ANALISI DEI SEGNALI

TIPO DI SEGNALE

- ONDE
- SUONI
- IMMAGINI
- CORRENTI ELETTRICHE
- — — — — —

ORIGINE FISICA

- CAMPI EM
- ONDE SONORE
- ONDE ELASTICHE
- PARTICELLE ELEMENTARI

— — — — — — —

TRATTAMENTO SEGNALI

- CARATTERIZZAZIONE
- CAMPIONAMENTO
- DIGITALIZZAZIONE
- COMPRESSIONE
- FILTRAGGIO
- RICOSTRUZIONE

— — — —

— — — —

IMPORTANTISSIMO IN FISICA

- ASTROFISICA
- FISICA PARTICELLE
- FISICA APPLICATA
- FISICA MEDICA

— — —

— — —

— —

SERIE FOURIER
ANALISI ARMONICA

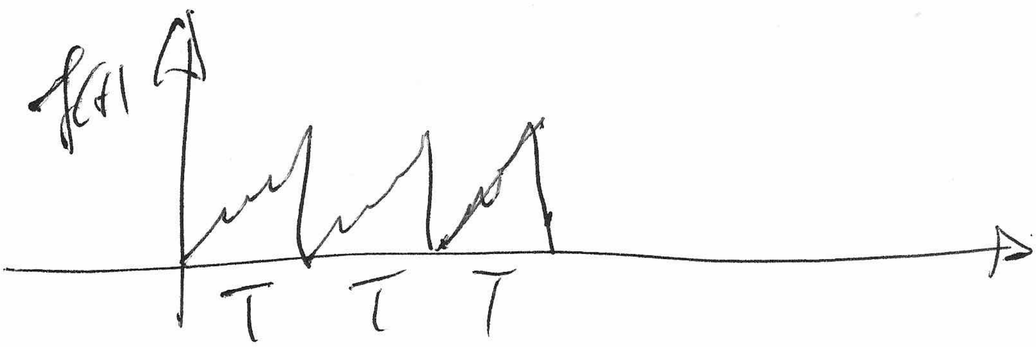
- ABBIAMO VISTO CHE UNA CONFIGURAZIONE $u(x,t)$ DI UNA CORDA VIBRANTE PUÒ ESSERE SCRITTA COME SOVRAPPOSIZIONE DI UN NUMERO ∞ DI MODI NORMALI (ARMONICHE)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n x \sin \omega_n t$$

GENERALIZZAZIONE

DATO UN QUALUNQUE SEGNALE PERIODICO

$$f(t+T) = f(t)$$



POSSIAMO SCRIVERE $f(t)$ COME SOVRAPPOSIZIONE DI UN NUMERO INFINITO DI FREQUENZE MULTIPLE DI UNA FREQUENZA FONDAMENTALE

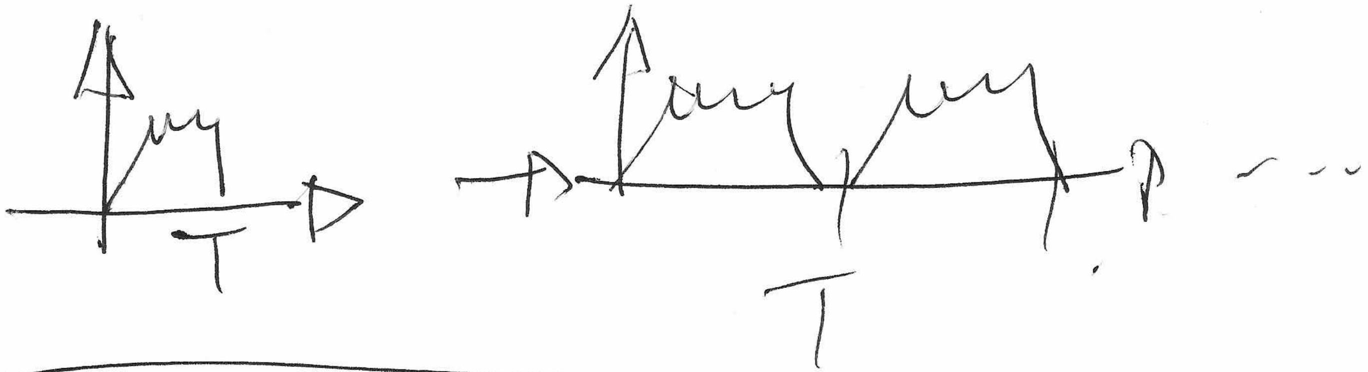
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad ?$$

