

Soluzione esercizi di logica e insiemistica

1. Ponendo $A = \text{“Luca studia bene”}$ e $B = \text{“Luca supera brillantemente l’esame”}$, l’enunciato dato si può formalizzare come: $B \rightarrow A$. Le risposte possono essere formalizzate come segue:
 - a) $B \leftrightarrow A$, dunque non è equivalente all’enunciato dato.
 - b) $A \rightarrow B$, dunque non è equivalente all’enunciato dato.
 - c) $B \rightarrow A$, dunque è equivalente.
 - d) $\neg A \rightarrow \neg B$, che è ottenuto da $B \rightarrow A$ applicando la legge di contrapposizione $((B \rightarrow A) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg B))$ e dunque è equivalente all’enunciato dato.
2. La formula non è una tautologia. Un controesempio di ha per $\alpha = \text{falso}$, $\beta = \text{vero}$, $\gamma = \text{vero}$.
3. Risposte:
 - a) no
 - b) no
 - c) E’ soddisfacibile per $\gamma = \text{vero}$, indipendentemente dai valori assegnati ad α e β .
 - d) E’ falsificabile per $\gamma = \text{falso}$, indipendentemente dai valori assegnati ad α e β .
4. B, C, D non sono una partizione di A. Una possibile partizione è la seguente: $B = \{a, c\}$, $C = \{d, e, f\}$, $D = \{b\}$, perchè $A = B \cup C \cup D$ e $B \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$, $C \cap D = \emptyset$. Si noti che le partizioni non sono uniche, infatti quella data non è l’unica possibile.
5. $A \cap B = \{4, 5, 7\}$, di conseguenza $\mathcal{P}(A \cap B) = \{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{7\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 7\}, \{4, 5, 7\}\}$.
6. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{2\}, \{3\}\}$.
7. $A^2 = \{(a, a), (a, e), (a, i), (a, o), (a, u), (e, a), (e, e), (e, i), (e, o), (e, u), (i, a), (i, e), (i, i), (i, o), (i, u), (o, a), (o, e), (o, i), (o, o), (o, u), (u, a), (u, e), (u, i), (u, o), (u, u)\}$.
La diagonale è: $D = \{(a, a), (e, e), (i, i), (o, o), (u, u)\}$.
8. $(A \cap B) \times C = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (8, 0), (8, 1), (8, 2), (12, 0), (12, 1), (12, 2), (16, 0), (16, 1), (16, 2), (20, 0), (20, 1), (20, 2)\}$.
9. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$.