

Facoltà di SCIENZE
Anno Accademico 2019/20
Registro lezioni del docente GRECO ANTONIO

Attività didattica

ANALISI MATEMATICA 3 [SM/0027]

Periodo di svolgimento: *Secondo Semestre*

Docente titolare del corso: GRECO ANTONIO matr. 005969

Riepilogo registro docente:

GRECO ANTONIO matr. 005969

Docente interno - PROFESSORE ASSOCIATO

Stato registro docente: Bozza

Ore inserite: 80 ore

Ore previste dall'offerta didattica: 80 ore

Gruppi di studenti con i quali è stata svolta l'attività - ore per gruppo

- prevista per tutti gli studenti (senza gruppi associati) - 80 ore

Ore inserite per tipologia di attività

80 ore lezione :

- prevista per tutti gli studenti (senza gruppi associati) - 80 ore

Osservazioni:

Firma del docente titolare del corso:.....

Firma del presidente:.....

Data:.....

Dettaglio delle attività svolte:
ANALISI MATEMATICA 3 [SM/0027]

02/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:00

Ora fine: 16:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Presentazione del corso

Descrizione attività:

Obiettivi del corso. Contenuti. Libri di testo, di esercizi e di consultazione. Modalità d'esame. Cenni storici alle origini della teoria delle equazioni differenziali, con riferimento all'opera di Newton e di Cauchy.

02/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 16:00

Ora fine: 17:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie

Descrizione attività:

Definizione di equazione differenziale ordinaria. Forma normale. Soluzioni classiche. Problema ai valori iniziali, detto anche problema di Cauchy. Cenni alle equazioni alle derivate parziali. Esempi.

03/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Il teorema di Cauchy: introduzione

Descrizione attività:

Enunciato del teorema di esistenza e unicità in piccolo per il problema ai valori iniziali associato ad un'equazione del primo ordine in forma normale. Esempio illustrativo della non esistenza in grande, basato sull'equazione $y' = 1 + y^2$.

03/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni differenziali: esempi introduttivi

Descrizione attività:

Esempi illustrativi del concetto di equazione differenziale e di soluzione. Esempi illustrativi dell'importanza della forma normale dell'equazione differenziale ai fini della validità del teorema di Cauchy.

18/03/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 15:00**Ora fine:** 15:45**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Risoluzione di un semplice problema di Cauchy

Descrizione attività:

Risoluzione di un semplice problema ai valori iniziali (associato all'equazione $y'' = -g$, con g costante) con il tipico procedimento che consiste nel trovare innanzitutto l'integrale generale dell'equazione data, e successivamente determinare, attraverso la risoluzione di un sistema di equazioni algebriche, il valore dei parametri che compaiono nell'integrale generale.

18/03/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 15:45**Ora fine:** 16:30**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Le equazioni a variabili separabili

Descrizione attività:

Definizione delle equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili. Esempio: l'equazione $y' = y$. Soluzioni banali. Procedimento risolutivo per trovare, mediante integrazione, le soluzioni non banali. Cenni ai problemi al contorno associati alle equazioni del secondo ordine.

19/03/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 09:45**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Esempi scelti (1/2)

Descrizione attività:

Semplici applicazioni del procedimento risolutivo delle equazioni a variabili separabili per determinare l'integrale generale delle equazioni $y' = y$ e $y' = 1 + y^2$. Cenni alla notazione di Leibniz ed alla sua praticità per lo svolgimento dei calcoli.

19/03/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:45**Ora fine:** 10:30**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Esempi scelti (2/2)

Descrizione attività:

Ulteriori applicazioni del procedimento risolutivo delle equazioni a variabili separabili: l'equazione $y' = \lambda y$, con λ costante, e la sua interpretazione epidemiologica. Esistenza in grande delle soluzioni dell'equazione $y' = f(x)y$, con f continua, le quali si possono esprimere esplicitamente tramite una primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)$.

20/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:00

Ora fine: 15:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni in forma implicita

Descrizione attività:

Studio dettagliato di un'equazione del primo ordine in forma implicita (del tipo di Eulero), mirante a mettere in evidenza che il problema di Cauchy ad essa associato può essere ben posto o mal posto per mancanza di esistenza o di unicità della soluzione.

