

**Facoltà di SCIENZE**  
**Anno Accademico 2018/19**  
**Registro lezioni del docente GRECO ANTONIO**

**Attività didattica**

---

**ANALISI MATEMATICA 3 [SM/0027]**

**Periodo di svolgimento:** *Secondo Semestre*

**Docente titolare del corso:** GRECO ANTONIO matr. 005969

**Riepilogo registro docente:**

---

**GRECO ANTONIO** matr. 005969

Docente interno - PROFESSORE ASSOCIATO

**Stato registro docente:** Bozza

**Ore inserite:** 80 ore

**Ore previste dall'offerta didattica:** 80 ore

**Gruppi di studenti con i quali è stata svolta l'attività - ore per gruppo**

- prevista per tutti gli studenti (senza gruppi associati) - 80 ore

**Ore inserite per tipologia di attività**

80 ore lezione :

- prevista per tutti gli studenti (senza gruppi associati) - 80 ore

**Osservazioni:**

Firma del docente titolare del corso:.....

Firma del presidente:.....

Data:.....

**Dettaglio delle attività svolte:**  
**ANALISI MATEMATICA 3 [SM/0027]**

**05/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 09:00

**Ora fine:** 10:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Presentazione del corso

**Descrizione attività:**

Illustrazione delle caratteristiche del corso con riferimento diretto alla scheda insegnamento: obiettivi, prerequisiti, contenuti, modalità di verifica dell'apprendimento, testo adottato, testi di esercizi e di consultazione.

Motivazioni della introduzione delle equazioni differenziali nella storia della matematica, con riferimento alla modellizzazione di problemi della meccanica ed al cosiddetto problema inverso delle tangenti.

---

**05/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 10:00

**Ora fine:** 11:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Introduzioni alle equazioni differenziali

**Descrizione attività:**

Definizioni ed esempi di equazioni differenziali, in forma normale e non normale, ordine di un'equazione differenziale, integrale generale, problema di Cauchy per le equazioni del primo ordine.

---

**07/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Problem-solving session sulle definizioni principali

**Descrizione attività:**

Presentazione e risoluzione di problemi associati ad equazioni differenziali, miranti a chiarire le definizioni principali. Richiami sulle funzioni a derivata nulla. Determinazione di soluzioni particolari dell'equazione  $y'' = -y$ . Integrale generale di tale equazione (solo enunciato).

---

**07/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Equazioni a variabili separabili (1/2). La funzione a gradino di Heaviside

**Descrizione attività:**

Nozione di equazione a variabili separabili. Il caso particolare  $y'(x) = f(x)$  e la sua relazione con il problema dell'integrazione indefinita. Risoluzione completa dell'equazione  $y'(x) = f(x)$  sotto l'ipotesi della continuità del secondo membro. Illustrazione dell'importanza di tale ipotesi, con specifico riferimento al caso in cui  $f(x)$  è la funzione a gradino di Heaviside.

---

**08/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Equazioni a variabili separabili (2/2)

**Descrizione attività:**

Illustrazione del metodo risolutivo delle equazioni del primo ordine a variabili separabili, e sua giustificazione teorica. Applicazione all'equazione  $y' = y^2$ .

---

**08/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Problem-solving session sulle equazioni a variabili separabili. Il problema di Cauchy

**Descrizione attività:**

Determinazione dell'integrale generale dell'equazione differenziale  $y' = y$  mediante separazione delle variabili. Determinazione dell'integrale generale dell'equazione differenziale  $y'' = y'$  mediante la sostituzione  $z = y'$ .

Presentazione generale del problema di Cauchy associato ad un'equazione di ordine  $n$  in forma normale. Soluzione di un semplice problema di Cauchy legato al fenomeno fisico della caduta dei gravi.

---

**11/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 15:00

**Ora fine:** 16:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Problem-solving session sul problema di Cauchy (1/2)

**Descrizione attività:**

Discussione di alcuni problemi di Cauchy finalizzata a mettere in evidenza il fatto che, a seconda delle condizioni, il problema possa ammettere un'unica soluzione, infinite soluzioni, o nessuna soluzione.

---

**11/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 16:00

**Ora fine:** 17:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Presentazione del teorema di Cauchy

**Descrizione attività:**

Enunciato del teorema di esistenza e unicità in piccolo della soluzione del problema ai valori iniziali associato da un'equazione del primo ordine in forma normale, senza precisare una stima dell'ampiezza dell'intervallo di esistenza. Alcuni semplici esempi ai quali il teorema si può applicare, e altri ai quali non si applica.