CIOÈ

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} n\right) t$$

SERIE DI FOURIER
ANALISI DI FOURIER
DI UN SEGNALE

N.B IPOTESI PERIODICITÀ NON ESSENZIALE: DATO UN QUALUNQUE SEGNALE FINITO IN UN TEMPO FINITO T LO POSSIAMO SEMPRE FAR DIVENTARE PERIODICO (RIPETIZIONE DI PERIODO T)



UTILITÀ MATEMATICA

CAMPIONAMENTO

- PER CAMPIONARE $f(t)$ SERVONO UN NUMERO INFINITO DI DATI
  SE VIENE DISCRETIZZATA NON ∞
  MA COMUNQUE SE IL CAMPIONAMENTO È PRECISO UN NUMERO MOLTO GRANDE.

- SERIE DI FOURIER: VENGONO USATI I COEFFICIENTI c_m PER RAPPRESENTARE LA FUNZIONE

$$f(t) \to \{c_1, c_2 - c_m\}$$

LA POTENZA DELLE SERIE DI FOURIER È CHE BASTANO POCHI COEFFICIENTI, $m=1,2,3$ E POCHI ALTRI PER APPROSSIMARE MOLTO BENE LA FUNZIONE

DEFINIZIONE FORMALE DI SERIE DI FOURIER

sia $f(x)$ DEFINITA IN $[-L, L]$ continua o GC con $f'(x) \in GC$. ALLORA si può scrivere la sua serie di Fourier

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{L}} \cos\frac{n\pi}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\sqrt{L}} \sin\frac{n\pi}{L}x \quad (1)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi}{L}x \, dx \qquad \beta_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi}{L}x \, dx \quad (2)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{L} f(x) dx$$

USANDO NOTAZIONE DI DIRAC

DEFINENDO

$$|e_n^+\rangle = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\frac{n\pi}{L}x \right\} \quad n = 0, 1 \ldots$$

$$|e_n^-\rangle = \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\frac{n\pi}{L}x \right\} \quad n = 1 \ldots$$

$$f(x) \to |f\rangle$$

$$|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |e_n^+\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n |e_n^-\rangle$$

$$\alpha_n = \langle e_n^+ | f \rangle \qquad \beta_n = \langle e_n^- | f \rangle$$

BASE ON

$$\langle e_n^+ | e_m^+ \rangle = \delta_{nm} \qquad \langle e_n^- | e_m^- \rangle = \delta_{nm}$$

$$\langle e_n^+ | e_m^- \rangle = 0$$

DIMOSTRAZIONE

$$\langle e_0^+ | e_m^+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi}{L}x \, dx = 0$$

$$\langle e_n^- | e_m^- \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi}{L}x \sin\frac{m\pi}{L}x \, dx$$

WERNER $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{m-n}{L}\pi x - \cos\frac{(m+n)}{L}\pi x\right] dx$$

$\left\langle \begin{array}{l} 0 \quad 0 \quad \text{SE} \quad m \neq n \\ \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx = 1 \end{array}\right.$

- ANALOGAMENTE PER $\langle e^+_m | e^+_n \rangle$

- $\langle e^-_m | e^+_n \rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi}{L}x \cos\frac{n\pi}{L}x \, dx$

FUNZIONE DISPARI SU I-SIMMETRICO

$$\langle e^-_m | e^+_n \rangle = 0$$

- LE ~~...~~ EQUAZIONI (2) POSSONO ESSERE FACILMENTE DIMOSTRATE USANDO LA NOTAZIONE DI DIRAC E L'ASSUNZIONE DI CONVERGENZA UNIFORME (O MODULO 2)

$$\Rightarrow [\Sigma, S] = 0$$

$$|A\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |e^+_n\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n |e^-_n\rangle$$