20/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:45

Ora fine: 16:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni lineari del primo ordine in forma normale

Descrizione attività:

Determinazione dell'integrale generale delle equazioni lineari del primo ordine in forma normale, a coefficienti continui.

Indicazioni bibliografiche, con riferimento al libro di testo.

24/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 09:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Problemi associati ad equazioni lineari del primo ordine

Descrizione attività:

Risoluzione di alcuni tipici problemi associati ad equazioni lineari del primo ordine, sia omogenee che non omogenee, talune a coefficienti costanti ed altre a coefficienti variabili.

24/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:45

Ora fine: 10:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Esistenza in grande per le equazioni lineari

Descrizione attività:

Richiami sul teorema di Cauchy che assicura l'esistenza e l'unicità (in piccolo) della soluzione del problema ai valori iniziali: enunciato generale.

Applicazione dell'enunciato ad un problema specifico, al fine di verificare il soddisfacimento delle ipotesi e contestualizzare la tesi.

Osservazione: l'integrale generale dell'equazione lineare del primo ordine, in forma normale, ottenuto nella lezione del 20 marzo, implica l'esistenza in grande.

25/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:00

Ora fine: 15:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Verifica formativa sulle equazioni differenziali

Descrizione attività:

Verifica formativa, svolta mediante un software per presentazioni interattive, e avente per oggetto alcune nozioni fondamentali, fra le quali: il problema ai valori iniziali, il teorema di Cauchy, ed il concetto di linearità/nonlinearità di un'equazione del primo ordine.

25/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:45

Ora fine: 16:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Introduzione ai sistemi del primo ordine

Descrizione attività:

Espressione vettoriale dei sistemi del primo ordine in forma normale, e del problema di Cauchy ad essi associato. Motivazione dell'argomento con riferimento alla modellizzazione matematica delle epidemie. Cenni al modello SIR.

26/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 09:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equivalenza tra un'equazione di ordine n , e un sistema di n equazioni

Descrizione attività:

Enunciato del teorema di esistenza e unicità in piccolo della soluzione (vettoriale) del problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale. Equivalenza di un'equazione differenziale di ordine n , in forma normale, con un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine in forma normale.

26/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:45

Ora fine: 10:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Introduzione alla teoria delle equazioni lineari

Descrizione attività:

Concetto di equazione differenziale lineare di ordine n . Omogeneità. Esempi semplici. Struttura dello spazio delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea (è uno spazio vettoriale). Cenni all'esistenza in grande per le equazioni lineari in forma normale e a coefficienti continui. Cenni al teorema di Peano.

27/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:00

Ora fine: 15:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Costruzione di una base di soluzioni

Descrizione attività:

Costruzione di una base di soluzioni per una data equazione lineare omogenea, in forma normale e a coefficienti continui. Verifica della indipendenza lineare degli elementi di base. Cenni al teorema del wronskiano. Espressione dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare, omogenea, in forma normale e a coefficienti continui.

27/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:45

Ora fine: 16:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti

Descrizione attività:

Individuazione di una base dello spazio vettoriale delle soluzioni di una data equazione differenziale lineare, omogenea, a coefficienti costanti, a partire dalle soluzioni dell'equazione caratteristica, con particolare riguardo per il caso in cui le soluzioni di quest'ultima sono reali e a due a due distinte. Determinazione dell'integrale generale di semplici equazioni del secondo ordine: $y'' = -y$ e $y'' = y'$.

31/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 09:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Risoluzione di problemi associati ed equazioni differenziali

Descrizione attività:

Risoluzione di semplici problemi associati ed equazioni differenziali: ricerca dell'integrale generale dell'equazione $y'' = y$; risoluzione di un problema di Cauchy associato all'equazione $y'' + 16y = 0$; studio dell'indipendenza lineare di due funzioni esponenziali, anche mediante il calcolo del determinante wronskiano.

31/03/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:45

Ora fine: 10:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Soluzioni multiple dell'equazione caratteristica

Descrizione attività:

Verifica, mediante la formula di Leibniz per la derivata di un prodotto, del fatto che la funzione $x e^{(\lambda x)}$ soddisfa un'equazione differenziale lineare, omogenea, a coefficienti costanti, della quale λ sia una soluzione di molteplicità (almeno) due.

Espressione alternativa dell'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' = -\omega^2 y$ sotto la forma $y(x) = A \sin(\omega x + \phi)$.