---

**12/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 09:00

**Ora fine:** 10:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Interpretazione geometrica dell'equazione  $y' = f(x,y)$

**Descrizione attività:**

Risoluzione di un'equazione a variabili separabili tratta dal testo di M. Bramanti, C.D. Pagani e S. Salsa. Illustrazione di un'interpretazione geometrica dell'equazione differenziale  $y' = f(x,y)$ : cenni al concetto di campo di direzioni. Estensione alla direzione dell'asse  $y$  mediante l'uso di un'equazione differenziale la cui incognita è una funzione  $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$  a valori vettoriali.

---

**12/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 10:00

**Ora fine:** 11:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Equazioni lineari del primo ordine

**Descrizione attività:**

Presentazione generale delle equazioni differenziali lineari di ordine  $n$ . Concetto di equazione omogenea. Esempi e controesempi. Formula risolutiva delle equazioni differenziali lineari del primo ordine, in forma normale, a coefficienti continui.

---

**14/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Problem-solving session sulle equazioni lineari del primo ordine in forma normale (1/2)

**Descrizione attività:**

Risoluzione dettagliata di una semplice equazione differenziale lineare omogenea, del primo ordine, in forma normale e a coefficienti costanti. Richiami sugli obiettivi formativi del corso, e sulle modalità di valutazione, con specifico riferimento alla teoria delle equazioni differenziali.

---

**14/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Introduzione alla teoria delle equazioni lineari omogenee di ordine  $n$

**Descrizione attività:**

Introduzione alla teoria delle equazioni lineari omogenee di ordine  $n$ . Principio di sovrapposizione: se  $y_1$  e  $y_2$  sono soluzioni, allora anche  $z = A y_1 + B y_2$  lo è, comunque si prendano le costanti  $A$  e  $B$  (dimostrazione). Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti. Equazione caratteristica: per ogni soluzione  $\lambda$  dell'equazione caratteristica, la funzione  $y(x) = e^{\lambda x}$  è una soluzione dell'equazione differenziale data (dimostrazione).

---

**15/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Problem-solving session sulle equazioni lineari del primo ordine in forma normale (2/2)

**Descrizione attività:**

Risoluzione di equazioni differenziali lineari non omogenee del primo ordine, in forma normale e a coefficienti continui. Risoluzione di problemi ai valori iniziali associati ad equazioni del tipo suddetto. Rappresentazione grafica dell'insieme delle soluzioni.

---

**15/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Computer Algebra Systems

**Descrizione attività:**

Cenni ad alcuni dei più popolari CAS (Computer Algebra Systems) e alla loro sintassi. Uso del CAS "wxMaxima" per la risoluzione in forma chiusa di alcune equazioni differenziali, e del problema di Cauchy ad esse associato. Distinzione tra esercizi intesi in senso stretto (detti anche esercizi di routine) e problemi, e loro rispettiva utilità nel raggiungimento degli obiettivi formativi del corso. Cenni alle equazioni alle derivate parziali.

---

**18/03/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 15:00**Ora fine:** 16:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Problem-solving session sul problema di Cauchy (2/2)

**Descrizione attività:**

Presentazione e risoluzione di problemi di Cauchy associati ad equazioni del primo e del secondo ordine, lineari e non lineari. Rappresentazione grafica dell'insieme delle soluzioni, e interpretazione grafica della condizione iniziale. Dimostrazione dell'uguaglianza tra l'insieme delle funzioni aventi la forma  $A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$  e l'insieme delle funzioni aventi la forma  $C \cos(\omega x + \phi)$ .

---

**18/03/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 16:00**Ora fine:** 17:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**Equazioni lineari omogenee di ordine  $n$  a coefficienti costanti**Descrizione attività:**

Rappresentazione dell'integrale generale dell'equazione lineare omogenea di ordine  $n$  a coefficienti costanti. Studio del caso in cui l'equazione caratteristica presenta soluzioni di molteplicità  $r > 1$ , con particolare dettaglio per il caso  $r = 2$ .

---

**19/03/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 10:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**Equazioni lineari omogenee di ordine  $n$  a coefficienti continui**Descrizione attività:**

Struttura dell'integrale generale di un'equazione lineare omogenea di ordine  $n$  a coefficienti continui. Studio specifico dell'equazione a coefficienti costanti  $ay'' + by' + cy = 0$ , con il coefficiente  $a$  diverso da zero, a seconda del segno del discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ , mediante applicazione del teorema generale. Identificazione delle soluzioni a valori reali nel caso in cui risulti  $\Delta < 0$ . Osservazione: se l'equazione è particolarmente semplice, come ad esempio  $y'' = -\omega^2 y$ , le soluzioni si possono trovare direttamente senza alcun obbligo di passare attraverso il teorema generale.

