SERIE NUMERICHE

prof. Antonio Greco

12-10-2018

Indice

Motivazioni 3
Definizione 3
Errore tipico 3
Un'osservazione utile 3
Condizione necessaria 4
Serie armonica 4
Serie geometrica
Definizione 5
Somma ridotta 5
Carattere 6
Achille e la tartaruga . . . 6
Serie a termini positivi 7
Assoluta convergenza 7
Criterio del confronto 7
Criterio del confronto asintotico 7
Criterio del rapporto 8
Criterio della radice 8
Serie esponenziale 8
$\lim_{k\to+\infty} x^k/k! = 0$ 8
Serie a termini di segno alterno 9
Criterio di Leibniz 9
Funzione ζ di Riemann 10
Controesempi su rapporto e radice 10

MOTIVAZIONI

Talvolta si è costretti, per la difficoltà del problema considerato, a ripiegare su di una soluzione approssimata. Questo capita, ad esempio, quando si deve calcolare il valore numerico di π.

Le serie consentono di esprimere rigorosamente certe approssimazioni.

Il calcolo di π è da secoli oggetto di studi approfonditi. In particolare, si attribuisce a Leibniz (1674) la scoperta che

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Nel 1997, invece, è stata scoperta la seguente formula:

$$\pi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{2}{8k+6} \right).$$

Ulteriori informazioni su questa ed altre formule simili si possono trovare sulla rivista "Notices of the American Mathematical Society" (www.ams.org/notices, agosto 2013, pag. 847).

Intuitivamente, la somma di una serie è la somma di infiniti termini.

I termini da sommare si possono indicare con la notazione a_k, dove l'indice k varia nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

DEFINIZIONE

Per definire la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \tag{1}$$

si considera la successione delle somme parziali S_n, dette anche "somme ridotte", date da

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

e si procede come segue. Se esiste finito il limite

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \tag{2}$$

si dice che la serie (1) è convergente, e la sua somma è il valore numerico del suddetto limite.

Se, invece, il limite (2) è $+\infty$ o $-\infty$, si dice che la serie (1) è divergente a $+\infty$ o a $-\infty$.

Se, infine, la successione delle somme ridotte S_n non ammette limite, si dice che la serie (1) è indeterminata.

L'ERRORE TIPICO

L'errore tipico del principiante è quello di confondere tra loro le due successioni in gioco: quella dei termini da sommare a_k, e quella delle somme ridotte S_n.

UN'OSSERVAZIONE UTILE

Il carattere di una serie (cioè il fatto di essere convergente, divergente o indeterminata) non muta se si cambia il valore numerico dei primi addendi!

COME RICAVARE a_n A PARTIRE DA S_n

Partendo dall'uguaglianza

$$S_n = a_0 + \cdots + a_n$$

e sottraendo da essa l'uguaglianza seguente:

$$S_{n-1} = a_0 + \cdots + a_{n-1}$$

si trova

$$S_n - S_{n-1} = a_n. \tag{3}$$

Dunque è possibile ritrovare gli addendi a_n conoscendo le somme parziali S_n.

UNA CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA

Condizione necessaria affinché la serie (1) converga, è che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0. \tag{4}$$

Infatti, se per ipotesi risulta

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

allora si ha anche

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S.$$

Di conseguenza, passando al limite nella (3), si ottiene la (4), come volevasi dimostrare.

La suddetta condizione non è sufficiente affinché la serie considerata converga.

Per dimostrarlo, basta esibire un controesempio, come quello costituito dalla cosiddetta serie armonica (vedere a lato).

SERIE ARMONICA

Si chiama serie armonica la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}.$$

La serie armonica è divergente perché

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} \\
&+ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}\right) \\
&+ \ \ldots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

La disuguaglianza si ottiene osservando che

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$

eccetera.

La dimostrazione del fatto che la serie armonica è divergente riportata sopra è attribuita ad Oresme (anno 1360): vedere Kline, Storia del pensiero matematico, Einaudi, vol. I, pag. 509.

SERIE GEOMETRICA

Si chiama "geometrica" la serie in cui ciascun termine (tranne il primo) si ottiene dal termine precedente moltiplicandolo per un numero fisso detto "ragione" e indicato solitamente con la lettera q.

L'espressione generale della serie geometrica è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_0\, q^k \qquad (5)$$

dove il primo termine a_0 può avere un qualunque valore fissato.

In particolare, se $a_0, q \neq 0$, i termini $a_k = a_0\, q^k$ sono diversi da zero e si constata che il rapporto tra due termini consecutivi vale

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_0\, q^{k+1}}{a_0\, q^k} = q.$$

La scelta della lettera q è dovuta al fatto che essa è l'iniziale della parola "quoziente".