01/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:00

Ora fine: 12:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni omogenee del secondo ordine

Descrizione attività:

Applicazione dei risultati teorici, validi per le equazioni di ordine qualunque, al caso particolare delle equazioni differenziali lineari, omogenee, del secondo ordine, a coefficienti costanti, la cui risoluzione si può condurre esplicitamente.

Interpretazione fisica, riferita al problema dell'oscillatore armonico con eventuale presenza di attrito. Visualizzazione di alcune situazioni particolarmente significative mediante brevi animazioni.

01/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:45

Ora fine: 13:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni non omogenee

Descrizione attività:

Relazione fondamentale fra l'integrale generale di un'equazione lineare, a coefficienti continui, non omogenea, in forma normale, con l'integrale generale dell'equazione omogenea ad essa associata. Il problema della determinazione di una soluzione particolare: semplici esempi riferiti al metodo di somiglianza.

02/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 09:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Il metodo della variazione delle costanti

Descrizione attività:

Esposizione del metodo della variazione delle costanti arbitrarie per la determinazione dell'integrale generale delle equazioni lineari non omogenee.

02/04/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:45**Ora fine:** 10:30**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Applicazioni

Descrizione attività:

Semplici esempi illustrativi dei metodi per la determinazione dell'integrale generale di un'equazione lineare non omogenea: metodo di somiglianza, e metodo della variazione delle costanti, con riferimento all'equazione $z'' = -z + \sin(\omega x)$. Cenni all'interpretazione fisica.

03/04/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 15:00**Ora fine:** 15:45**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Equazioni del tipo di Eulero

Descrizione attività:

Cenni alle equazioni del tipo di Eulero, e alla possibilità di ricondurle ad equazioni a coefficienti costanti mediante un opportuno cambiamento di variabile.

Applicazione all'equazione $xy' = y$, già risolta per altra via nella lezione del 20/03/2020.

Riepilogo sulla teoria delle equazioni differenziali lineari, con precisi riferimenti al libro di testo.

03/04/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 15:45**Ora fine:** 16:30**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

La condizione di Lipschitz

Descrizione attività:

Svolgimento di una breve verifica formativa, avente per oggetto le equazioni differenziali lineari del secondo ordine, somministrata mediante un software per presentazioni interattive.

Concetto di funzione lipschitziana. Esempi in una variabile, inclusa la funzione $f(y) = |y|$. La continuità della derivata implica la locale lipschitzianità: dimostrazione. Importanza della condizione di Lipschitz nel teorema di esistenza e unicità in piccolo della soluzione del problema ai valori iniziali.

07/04/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 09:45**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Unicità in grande per il problema di Cauchy

Descrizione attività:

Dimostrazione del teorema di unicità in grande della soluzione del problema di Cauchy, svolta utilizzando la condizione di Lipschitz.

07/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:45

Ora fine: 10:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Studio di una successione di funzioni

Descrizione attività:

Studio di una successione di funzioni, definite per ricorrenza, che converge alla soluzione dell'equazione $y' = y$ soddisfacente la condizione $y(0) = 1$.

Semplice utilizzo di un software libero per il calcolo simbolico delle soluzioni di problemi associati ad equazioni differenziali.

Interpretazione grafica delle equazioni differenziali del primo ordine in forma normale.

08/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:00

Ora fine: 12:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Esistenza in piccolo: definizione di una successione approssimante

Descrizione attività:

Definizione ricorsiva di una opportuna successione di funzioni, il cui limite, come si vedrà nella prossima lezione, è una soluzione del problema ai valori iniziali. Studio della buona positura di tale definizione. Precisazione dell'intervallo di esistenza mediante la definizione del raggio (indicato con la lettera delta) di tale intervallo.

08/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:45

Ora fine: 13:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Dimostrazione del teorema di esistenza in piccolo

Descrizione attività:

Enunciato del criterio di Cauchy per le successioni numeriche, e dimostrazione della convergenza (puntuale) della successione introdotta nella lezione precedente.

Definizione della convergenza uniforme di una successione di funzioni. La successione di cui sopra converge uniformemente: enunciato.

Principali proprietà della convergenza uniforme (cenni): la convergenza uniforme conserva la continuità, e consente di passare al limite sotto il segno di integrale.

Conclusione della dimostrazione del teorema di esistenza in piccolo.