---

**19/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 10:00

**Ora fine:** 11:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Equazioni lineari di ordine  $n$  non omogenee

**Descrizione attività:**

Struttura dello spazio delle soluzioni di un'equazione lineare di ordine  $n$  non omogenea, a coefficienti continui: l'integrale generale si ottiene sommando una soluzione particolare dell'equazione non omogenea all'integrale generale dell'equazione omogenea ad essa associata. Equazioni lineari di Eulero: definizione, e riconduzione ad un'equazione a coefficienti costanti tramite la sostituzione  $x = e^t$ , sul semiasse  $x > 0$ , ovvero  $x = e^{-t}$  sul semiasse  $x < 0$ .

---

**21/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Il metodo di somiglianza (1/2). Trasformazione di un'equazione in un sistema

**Descrizione attività:**

Illustrazione del metodo di somiglianza per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione differenziale lineare, non omogenea. Risoluzione dettagliata di un problema in cui il termine noto è di tipo sinusoidale.

Cenni alla trasformazione di una singola equazione scalare, di ordine  $n$ , in un sistema di  $n$  equazioni del primo ordine, al fine di ottenere un teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy ad essa associato.

---

**21/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Il metodo di somiglianza (2/2)

**Descrizione attività:**

Illustrazione del metodo di somiglianza per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione differenziale lineare, non omogenea. Risoluzione dettagliata di un problema in cui il termine noto è di tipo polinomiale ed ha una semplice interpretazione fisica (oscillatore armonico soggetto a una forza esterna costante).

---

**22/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Il metodo della variazione delle costanti arbitrarie

**Descrizione attività:**

Esposizione teorica del metodo della variazione delle costanti arbitrarie per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione differenziale lineare, non omogenea, a coefficienti continui. Cenni alla matrice wronskiana e al teorema del wronskiano (teorema di Jacobi).

---

**22/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Formulazione integrale del problema di Cauchy. Convergenza uniforme

**Descrizione attività:**

Schema dimostrativo del teorema di esistenza e unicità in piccolo della soluzione del problema di Cauchy. Formulazione integrale del problema. Equivalenza con la ricerca di un punto fisso per un operatore opportuno. Definizione per ricorrenza di una successione di funzioni approssimanti la soluzione.

Definizione della convergenza uniforme di una successione di funzioni.

---

**25/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 15:00

**Ora fine:** 16:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Dimostrazione del teorema di Cauchy (1/3)

**Descrizione attività:**

Schema dimostrativo del teorema di esistenza e unicità in piccolo della soluzione del problema di Cauchy. Definizione, per ricorrenza, di una successione di funzioni approssimanti. La buona positura di tale definizione richiede, eventualmente, un'opportuna riduzione del dominio delle funzioni considerate: calcolo dettagliato dell'ampiezza del dominio.

---

**25/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 16:00

**Ora fine:** 17:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Uso della convergenza uniforme per passare al limite sotto il segno di integrale (1/2)

**Descrizione attività:**

Enunciato del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per una successione di funzioni integrande continue, che convergono uniformemente in un intervallo chiuso e limitato. Applicazione nella dimostrazione del teorema di Cauchy. Studio di un semplice esempio di successione che non converge uniformemente: la successione delle funzioni  $y_k(x) = x^k$  per  $x$  nell'intervallo  $(0,1)$ , al fine di illustrare la definizione di convergenza uniforme. Richiami sulla definizione di estremo superiore di una funzione.

---

**26/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 09:00

**Ora fine:** 10:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Uso della convergenza uniforme per passare al limite sotto il segno di integrale (2/2). Convergenza puntuale

**Descrizione attività:**

La convergenza uniforme, che è condizione sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno di integrale, non è condizione necessaria a tale scopo: dimostrazione dell'asserto mediante la costruzione di un semplice controesempio.

Definizione della convergenza puntuale. Studio di un esempio che mostra come una stessa successione di funzioni, convergente puntualmente ma non uniformemente su di un dato intervallo, può benissimo convergere uniformemente su di un opportuno sottointervallo di quello dato.

---

**26/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 10:00

**Ora fine:** 11:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Interpretazione geometrica della convergenza uniforme. Spazi metrici

**Descrizione attività:**

Interpretazione geometrica della convergenza uniforme.

Definizione di spazio metrico. Cenni storici. Limite di una successione in uno spazio metrico.

Esempi:  $\mathbb{R}^N$  con la metrica euclidea;  $C^0([a,b])$  con la metrica lagrangiana. Nesso con la nozione di convergenza uniforme.