MOLTIPLICHIAMO SCALARMENTE $\langle e^+_m |$

$$\langle e^+_m | f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \langle e^+_m | e_n \rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \delta_{nm} = \alpha_m$$

$$\Rightarrow \alpha_m = \langle e^+_m | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi}{L} x \, f(x) \, dx$$

ANALOGAMENTE MOLTIPLICANDO PER $\langle e^-_m |$

$$\beta_m = \langle e^-_m | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi}{L} x \, f(x) \, dx$$

TEOREMI SULLA CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER

TEOREMA N° 1

SIA $f(x) \in GC(-L, L)$ CONTINUA A TRATTI

ALLORA LA SERIE DI FOURIER CONVERGE **PUNTUALMENTE** A $f(x)$ NEI PUNTI IN CUI $f(x)$ È CONTINUA ED A $\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$ DOVE È DISCONTINUA

TEOREMA N° 2

SE $f(x) \in C(-L, L)$ E $f'(x) \in GC(-L, L)$

E SE $f(-L) = f(L)$

ALLORA LA SERIE DI FOURIER CONVERGE UNIFORMEMENTE IN $(-L, L)$

TEOREMA N° 3

SE LA FUNZIONE $f(x) \in \mathcal{R}(-L, L)$

ALLORA LA SUA SERIE DI FOURIER

CONVERGE IN MEDIA MODULO 2

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-L}^{L} |S_N(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

N.B. NEL CASO $f(x) \notin C(-L, L]$

MA $f(x) \in GC(-L, L)$

CONVERGENZA NON PUÒ ESSERE UNIFORME PERCHÉ SERIE DI FUNZIONI CONTINUE CONVERGE A FUNZIONI CONTINUE

ALTRI TEOREMI

TEOREMA N° 4

SE LA FUNZIONE È PARI $f(x) = f(-x)$

$\Rightarrow \beta_n = 0$

SE LA FUNZIONE È DISPARI

$\Rightarrow \alpha_n = 0$

TEOREMA N°5

RELAZIONE DI PARSEVAL

COMPLETEZZA

$$|\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 = \int_{-L}^{L} (f(x))^2 dx$$

SI DIMOSTRA COME LA RELAZIONE

DI COMPLETEZZA SU v^N

ASSUMENDO $[\Sigma, \int] = 0$

TEOREMA N°5

SE $f(x) \in C^K(-L,L)$ E SE

$$f^{(p)}(-L) = f^{(p)}(L) \quad \text{PER } p = 0, 1 \dots K-1$$

ALLORA

$$|\alpha_n| \leq \frac{2M}{n^K}$$

$$|\beta_n| \leq \frac{2M}{n^K}$$

DOVE $M = \sup_{(-L,L)} |f^{(K)}(x)|$

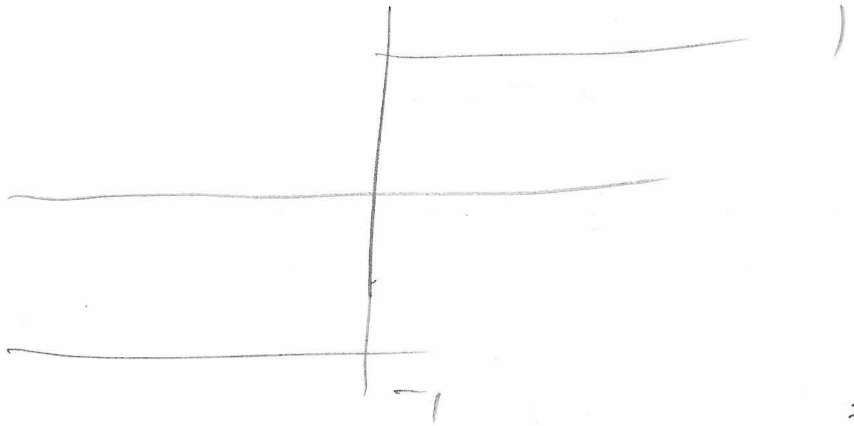
PER $K > 1$ $\quad f \in C^2$

$$f(-L) = f(L) \qquad f'(L) = f(-L)$$

CONVERGENZA TOTALE

ESEMPIO ① ONDA QUADRA

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -L<x<0 \\ 1 & 0<x<L \end{cases}$$