15/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:00

Ora fine: 12:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

La convergenza uniforme

Descrizione attività:

Studio della convergenza della successione $y_k(x) = x^k$, che converge a zero uniformemente su ogni intervallo della forma $(0, b)$ con b in $(0, 1)$, e non converge uniformemente sull'intervallo $(0, 1)$.

Illustrazione delle proprietà di tale successione mediante rappresentazioni grafiche interattive.

15/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:45

Ora fine: 13:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Descrizione attività:

La convergenza uniforme, insieme alla continuità delle funzioni integrande, è una condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché si possa passare al limite sotto il segno di integrale quando l'intervallo di integrazione è chiuso e limitato: dimostrazione.

16/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:00

Ora fine: 12:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Continuità del limite uniforme

Descrizione attività:

Dimostrazione della continuità della funzione $y(x)$, limite uniforme di una successione di funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato.

Dimostrazione, mediante la costruzione di un semplice controesempio, del fatto che la convergenza uniforme non consente di passare al limite sotto il segno di integrale quando l'intervallo di integrazione è illimitato.

16/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:45

Ora fine: 13:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Studio delle funzioni $f_k(x) = kx e^{-kx^2}$

Descrizione attività:

Studio della successione delle funzioni date da $f_k(x) = kx e^{-kx^2}$, spesso utilizzata dai libri di testo per illustrare l'insufficienza della sola convergenza puntuale ai fini del passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Osservazione: le funzioni $y_k(x) = kx^{k-1}$ possono essere validamente utilizzate con la stessa finalità.

Dimostrazione del fatto che la convergenza puntuale su di un insieme con un numero finito di elementi è convergenza uniforme.

17/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:00

Ora fine: 15:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Il criterio di Cauchy uniforme

Descrizione attività:

Enunciato del criterio di Cauchy uniforme, e dimostrazione a partire dal criterio di Cauchy per le successioni numeriche (enunciato a sua volta nella lezione del 08/04/2020).

Osservazione: la convergenza puntuale, non uniforme, su di un intervallo $(a,b]$ non può diventare uniforme scartando l'estremo b .

17/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:45

Ora fine: 16:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Derivabilità della funzione limite

Descrizione attività:

Dimostrazione, mediante la costruzione di un opportuno controesempio, del fatto che la convergenza uniforme di una successione di funzioni derivabili y_k non garantisce la derivabilità della funzione limite.

Dimostrazione del fatto che la funzione limite è derivabile sotto l'ipotesi aggiuntiva che le derivate y'_k siano continue e convergano uniformemente.

21/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 09:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Passaggio al limite per gli integrali impropri

Descrizione attività:

Richiami sugli integrali impropri (detti anche integrali generalizzati) di Riemann.

Risoluzione di alcuni problemi riguardanti il passaggio al limite sotto il segno di integrale per gli integrali impropri. Si conclude che la convergenza uniforme non è una condizione sufficiente a tale scopo.

Indicazioni bibliografiche, riferite al testo adottato, sulle successioni di funzioni.

21/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:45

Ora fine: 10:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Verifica formativa sulle successioni di funzioni

Descrizione attività:

Svolgimento e discussione di una verifica formativa avente per oggetto le successioni di funzioni (e in particolare la convergenza e le proprietà della funzione limite) e l'integrabilità in senso improprio.

La verifica si è svolta mediante l'utilizzo di un software per presentazioni interattive.

22/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:00

Ora fine: 12:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Serie di funzioni

Descrizione attività:

Definizione della convergenza puntuale, della convergenza uniforme e della convergenza totale di una serie di funzioni.

La convergenza totale implica la convergenza uniforme (enunciato).

22/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:45

Ora fine: 13:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

La serie esponenziale

Descrizione attività:

Dimostrazione della convergenza della serie esponenziale alla funzione e^x . Illustrazione del risultato mediante una rappresentazione grafica animata.

Cenni alle serie di Maclaurin delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$.

23/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 09:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Integrazione per serie

Descrizione attività:

Definizione della convergenza localmente uniforme sull'asse reale. Dimostrazione del fatto che la serie esponenziale converge localmente uniformemente, ma non uniformemente sull'asse reale.

Enunciato del teorema di integrazione per serie, e applicazione al calcolo dell'integrale degli errori.