Il termine "ragione" deriva invece dal latino "ratio", cioè rapporto.

SOMMA RIDOTTA DELLA SERIE GEOMETRICA

Lo studio esauriente della serie geometrica è possibile grazie alla seguente espressione della somma ridotta, valida per $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \qquad (6)$$

Per dimostrare la (6) basta moltiplicare ambo i membri per $1-q$. Svolgendo il prodotto

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$$

con la proprietà distributiva, si trova

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} \\ &= 1-q^{n+1}\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

CARATTERE DELLA SERIE GEOMETRICA

Se il primo termine a_0 è nullo, lo sono nulli anche tutti gli altri termini.

Applicando la definizione, si trova che la serie geometrica (5) converge e la sua somma è 0.

Se, invece, $a_0 \neq 0$, applicando la definizione si trova che il carattere della serie geometrica (5) è lo stesso della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k. \tag{7}$$

Ci concentriamo quindi su quest'ultima. Se $q = 1$, tutti i termini valgono 1 e la serie diverge a $+\infty$.

Se, invece, $q \neq 1$, possiamo usare la (6) ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{se } q \in (-1, 1) \\ +\infty & \text{se } q > 1 \end{cases}$$

mentre il limite non esiste se $q \leq -1$. Pertanto, se $q \in (-1, 1)$, la serie (7) converge e si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}. \tag{8}$$

Se, invece $q \geq 1$, la serie (7) diverge a $+\infty$. Se, infine $q \leq -1$, la serie (7) è indeterminata.

ACHILLE E LA TARTARUGA

Achille corre con velocità v_A verso una tartaruga, posta ad una distanza d_0 da lui. La tartaruga fugge con una velocità v_T. Essendo $v_T < v_A$, il rapporto $q = v_T/v_A$ è minore di 1.

Achille percorre la distanza d_0 impiegando il tempo $t_0 = d_0/v_A$. In tale lasso di tempo, la tartaruga percorre la distanza $d_1 = t_0\, v_T$, e cioè

$$d_1 = d_0\, q.$$

Successivamente Achille percorre la distanza d_1 impiegando il tempo $t_1 = d_1/v_A$. In tale lasso di tempo, la tartaruga percorre la distanza $d_2 = t_1\, v_T$, e cioè

$$d_2 = d_1\, q = d_0\, q^2.$$

Achille percorre dunque una successione di distanze d_k la cui espressione generale è

$$d_k = d_0\, q^k.$$

La somma di tutte le distanze è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} d_0\, q^k = d_0 \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{d_0}{1-q}.$$

Il tempo necessario ad Achille per percorrere la distanza d_k è

$$t_k = d_k/v_A = \frac{d_0}{v_A}\, q^k,$$

quindi la somma di tutti i tempi è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t_k = \frac{d_0}{v_A}\,\frac{1}{1-q} = \frac{d_0}{v_A - v_T}.$$

Questo è, infatti, il tempo necessario ad Achille per raggiungere la tartaruga.

SERIE A TERMINI POSITIVI

Le serie i cui termini sono tutti positivi, o almeno non negativi, non sono indeterminate.

Esse possono essere convergenti o divergere a $+\infty$.

Infatti, se $a_n \geq 0$ per ogni n, dalla (3) si ricava $S_{n+1} \geq S_n$, dunque la successione delle somme ridotte è monotona non decrescente.

La tesi segue dalla proprietà più importante (se proprio dobbiamo sceglierne una) dell'insieme dei numeri reali, che è la completezza: tutte le successioni monotone ammettono limite (finito o infinito).

ASSOLUTA CONVERGENZA

Si dice che la serie (1) è assolutamente convergente se la serie a termini non negativi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$$

è convergente.

Usando in modo opportuno la proprietà di completezza richiamata sopra, si dimostra che l'assoluta convergenza è una condizione sufficiente affinché la serie (1) converga.

Per verificare che l'assoluta convergenza non è necessaria per la convergenza semplice basta esibire un controesempio (vedere a pagina 9).

CRITERIO DEL CONFRONTO

Se risulta $0 \leq a_k \leq b_k$ per ogni k, e se la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

è convergente, allora lo è anche la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

L'enunciato discende dalla definizione di somma di una serie, usando il teorema del confronto per i limiti, e tenendo conto del fatto che le serie a termini non negativi non sono indeterminate.

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Due serie i cui termini (positivi) a_k e b_k sono tali che il rapporto a_k/b_k ammette limite finito $\ell > 0$ hanno lo stesso carattere.