$f(x) = -f(-x)$

$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_m = 0$

$$\beta_m = -\frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{0} \sin\frac{m\pi}{L}x + \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{0}^{L} \sin\frac{m\pi}{L}x$$

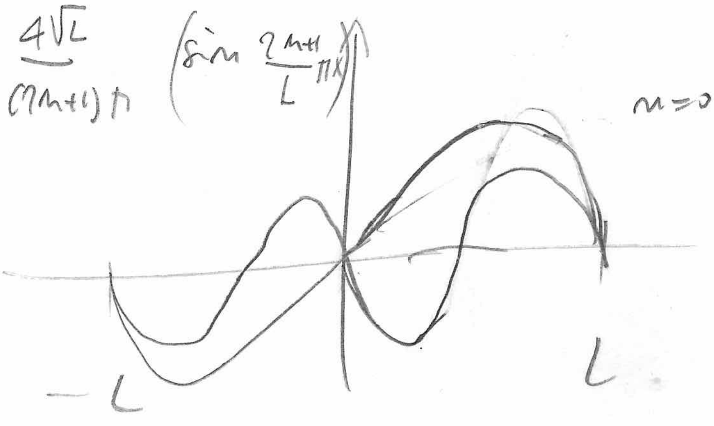
$$= \frac{2}{\sqrt{L}} \int_0^L \sin\frac{m\pi}{L}x \, dx = -\frac{2\sqrt{L}}{m\pi} \cos\frac{m\pi}{L}x \Big|_0^L$$

$$= \frac{2\sqrt{L}}{m\pi}\left[1 - \cos m\pi\right] = \begin{cases} 0 & m \text{ PARI} \\ \dfrac{4\sqrt{L}}{m\pi} & m \text{ DISPARI} \end{cases}$$

$$\beta_{2m+1} = \frac{4\sqrt{L}}{(2m+1)\pi} \qquad m = 0, 1 \ldots$$

$m=0 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{L}x \qquad m=1 \Rightarrow \sin\frac{3\pi}{L}$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4\sqrt{L}}{(2m+1)\pi} \left(\sin\frac{2m+1}{L}\pi x\right)$$



. CONVERGENZA PUNTUALE per $x \neq 0$, $x \neq \pm L$

a $f(x)$

. CONVERGENZA PUNTUALE A

$$\frac{1}{2}\left(f(0^+) + f(0^-)\right) = 0 \quad \text{in} \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=\pm L \end{matrix}$$

CHECK OK

PARSEVAL

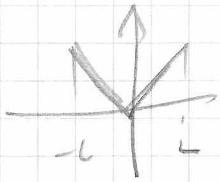
$$\langle f | f \rangle = \int_{-L}^{L} dx = 2L$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16\, L}{(2n+1)^2} \frac{1}{\pi^2} = \circ$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ESEMPIO 2 $\qquad f(x) = f(-x)$

$f(x) = |x|$



$\beta_n = 0$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{L} |x| \, dx = \frac{2}{\sqrt{2L}} \int_0^L x \, dx = \frac{1}{\sqrt{2L}} \left(x^2 \right) \Big|_0^L = \frac{L^2}{\sqrt{2L}}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{L} |x| \cos \frac{n\pi}{L} x = \frac{2}{\sqrt{L}} \int_0^L x \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{L}} \left(x \sin \frac{n\pi}{L} x \left(\frac{L}{n\pi} \right) + \frac{L^2}{(n\pi)^2} \cos \frac{n\pi}{L} x \right) \Big|_0^L$$

$$= \frac{2}{\sqrt{L}} \frac{L^2}{(n\pi)^2} \left(\cos n\pi - 1 \right) = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ -\dfrac{4L^2}{\sqrt{L}(n\pi)^2} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$|x| = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \left(\frac{2n+1}{L} \right) \pi x$$