23/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:45

Ora fine: 10:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

L'esponenziale nel campo complesso

Descrizione attività:

Definizione della convergenza di una successione a termini complessi. Completezza del campo dei numeri complessi (enunciato).

Serie a termini complessi. La convergenza assoluta di una serie implica la convergenza semplice (enunciato). Per le serie assolutamente convergenti vale la proprietà commutativa (enunciato).

Definizione della funzione esponenziale $\exp(z)$ con z appartenente al campo dei numeri complessi.

Dimostrazione dell'identità di Eulero: $\exp(i t) = \cos t + i \sin t$.

24/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:00

Ora fine: 15:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Convergenza delle serie di potenze

Descrizione attività:

Illustrazione del carattere delle serie di potenze. Intervallo di convergenza. Convergenza uniforme in tutti gli intervalli chiusi inclusi nell'intervallo aperto di convergenza.

24/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:45

Ora fine: 16:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Derivazione termine a termine

Descrizione attività:

Enunciato del teorema di derivazione termine a termine. Applicazione alle serie di potenze. Cenni alle funzioni analitiche.

Espressione del raggio di convergenza di una serie di potenze, di coefficienti a_k , a partire dal limite del rapporto $|a_k|/|a_{k+1}|$ e dal limite della radice k -esima di $|a_k|$.

29/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:00

Ora fine: 12:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

La serie logaritmica

Descrizione attività:

Studio dettagliato della serie di Maclaurin della funzione $f(x) = -\log(1-x)$, inclusa la determinazione dell'intervallo di convergenza, e la dimostrazione della convergenza della serie alla funzione generatrice.

29/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:45

Ora fine: 13:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Introduzione alle serie di Fourier

Descrizione attività:

Brevi cenni alle origini delle serie di Fourier, con riferimento all'opera "Théorie analytique de la chaleur" (1822) e all'equazione del calore.

Analogia fra il procedimento risolutivo di quest'ultima equazione e quello delle equazioni differenziali ordinarie, lineari.

30/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 09:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Relazioni di ortogonalità

Descrizione attività:

Illustrazione delle relazioni di ortogonalità che sussistono fra le funzioni $\cos kx$ e $\sin hx$ sull'intervallo $(-\pi, \pi)$.

Espressione del prodotto $\cos x \sin y$ come differenza di seni (formula di Werner).

Integrazione di una funzione dispari, ovvero di una funzione pari, su di un intervallo simmetrico rispetto all'origine. Disparità della funzione $f(x) = g(x)h(x)$, prodotto di una funzione pari g per una funzione dispari h .

30/04/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:45

Ora fine: 10:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Condizione necessaria per la convergenza uniforme

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che la funzione f deve essere continua, ed i coefficienti a_k, b_k devono necessariamente avere l'espressione indicata da Fourier, affinché una serie trigonometrica converga uniformemente ad f sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.

05/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 09:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Sviluppo di Fourier di una funzione data

Descrizione attività:

Esempio illustrativo della determinazione della serie di Fourier associata ad una funzione data, con particolare riferimento alla funzione $f(x) = x/2$.

05/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:45

Ora fine: 10:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Convergenza uniforme della serie di Fourier

Descrizione attività:

Una condizione sufficiente affinché la serie di Fourier di una funzione data $f(x)$ converga uniformemente alla funzione generatrice: esistenza e continuità della derivata $f'(x)$ nell'intervallo chiuso $[-\pi, \pi]$, più l'uguaglianza dei valori di $f(x)$ agli estremi dell'intervallo.

Cenni al teorema di Fejér e alla convergenza nel senso di Cesàro.

06/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:00

Ora fine: 12:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Convergenza puntuale della serie di Fourier

Descrizione attività:

Funzioni regolari a tratti.

La serie di Fourier di una funzione f , continua, regolare a tratti, e avente lo stesso valore agli estremi dell'intervallo $[-\pi, \pi]$, converge uniformemente alla funzione generatrice: enunciato, esempi.

La serie di Fourier di una funzione f , regolare a tratti, converge in ciascun punto x , interno all'intervallo $(-\pi, \pi)$, alla media aritmetica tra $f(x+)$ e $f(x-)$, e, negli estremi del suddetto intervallo, converge alla media aritmetica tra $f((-\pi)^+)$ e $f(\pi^-)$ (enunciato).

06/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:45

Ora fine: 13:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Uguaglianza di Parseval. Disuguaglianza di Bessel

Descrizione attività:

Funzioni continue a tratti.