Ciò segue dal criterio del confronto enunciato sopra. Infatti, per la definizione di limite, risulta

$$\frac{\ell}{2}\, b_k < a_k < 2\,\ell\, b_k$$

definitivamente, e perciò le serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ell}{2}\, b_k, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} 2\,\ell\, b_k$$

hanno lo stesso carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

CRITERIO DEL RAPPORTO

Consideriamo una serie i cui addendi a_k siano tutti positivi. Condizione sufficiente affinché la serie converga è che il limite

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \tag{9}$$

esista e sia minore di 1. Condizione sufficiente affinché la serie diverga a $+\infty$ è che il limite (9) esista e sia maggiore di 1 (anche $+\infty$).

CRITERIO DELLA RADICE

Consideriamo una serie i cui addendi a_k siano tutti non negativi. Condizione sufficiente affinché la serie converga è che il limite

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} \tag{10}$$

esista e sia minore di 1. Condizione sufficiente affinché la serie diverga a $+\infty$ è che il limite (10) esista e sia maggiore di 1 (anche $+\infty$).

COME DIMOSTRARE I CRITERI DEL RAPPORTO E DELLA RADICE

Si noti che, se la serie considerata è una serie geometrica, e cioè se $a_k = a_0\, q^k$, allora i limiti (9) e (10) valgono entrambi q.

Se, invece, la serie considerata non è geometrica, la si confronta con la serie geometrica la cui ragione q è il limite (9) o (10).

Se, infine, tale limite è maggiore di 1, la condizione necessaria per la convergenza non è soddisfatta, e la conclusione segue immediatamente.

SERIE ESPONENZIALE

Una delle serie più importanti è la serie di Maclaurin della funzione esponenziale e^x, e cioè

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{11}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, essa è una serie numerica il cui termine generale a_k è dato da

$$a_k = \frac{x^k}{k!}$$

pertanto il rapporto fra due termini consecutivi è

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{x^k} = \frac{x}{k+1}.$$

Poiché il limite (9) è nullo, la serie (11) converge qualunque sia $x \in \mathbb{R}$.

Usando la formula di Taylor con il resto di Lagrange, si può dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

UN LIMITE NOTEVOLE

Avendo dimostrato che la serie (11) converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, e ricordando che la condizione (4) è necessaria per la convergenza, concludiamo che

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x^k}{k!} = 0$$

qualunque sia $x \in \mathbb{R}$.

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO

Se i termini a_k sono tutti non negativi, la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, a_k \qquad (12)$$

si dice serie a termini di segno alterno.

CRITERIO DI LEIBNIZ

Condizione sufficiente affinché la serie (12) sia convergente è che i termini a_k costituiscano una successione monotona che tende a 0.

Lo si dimostra usando la completezza dell'insieme dei numeri reali.

Esempio: applicando il criterio di Leibniz, si trova che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

è convergente. La stessa serie non è assolutamente convergente perché la serie armonica non converge.

Applicando la formula di Taylor con il resto di Lagrange alla funzione logaritmica, si può dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\log 2.$$

FUNZIONE ZETA DI RIEMANN

La funzione

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$$

si può definire anche per valori complessi della x, ed è legata ad una famosa congettura.

In questa sede ci limitiamo a discutere il caso $x \in \mathbb{R}$.

Osserviamo, innanzitutto, che la serie diverge a $+\infty$ per $x \leq 1$ perché in tal caso si ha

$$\frac{1}{k^x} \geq \frac{1}{k}$$

e la serie armonica è divergente. Se, invece, $x > 1$, si può dimostrare che la serie converge. Si ha, infatti,

$$\frac{1}{k^x} \leq \frac{1}{t^x}$$

per ogni $t \in (k-1, k)$. Integrando ambo i membri in dt su tale intervallo si trova

$$\frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^x}$$

da cui, sommando su k per $k = 2, 3, 4, \ldots$ si ricava

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}.$$

L'integrale al secondo membro si calcola immediatamente, e vale

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{t^{1-x}}{1-x}\bigg]_{1}^{+\infty} = \frac{1}{x-1},$$

dunque la serie è convergente, come volevasi dimostrare.

PERCHÉ I CRITERI DEL RAPPORTO E DELLA RADICE NON SI APPLICANO SE I LIMITI (9) E (10) VALGONO 1?

Non si applicano perché sussistono dei controesempi. Infatti la serie armonica è divergente, mentre la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

è convergente (vedere a lato). In entrambi i casi, i limiti (9) e (10) valgono 1.

Dunque il fatto che tali limiti valgano 1 non dice nulla sulla convergenza della serie.