$\boxed{x = L}$

$$L = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos (2n+1)\pi$$

$$= \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = L$$

PARSEVAL

$$\langle f | f \rangle = \int_{-L}^{L} |x|^2 \, dx = 2 \int_0^L x^2 = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^L = \frac{2}{3} L^3$$

$$|\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \frac{L^3}{2} + \frac{16 L^3}{\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{L^3}{2} + \frac{L^3}{6} = \frac{2}{3} L^3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

NB SI PUÒ ROVESCIARE IL RAGIONAMENTO ED USARE LE SF PER CALCOLARE SERIE NUMERICHE

ES.

$$L = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \Rightarrow$$

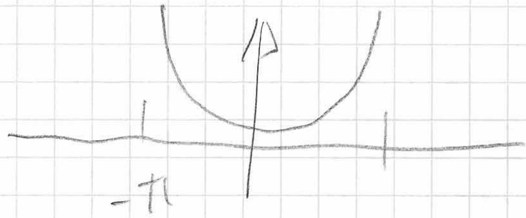
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- ESSENDO $f(x) \in C$ e $f'(x) \in G_C$ PER IL TEOREMA #6 CONVERGEN UNIFORME

~~PER~~ IL

ESEMPIO 3

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [-\pi, \pi]$$



$$f(x) = f(-x)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{3} \left[2\pi^3 \right. = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{3} \pi^3$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{n} x^2 \sin nx \right.$$

$$\left. + \frac{2}{n^2} x \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{4\pi}{n^2} (-1)^n \right)$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

RELAZIONE DI PARSEVAL

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, dx = \frac{1}{5} x^5 \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{5} \pi^5$$

$$\frac{2}{9} \pi^5 + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \frac{2}{9} \pi^5 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right) 16\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad = \frac{2}{9} \pi^5 + \frac{16}{90} \pi^5 = \frac{36}{90} \pi^5 = \frac{2}{5} \pi$$

CALCOLO DI SERIE NUMERICHE

$x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$x = \pi$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

NOTARE

FUNZIONE $\zeta(s)$ di Riem

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

CONVERGE $s \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ESEMPIO 5

$f(x) = x(\pi - x)$

DECOMPOSIZIONE PARTE PARI E DISPARI

$$f_+ = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) = -x^2$$

$$f_- = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = \pi x$$

$$f = f_+ + f_-$$

$$f_+ \Rightarrow \qquad \alpha_n = -(-1)^n \frac{4\sqrt{\pi}}{n^2} \qquad \alpha_0 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{3}\pi^3$$

$$f_- \Rightarrow \qquad \beta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \pi x \sin nx \, dx$$

$$= \sqrt{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \right.$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{\pi}}{n}\left[2\cos n\pi\right] = -\frac{2\pi\sqrt{\pi}}{n}(-1)^n$$

$$f = f_+ + f_- = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\cos nx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$$

PARSEVAL

$$\langle f|f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x^2(\pi - x)^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \pi^2 x^2 - 2\pi x^3 + x^4$$

$$= \frac{2}{3}\pi^5 + \frac{2}{5}\pi^5 = \frac{16\pi^5}{15} \qquad = \frac{2}{5}\pi^5 + \frac{2}{3}\pi^5 = \frac{16}{15}\pi^5$$

$$\sum |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 = \frac{2}{9}\pi^5 + 16\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + 4\pi^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