Enunciato dell'uguaglianza di Parseval per le funzioni continue a tratti.

Enunciato e dimostrazione della disuguaglianza di Bessel per le funzioni continue a tratti.

07/05/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 09:45**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Teorema di Riemann

Descrizione attività:

Enunciato e dimostrazione del teorema di Riemann: i coefficienti di Fourier a_k e b_k di una funzione continua a tratti tendono a zero quando k tende all'infinito.

Dimostrazione del teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier enunciato nella lezione del 6 maggio 2020.

07/05/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:45**Ora fine:** 10:30**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Spazi metrici

Descrizione attività:

Illustrazione di alcuni esempi ai quali si può applicare il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier.

Indicazioni sugli obiettivi da perseguire nello studio di un qualunque teorema: saperne riconoscere l'applicabilità, di fronte a un caso specifico, e saperne utilizzare le conseguenze.

Definizione di spazio metrico. Cenni storici sulle origini della definizione. Esempi: l'insieme dei numeri reali con la metrica canonica, e l'insieme $C([a,b])$ della funzioni continue, aventi per dominio un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, con la metrica del massimo.

08/05/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 15:00**Ora fine:** 15:45**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Limiti in uno spazio metrico

Descrizione attività:

Definizione di limite di una successione di elementi di uno spazio metrico. Osservazione: la suddetta definizione inquadra in una cornice unitaria sia la convergenza delle successioni numeriche, che la convergenza uniforme delle successioni di funzioni.

Indicazioni bibliografiche, riferite al libro di testo, sulla teoria delle serie di funzioni.

08/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:45

Ora fine: 16:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

La completezza di uno spazio metrico

Descrizione attività:

Nozione di successione fondamentale, detta anche successione di Cauchy, in uno spazio metrico. Dimostrazione del fatto che tutte le successioni convergenti, in un qualunque spazio metrico, sono successioni fondamentali.

Richiami sulla proprietà di completezza dell'insieme dei numeri reali.

Definizione della completezza di uno spazio metrico. Esempio: lo spazio di Lagrange $C([a,b])$ è completo, in virtù del criterio di Cauchy uniforme (enunciato e dimostrato nella lezione del 17 aprile).

Enunciato del teorema delle contrazioni (il teorema verrà dimostrato nella lezione del 12 maggio).

12/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 09:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Semplici contrazioni in una variabile

Descrizione attività:

Studio di alcune funzioni di una variabile reale mirante a stabilire quali di esse sono contrazioni e quali non lo sono, al fine di chiarire tale concetto.

12/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:45

Ora fine: 10:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Dimostrazione del teorema delle contrazioni

Descrizione attività:

Dimostrazione della continuità delle funzioni lipschitziane aventi per dominio un qualunque spazio metrico.

Dimostrazione del teorema delle contrazioni (teorema di Banach-Caccioppoli), già enunciato nella lezione di venerdì 8 maggio.

13/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:00

Ora fine: 12:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Applicazione del teorema delle contrazioni

Descrizione attività:

Applicazione del teorema delle contrazioni alla dimostrazione del teorema di esistenza e unicità in piccolo del problema ai valori iniziali associato ad un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale.

Nozione di spazio vettoriale normato: le proprietà formali della norma. Definizione della distanza a partire dalla norma: gli spazi vettoriali normati sono spazi metrici.

13/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:45

Ora fine: 13:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Spazi di Banach

Descrizione attività:

Definizione di limite in uno spazio vettoriale normato. Successioni fondamentali, completezza di uno spazio vettoriale normato: nozione di spazio di Banach.

I più semplici spazi di Banach: lo spazio euclideo (finito-dimensionale) \mathbb{R}^n ; gli spazi di Lagrange (infinito-dimensionali) $C^k([a,b])$. Norma canonica dei suddetti spazi. Le norme-p in \mathbb{R}^n .

Concetto di equivalenza fra norme. Equivalenza di tutte le norme su \mathbb{R}^n (enunciato).

Cenni alla norma ed al prodotto scalare di L^2 , nonché al concetto di spazio di Hilbert.

14/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 09:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Esempio di contrazione in dimensione infinita

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che l'applicazione F introdotta nella lezione del 13/05, al fine di dimostrare il teorema di Cauchy, è una contrazione sullo spazio metrico $C([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ a condizione che il raggio δ sia sufficientemente piccolo.

