Metodi matematici della fisica – AA 2020/21

Esercitazione su spazi vettoriali e matrici

1. Siano A, B due operatori su su $\mathbb{C}^N$. Dimostrare che se $[A,[A,B]] = 0$ allora si ha
$$[A^2, B] = 2A[A,B].$$
(a) Ragionando per induzione si dimostri la formula generale
$$[A^n, B] = nA^{n-1}[A,B]$$
con n intero positivo.

2. Determinare per quali valori del parametro complesso α gli operatori seguenti sono Hermitiani e per quali antihermitiani:
$$C = \alpha(A + A^+), \quad D = \alpha(A - A^+), \quad E = \alpha AA^+, \quad F = e^{\alpha(A-A^+)}.$$
(a) Determinare per quali valori del parametro α gli operatori seguenti sono unitari:
$$F = e^{\alpha(A-A^+)}, \quad G = e^{\alpha(A+A^+)}, \quad H = e^{\alpha AA^+}$$

3. **Operatori creazione e distruzione**
In meccanica quantistica gli operatori creazione a^+ e distruzione a sono definiti come quelli operatori che agendo su uno stato $|n\rangle$ in cui ci sono n particelle (cioé con numero di occupazione n) creano/distruggono una particella. Piú precisamente essi sono definiti come
$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$
(a) Dimostrare che $|n\rangle$ é autovettore di $H = a^+a$ con autovalore n .
(b) Dimostrare la relazione di commutazione
$$[a, a^+] = 1.$$
(c) Si dimostri che l'operatore $U = e^{\alpha a^+ - \alpha^* a}$ é unitario

4. Sia $\{|e_i\rangle\}$, $i = 1, 2 \ldots n$ una base ON di uno spazio vettoriale sul campo complesso $V^{(n)}$. Si consideri l'operatore
$$H = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |e_i\rangle\langle e_i|$$
con $\alpha_i \in \mathbb{C}$
a) Si dimostri che H e' un operatore normale.
b) Si determini α_i affinché H sia hermitiano.

5. Si determinino condizioni necessarie e sufficienti che deve soddisfare un operatore T affinché l'espressione

$$\langle x|y\rangle_T = \langle x|T|y\rangle$$

rappresenti una buona definizione di prodotto scalare (prodotto scalare rispetto alla matrice T).

6. Data la matrice

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(a) Dimostrare che la matrice $B = e^{i\theta\sigma_y}$ é unitaria.
(b) Calcolare esplicitamente la matrice $B = e^{i\theta\sigma_y}$ e dimostrare che essa descrive una rotazione di angolo θ nel piano Euclideo

7. Dimostrare che il rotore di di un vettore in 3D $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ puó essere scritto in componenti come

$$F_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x^j}$$

Dimostrare usando questa espressione che la divergenza di un rotore e il rotore di un gradiente sono sempre zero.

8. Date matrici di ordine n qualsiasi A, B, C, U dimostrare le proprietá seguenti usando la notazione indiciale:

$$tr(ABC) = tr(BCA)$$

$$(ABC)^+ = C^+B^+A^+$$

$$U^{-1}AU = B\,,\ [U, B] = 0 \to A = B$$

9. Dimostrare che per se per una generica matrice A e' possibile trovare una trasformazione di similitudine $U^{-1}AU = A_D$ tale che A_D sia diagonale allora si ha

$$\ln detA = tr \ln A$$

Parte opzionale

10. **Stati coerenti in meccanica quantistica**

    In meccanica quantistica si definiscono stati coerenti gli autovettori dell'operatore di distruzione a definito nell'esercizio 2,

$$a|u_\alpha\rangle = \alpha|u_\alpha\rangle$$

Usando la Formula di Haussdorf-Campbell-Baker

$$e^A e^B = e^C, \quad C = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}\left([A,[A,B]] + [B,[B,A]]\right) + \ldots . \quad (2)$$

e la formula

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]] + \ldots \frac{1}{n!}[A,[A,[A,\ldots B]]] + \ldots \quad (3)$$

dove a, a^+ sono gli operatori definiti nell'esercizio 2.
(a) Dimostrare che

$$|u_\alpha\rangle = e^{\alpha a^+ - \alpha^* a}|0\rangle$$

dove $|0\rangle$ é lo stato di vuoto che verifica $a|0\rangle = 0$ (Si tenga ben presente la differenza tra lo stato di vuoto $|0\rangle$ che un elemento dello spazio vettoriale e 0 che indica l'assenza di stati.)
(b) Dimostrare che $|u_\alpha\rangle$ puó essere scritto come

$$|u_\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^+}|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

11. Il gruppo $GL(2,R)$ é definito come il gruppo delle trasformazioni lineari A su $\mathbb{R}^2$ ($z'_m = \sum_j a_{mj} z_j$) invertibili ($detA \neq 0$).
    Dimostrare che una trasformazione lineare $A \in GL(2,R)$ che lascia invariante l'area del parallelogramma formato da due vettori v_i, z_i ($|v \times z|$) ha $\det A = 1$ (cioé appartiene al gruppo $SL(2,R)$, il sottogruppo delle trasformazioni di $GL(2,R)$ con determinante 1).