28

ESEMPIO 6

$-L < x < L$

$f(x) = x^3 - L^2 x$

$f(L) = f(-L) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - L^2$

$f \in C^\infty$

$\boxed{k=2}$

$f'(L) = f'(-L)$

$f(x) = -f(-x)$

$|\beta_n| \leq \frac{1}{n^2}$

$$\beta_n = \frac{2}{\sqrt{L}} \int_0^L (x^3 - L^2 x) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$\frac{n\pi x}{L} = y$

$$\int (x^3 - L^2 x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{L}} \int_0^{n\pi} dy \left(\frac{L}{n\pi}\right)\left[\left(\frac{L}{n\pi}\cancel{y}\right)^3 - \frac{L^3}{(n\pi)} y\right] \sin y \, dy$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{L}} \left[\frac{L^4}{(n\pi)^4} \int y^3 \sin y - \frac{L^4}{(n\pi)^2} y \sin y\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{L}} \left[\frac{L^4}{(n\pi)^4} (-n\pi)(n\pi^2 - 6) \cos n\pi\right.$$

$$\left. + \frac{L^4}{(n\pi)^2} (n\pi) \cos n\pi \right] = \frac{12}{\sqrt{L}} \frac{L^4}{(n\pi)^3} (-1)^n$$

$$\langle 1|1\rangle = \int_{-L}^{L} x^2 (x^2 - L^2)^2 \, dx$$

$$= 2 \int_0^L \left(x^6 - 2L^2 x^4 + x^2 L^4 \right) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{7} L^7 - \frac{2}{5} L^7 + \frac{1}{3} L^7 \right]$$

$$= + \frac{16}{105} L^7$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\sum |B_n|^2 = \frac{144 \, L^7}{\cancel{\pi^6}} \, \frac{\cancel{\pi^6}}{945}$$

$$= \frac{144}{945} L^7 = \frac{16}{105} \qquad \text{ok}$$

ESTENSIONE COMPLESSA

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2L}} + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_m}{\sqrt{L}} \cos \frac{m\pi}{L} x + \frac{\beta_m}{\sqrt{L}} \sin \frac{m\pi}{L} x \right)$$

$$\cos \frac{m\pi}{L} x = \frac{e^{i\frac{m\pi}{L}x} + e^{-i\frac{m\pi}{L}x}}{2} \qquad \sin \frac{m\pi}{L} x = \frac{e^{i\frac{m\pi}{L}x} - e^{-i\frac{m\pi}{L}x}}{2i}$$

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2L}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{L}} (\alpha_m - i\beta_m) e^{i\frac{m\pi}{L}x} + \frac{1}{2\sqrt{L}} (\alpha_m + i\beta_m) e^{-i\frac{m\pi}{L}x}$$

$e_m \in \mathbb{C}$ $\qquad e_n = \{ \alpha_0, \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_m - i\beta_m), \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_m + i\beta_m) \}$

$m = -\infty, \infty$

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_m \frac{e^{i\frac{m\pi}{L}x}}{\sqrt{2L}}$$

BSET ON

$$\{ |l_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{m\pi}{L}x} \qquad m = \in \mathbb{Z}$$

$$\langle l_m | l_n \rangle = \delta_{mn}$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{-i\frac{m\pi}{L}x} e^{i\frac{n\pi}{L}x} dx = \delta_{mn}$$

$$e_m = \langle l_n | f(x) \rangle = \int_{-L}^{L} \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{-\frac{im\pi L}{x}} f(x) dx$$

SERIE FOURIER REALE CASO PARTICOLARE

SERIE COMPLESSA

$$\langle e_m | f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \langle e_m | e_n \rangle =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta_{mn} = a_m$$

$$\Rightarrow \quad a_m = \langle e_m | f \rangle = \int_{-L}^{L} \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{-\frac{i m \pi x}{L}} f(x) dx$$

- DIMOSTRAZIONE 3° TEOREMA COMPLETEZZA

$$[S, \Sigma] = 0$$

$$\langle f | = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle e_m | a_m^*$$

$$\langle f | f \rangle = \sum_{n m} a_m^* a_n \langle e_m | e_n \rangle =$$

$$= \sum_{n m} a_m^* a_n \delta_{mn} = \sum_{n} |a_n|^2$$

• SVILUPPO 2D

$$f(x,y) = \sum_{nm} \frac{\beta_{nm}}{L} \sin nx \sin my$$
$$+ \alpha_{nm} \cos nx \cos my + \gamma_{nm} \cos nx \sin my$$
$$+ \sigma_{nm} \cos my \sin nx$$

$$\beta_{nm} = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx\,dy\, f \sin nx \sin my$$