Indicazioni bibliografiche, riferite al libro di testo, riguardanti la teoria degli spazi metrici e degli spazi vettoriali normati.

14/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:45

Ora fine: 10:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Tipici problemi di teoria della misura e dell'integrazione

Descrizione attività:

Introduzione alla teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue:

- 1) definizione della spugna di Menger;
- 2) il problema della determinazione della misura di luoghi geometrici poco regolari;
- 3) il problema del passaggio al limite sotto il segno di integrale quando la convergenza delle funzioni integrande non è uniforme, o quando l'intervallo di integrazione è illimitato.

15/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:00

Ora fine: 15:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Origini e finalità della teoria della misura

Descrizione attività:

Origini e finalità della teoria della misura. Definizione dell'insieme di Cantor. Dipendenza della misura dalla dimensione. Cenni alla stima dell'area del cerchio fatta da Archimede di Siracusa. Intervalli multidimensionali e loro misura.

15/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:45

Ora fine: 16:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Misura di Peano-Jordan

Descrizione attività:

Plurintervalli in \mathbb{R}^n e loro misura. Definizione della misura interna e della misura esterna secondo Peano-Jordan di un insieme limitato in \mathbb{R}^n .

Dimostrazione del fatto che la misura interna di un insieme dato non supera quella esterna.

Definizione della misurabilità di un insieme limitato in \mathbb{R}^n .

Dimostrazione del fatto che l'insieme dei punti dell'intervallo $[0,1]$ di ascissa razionale non è misurabile secondo Peano-Jordan.

19/05/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 09:45**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Un insieme non numerabile e di misura nulla

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che la spugna di Menger ha misura nulla secondo Peano-Jordan.

Relazione fra l'integrale di Riemann e la misura di Peano-Jordan: la misura di un insieme E coincide con l'integrale della funzione caratteristica di E .**19/05/2020 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:45**Ora fine:** 10:30**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

La sigma-algebra dei boreliani

Descrizione attività:Nozione di sigma-algebra di sottoinsiemi dello spazio euclideo \mathbb{R}^n .Definizione della sigma-algebra degli insiemi boreliani. Esempio: l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali è un insieme boreliano.Dimostrazione dell'esistenza di sottoinsiemi dell'insieme \mathbb{R} dei numeri reali che non sono boreliani (in quanto la famiglia dei boreliani ha la cardinalità del continuo).**20/05/2020 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 12:00**Ora fine:** 12:45**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Spazi mensurali

Descrizione attività:Nozione di spazio mensurale. Esempi di misure m sulla retta per le quali $m([a,b])$ differisce, in generale, da $b-a$: la misura gaussiana e la misura di Dirac.La definizione di Lebesgue della misura esterna e della misura interna di un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n . Misura di un insieme limitato. Cenni all'esistenza di un insieme non misurabile.

20/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:45

Ora fine: 13:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Definizione della misura di Lebesgue

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che la misura interna di un insieme limitato, così come definita da Lebesgue, non supera la misura esterna.

Illustrazione di una delle riformulazioni della costruzione della misura di Lebesgue più utilizzate ai nostri giorni: misura degli insiemi aperti, degli insiemi chiusi e limitati, ridefinizione della misura interna e della misura esterna degli insiemi limitati.

Dimostrazione del fatto che gli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan sono misurabili anche secondo Lebesgue, e le due misure coincidono.

21/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 09:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Numerabile additività, e continuità della misura

Descrizione attività:

Rassegna delle principali proprietà della misura di Lebesgue, e, in particolare: additività numerabile, completezza della misura di Lebesgue, monotonia rispetto all'inclusione insiemistica, misurabilità della differenza insiemistica, continuità della misura.

21/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:45

Ora fine: 10:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Motivazioni del concetto di funzione misurabile

Descrizione attività:

Cenni alla definizione dell'integrale di Lebesgue di una funzione limitata avente per dominio un intervallo limitato, così come formulata dall'autore (1902), miranti a mettere in evidenza la necessità della misurabilità della funzione integranda.

22/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:00

Ora fine: 15:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Integrabilità secondo Lebesgue

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che una funzione limitata avente per dominio un intervallo limitato è integrabile secondo Lebesgue se e solo se è misurabile.

Tutte le funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili secondo Lebesgue (enunciato).

