Teorema 1 (Russell)**.** Sia A un insieme. Allora il suo insieme potenza $\wp(A)$ non è un sottoinsieme di A.

Dimostrazione. Supponiamo che $\wp(A)$ sia un sottoinsieme di A e da questo cerchiamo di ottenere una contraddizione. Ora, se $\wp(A) \subseteq A$ abbiamo, per ogni insieme B:

$$B \in \wp(A) \quad \to \quad B \in A, \tag{1}$$

o, equivalentemente:

$$B \subseteq A \quad \to \quad B \in A. \tag{2}$$

Consideriamo l'insieme (che chiamiamo insieme di Russell di A)

$$R(A) = \{x : x \in A \wedge x \notin x\}.$$

Poiché, per la definizione di $R(A)$, se $x \in R(A)$, allora $x \in A$, abbiamo che $R(A) \subseteq A$. Pertanto, per la condizione 2, $R(A) \in A$. È lecito ora domandarci:

$$R(A) \in R(A)?$$

Le risposte possibili sono solo e soltanto due: sì oppure no. Vediamo cosa succede:

Risposta Sì: Allora, per la definizione di $R(A)$, $R(A) \notin R(A)$. Impossibile.

Risposta No: Allora, poiché $R(A) \subseteq A$, non è vero che $R(A) \notin R(A)$. Perciò $R(A) \in R(A)$.

Abbiamo pertanto ottenuto che asserire $R(A) \in R(A)$ equivale a $R(A) \notin R(A)$. Ma questo è impossibile. Quindi è falso che $R(A) \in A$. Quindi la implicazione nella condizione 2 è falsa. Da ciò consegue che sia falso che $\wp(A) \subseteq A$. Siamo pervenuti a una contraddizione! $\square$