SISTEMA COMPLESSO

$f(x,y)$
$$\{ |e_{nm}\rangle = \frac{1}{2L} e^{\frac{in\pi}{L}x} e^{\frac{im\pi}{L}y}$$

$$f(x,y) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \beta_{nm} |e_{nm}\rangle$$

$$\beta_{nm} = \langle e_{nm}|f\rangle = \int_{-L}^{L} dx \int_{-L}^{L} dy \frac{1}{2L} e^{-\frac{in\pi}{L}x} e^{-\frac{im\pi}{L}y} f(x,y)$$

ANALOGAMENTE IN 3D

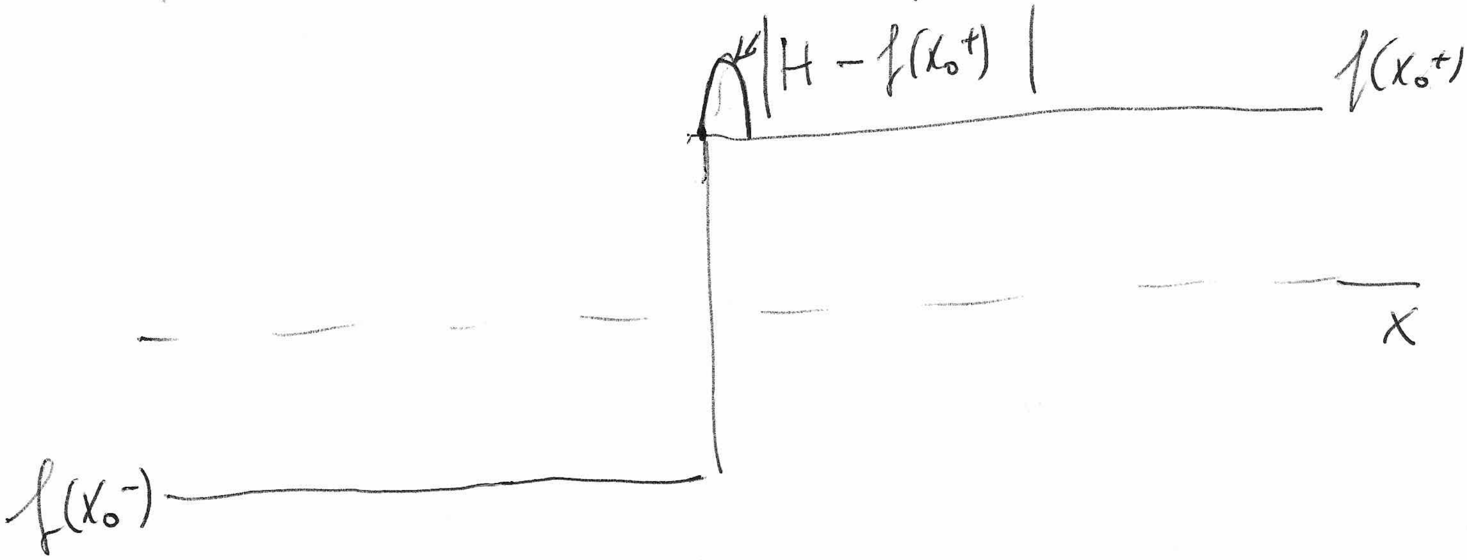
FENOMENO DI GIBBS

$S_N(x)$ PRESENTA SEMPRE UN ESTREMO PER x VICINO AD UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ x_0 DELLA FUNZIONE

QUESTO PICCO NON SCOMPARE PER $N \to \infty$ MA VALE IL TEOREMA DI GIBBS

$H \to$ ALTEZZA PICCO

$$\left| H - f(x_0^+) \right| \sim 9\% \left| f(x_0^+) - f(x_0^-) \right|$$



PONE LIMITI ALLA RIPRODUCIBILITÀ GLOBALE DI UNA FUNZIONE NEI BORDI DI UN'IMMAGINE