---

**28/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

L'integrale improprio di Riemann

**Descrizione attività:**

Richiami sull'integrale improprio di Riemann con particolare riferimento al problema del passaggio al limite sotto il segno di integrale, ed in preparazione allo studio dell'integrale di Lebesgue. Esempi di funzioni integrabili in senso improprio sull'asse reale. Esempi di funzioni continue e tuttavia non integrabili in senso improprio sull'asse reale. Tipici fraintendimenti sull'integrale di Riemann: confondere l'integrabilità con il teorema fondamentale del calcolo integrale; equiparare genericamente l'integrale di Riemann ad un'area.

---

**28/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Continuità della funzione limite e passaggio al limite sotto il segno di integrale: dimostrazioni

**Descrizione attività:**

Dimostrazione della continuità della funzione limite di una successione di funzioni continue e uniformemente convergenti, nonché della formula di passaggio al limite sotto il segno di integrale in tali ipotesi.

---

**29/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Passaggio al limite sotto il segno di integrale su intervalli illimitati

**Descrizione attività:**

La convergenza uniforme non garantisce la possibilità di passare al limite sotto il segno di integrale se il dominio di integrazione è un intervallo illimitato, e gli integrali sono intesi nel senso generalizzato (detto anche improprio) di Riemann: dimostrazione dell'asserto mediante la costruzione di un controesempio.

---

**29/03/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Il criterio di Cauchy uniforme

**Descrizione attività:**

Enunciato e dimostrazione del criterio di Cauchy uniforme.

---

**01/04/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 15:00**Ora fine:** 16:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Dimostrazione del teorema di Cauchy (2/3): convergenza uniforme

**Descrizione attività:**

Studio della successione di funzioni definita per ricorrenza nella lezione del 25/03 e dimostrazione, mediante il criterio di Cauchy, della convergenza uniforme di tale successione in un intervallo opportuno. Stima dell'ampiezza di tale intervallo. Poiché la funzione limite soddisfa l'equazione integrale introdotta nella lezione del 22/03, essa è una soluzione del problema ai valori iniziali.

---

**01/04/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 16:00**Ora fine:** 17:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Introduzione alle serie di funzioni. Integrazione per serie

**Descrizione attività:**

Generalità sulle serie di funzioni: somma di una serie, convergenza puntuale e convergenza uniforme. Teorema di integrazione per serie. Applicazione alla determinazione dello sviluppo in serie di una primitiva (non elementare) della funzione  $e^{-(x^2)}$ .

---

**02/04/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 10:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Derivazione termine a termine: presentazione del problema

**Descrizione attività:**

Dimostrazione, mediante la costruzione di un controesempio, del fatto che la sola convergenza uniforme di una successione di funzioni derivabili  $y_k$  non garantisce che la funzione limite  $y$  sia anch'essa derivabile.

---

**02/04/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 10:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Teorema di derivazione termine a termine. Uso contronominale del teorema sulla continuità della funzione limite. Dimostrazione del teorema di Cauchy (3/3)

**Descrizione attività:**

Enunciato del teorema di derivazione termine a termine di una successione di funzioni  $y_k$ , sotto l'ipotesi che esista almeno un punto  $x$  dove  $y_k(x)$  converge, e che la successione delle derivate  $y'_k$  converga uniformemente, con cenni alla dimostrazione.

Uso del teorema sulla continuità della funzione limite, dimostrato il 28/03, per dedurre che la convergenza di una successione di funzioni continue  $y_k$  non è uniforme dalla discontinuità della funzione limite  $y$ .

Dimostrazione dell'unicità (in piccolo) della soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione  $y' = f(x,y)$ , sotto l'ipotesi che  $f$  sia continua insieme alla sua derivata parziale  $f_y$ .

---

**04/04/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 11:00**Ora fine:** 12:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Verifica formativa. Completezza di uno spazio metrico. Contrazioni

**Descrizione attività:**

Svolgimento di una verifica formativa avente per oggetto la teoria delle equazioni differenziali ordinarie, l'integrazione indefinita, la convergenza delle successioni di funzioni e le proprietà della funzione limite, svolta con l'utilizzo di un software per presentazioni interattive.

Richiami sulla proprietà di completezza di uno spazio metrico, in continuità con le lezioni del 26/03 e del 29/03. L'argomento verrà ripreso nella lezione del 07/05.

Definizione di contrazione, e discussione di un semplice esempio di contrazione dell'insieme dei numeri reali.

---

**04/04/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 12:00**Ora fine:** 13:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Il teorema delle contrazioni

**Descrizione attività:**

Enunciato e dimostrazione del teorema delle contrazioni, scoperto da Stefan Banach nel 1922 e riottenuto da Renato Caccioppoli nel 1931.