Non vale il viceversa: infatti la funzione caratteristica dell'insieme dei numeri razionali, che non è integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[0,1]$, è misurabile, e quindi è integrabile secondo Lebesgue.

22/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:45

Ora fine: 16:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Formulazioni equivalenti del concetto di funzione misurabile

Descrizione attività:

Alcune formulazioni equivalenti del concetto di funzione misurabile, e idea della dimostrazione dell'equivalenza.

Funzioni che differiscono su di un insieme di misura nulla hanno lo stesso integrale di Lebesgue (enunciato). Applicazione al calcolo dell'integrale della funzione caratteristica dell'insieme dei numeri razionali.

26/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 09:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Misurabilità della funzione limite

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che la funzione limite (puntuale) di una successione monotona di funzioni misurabili è a sua volta una funzione misurabile.

Espressione della definizione di limite mediante operazioni insiemistiche.

Dimostrazione della misurabilità delle funzioni continue.

26/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:45

Ora fine: 10:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Ulteriori proprietà delle funzioni misurabili

Descrizione attività:

Misurabilità della somma, della differenza, del prodotto e del rapporto di due funzioni misurabili (enunciato).

Dimostrazione della misurabilità della funzione composta $f(g(x))$, con f continua e g misurabile.

Dimostrazione del fatto che la funzione limite di una successione di funzioni misurabili è a sua volta una funzione misurabile, anche qualora la successione data non sia monotona. Il risultato vale anche quando la successione data converge quasi ovunque.

Dimostrazione della misurabilità della derivata f' di una funzione f , derivabile in un intervallo (a,b) .

27/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:00

Ora fine: 12:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

L'integrale di Lebesgue

Descrizione attività:

Funzioni semplici, e integrazione delle funzioni semplici non negative. Parte positiva e parte negativa di una funzione data.

Definizione dell'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile; nozione di funzione integrabile e di funzione sommabile.

Proprietà dell'integrale di Lebesgue: linearità, monotonia.

27/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 12:45

Ora fine: 13:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Teorema della convergenza monotona e della convergenza dominata

Descrizione attività:

Ulteriori proprietà dell'integrale di Lebesgue: disuguaglianza triangolare, numerabile additività.

Enunciato del teorema della convergenza monotona. La dimostrazione sarà svolta nella lezione del 29 maggio.

Enunciato del teorema della convergenza dominata. Lo schema della dimostrazione sarà indicato nella lezione del 28 maggio.

28/05/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 09:45**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Lemma di Fatou

Descrizione attività:

Dimostrazione del lemma di Fatou a partire dal teorema della convergenza monotona.

Cenni alla dimostrazione del teorema della convergenza dominata a partire dal lemma di Fatou.

Deduzione del teorema della convergenza limitata da quello della convergenza dominata.

28/05/2020 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:45**Ora fine:** 10:30**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Esempi di integrazione secondo Lebesgue

Descrizione attività:Rassegna di semplici esempi illustrativi del calcolo di integrali nel senso di Lebesgue, e dell'uso dei teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. In particolare: integrale di x^k sull'intervallo $(0,1)$, integrale di $1/x^2$ e di $\sin x$ su di un intervallo illimitato.**29/05/2020 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 15:00**Ora fine:** 15:45**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Derivazione sotto il segno di integrale

Descrizione attività:

Cenni alle funzioni definite mediante integrali dipendenti da un parametro, con menzione della trasformata di Fourier, trasformata di Laplace, funzione caratteristica di una variabile aleatoria, funzione gamma.

Dimostrazione, mediante il teorema della convergenza dominata, di un teorema di derivazione sotto il segno di integrale, con riferimento ai testi di E. Giusti e di C. D. Pagani e S. Salsa.

Interpretazione geometrica dell'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile e non negativa.

29/05/2020 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 15:45

Ora fine: 16:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Teoremi di Fubini e di Tonelli

Descrizione attività:

Enunciato dei teoremi di Fubini e di Tonelli per la riduzione di un integrale doppio a due integrali semplici.

Uso del teorema di Tonelli, applicato alla funzione $|f|$, per stabilire la sommabilità di una funzione f di segno variabile.

Dimostrazione del teorema della convergenza monotona a partire dall'interpretazione geometrica dell'integrale di Lebesgue e dalla proprietà di continuità della misura.
