sezione di linea di trasmissione lunga 32 m è misurata in condizione di corto circuito e circuito aperto. I rispettivi valori risultano pari a $Z_{sc} = (12 + j19)\ \Omega$ e $Z_{oc} = (115 - j138)\ \Omega$. Calcolare il fattore di attenuazione, la costante di fase e l'impedenza caratteristica.
$[\lambda = 6.06\dot{1}0^{-3}m^{-1}; \quad \beta = 9.05\dot{1}0^{-3}m^{-1}; \quad Z_0 = (63.4 + \supset 4.17)\Omega]$

L 22 Si abbia una linea lunga 30 cm, alimentata a 800 MHz. Determinare le costanti secondarie sapendo che l'impedenza d'ingresso misurata quando l'altro estremo è in corto circuito vale $Z'_{in} = -j100\ \Omega$, e quando l'altro estremo è aperto, vale $Z''_{in} = j25\ \Omega$.
$[K = 6.78m^{-1}; \quad Z_0 = 50\Omega]$

L 23 Per la linea in figura, di parametri: $Z_0 = 75\ \Omega$; $v_f = 3 \cdot 10^8\ m/sec$; $f = 1\ GHz$



si ha:
a) $\dfrac{\max|V|}{\min|V|} = WSVR = 1.5$
b) $\min|V|$ si ha a $\ell = -40$ cm dal carico.
Calcolare Z_c

◇◇◇

Indichiamo con $\Gamma_0 = |\Gamma_0|e^{j\phi}$ il coefficiente di riflessione sul carico. La tensione sulla linea è data da:

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z}\left(1 + |\Gamma_0| e^{j\phi} e^{2j\beta z}\right)$$

Poichè $\max|V| = 1 + |\Gamma_0| \qquad \min|V| = 1 - |\Gamma_0|$ segue

$$\frac{1 + |\Gamma_0|}{1 - |\Gamma_0|} = 1.5$$

per cui $|\Gamma_0| = 0.2$. Nel punto di minimo per $|V|$ il coefficiente (locale) di riflessione è reale negativo per cui, ricordando che $\Gamma(-\ell) = \Gamma_0 e^{-2j\beta\ell}$,

$$-2\beta\ell + \phi = (2n+1)\pi$$

dai dati $2\beta\ell = \frac{16\pi}{3}$ e quindi

$$\phi = \frac{16\pi}{3} + (2n+1)\pi = \frac{\pi}{3} + 2n'\pi$$

$$\Gamma_0 = 0.2e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{10} + \frac{j\sqrt{3}}{10}$$

$$\frac{Z_c}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma_0}{1 - \Gamma_0} = \frac{11 + j\sqrt{3}}{9 - j\sqrt{3}} = 1.143 + j0.412$$

da cui

$$Z_c = 86 + j31\ \Omega$$