Applicazione alla dimostrazione del teorema di esistenza e unicità in piccolo della soluzione del problema ai valori iniziali associato ad un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale, scoperto da Augustin-Louis Cauchy nell'Ottocento e già dimostrato per via diretta nelle lezioni del 25/03, 01/04 e 02/04.

---

**05/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Interpretazione grafica della proprietà di essere una contrazione. Sottoinsiemi chiusi di uno spazio metrico completo

**Descrizione attività:**

Interpretazione grafica della proprietà di essere una contrazione sull'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali. Uso contronominale del teorema delle contrazioni, con riferimento ad un semplice esempio, per concludere che una data funzione reale di una variabile reale, avente due punti fissi, non è una contrazione.

I sottoinsiemi chiusi di uno spazio metrico completo  $X$  sono a loro volta spazi metrici completi: enunciato; studio di un caso particolare in cui  $X$  è l'insieme dei numeri reali.

---

**05/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Introduzione alle serie di potenze

**Descrizione attività:**

Studio di una semplice applicazione da  $\mathbb{R}$  verso  $\mathbb{R}$  che, pur avendo uno e un solo punto fisso, non è una contrazione.

Rappresentazione, sotto forma di somma ridotta di una serie di potenze, della funzione  $y_k$  approssimante la soluzione del problema di Cauchy  $y'=y$  con la condizione  $y(0)=1$ .

Definizione di serie di potenze, e nesso con la serie di Taylor.

Richiami sulla formula di Taylor con il resto di Lagrange.

---

**08/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 15:00

**Ora fine:** 16:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Alcune notevoli serie di potenze

**Descrizione attività:**

Sviluppo in serie di Maclaurin di alcune funzioni notevoli. Studio della convergenza della serie di Maclaurin alla funzione generatrice. Integrabilità termine a termine.

---

**08/04/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 16:00**Ora fine:** 17:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Il raggio di convergenza (1/2)

**Descrizione attività:**

Determinazione del raggio di convergenza di una serie di potenze di coefficienti  $a_k$ , a partire dal limite superiore della radice  $k$ -esima del valore assoluto  $|a_k|$  (enunciato del teorema di Cauchy-Hadamard, a pag. 38 del libro di testo). Esempi notevoli.

---

**09/04/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 10:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

La serie esponenziale

**Descrizione attività:**

Studio dettagliato della serie esponenziale e della sua convergenza alla funzione esponenziale. Definizione del limite superiore di una successione numerica. Il limite di una successione, quando esiste, coincide con il limite superiore: dimostrazione, esempi.

---

**09/04/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 10:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Il raggio di convergenza (2/2)

**Descrizione attività:**

Determinazione del raggio di convergenza di una serie di potenze, di coefficienti  $a_k$ , a partire dal limite del rapporto fra  $|a_{k+1}|$  e  $|a_k|$ , ammesso che tale limite esista (teorema di D'Alembert, a pag. 39 del libro di testo).

Cenni alla definizione della funzione esponenziale  $e^z$ , con esponente  $z$  appartenente all'insieme dei numeri complessi, e all'identità di Eulero.

Illustrazione grafica, mediante animazioni al computer, della convergenza di alcune successioni e serie notevoli, incluse la serie esponenziale e la serie di Fourier della funzione  $y=x$  sull'intervallo  $(-\pi, \pi)$ .

---

**11/04/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 11:00**Ora fine:** 12:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

La serie di Leibniz

**Descrizione attività:**

Determinazione dettagliata della somma ( $\pi$  greco quarti) della celebre serie di Leibniz, a partire dallo sviluppo di Fourier della funzione  $f(x) = x$  sull'intervallo  $(-\pi, \pi)$ .

---

**11/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Convergenza puntuale della serie di Fourier

**Descrizione attività:**

Cenni storici sull'origine delle serie trigonometriche, e sul percorso seguito da Fourier in "Théorie analytique de la chaleur" (1822) per determinare l'espressione dei coefficienti.

Enunciato di un teorema di convergenza puntuale della serie di Fourier per funzioni continue nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , derivabili nei punti interni e dotate della derivata destra (rispettivamente, sinistra) nel punto  $x = -\pi$  (rispettivamente, nel punto  $x = \pi$ ).

---

**12/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Il prodotto scalare di  $L^2$

**Descrizione attività:**

Richiami sull'integrazione di funzioni pari e di funzioni dispari su di un intervallo simmetrico rispetto all'origine.

Determinazione dettagliata della serie di Fourier associata alla funzione trigonometrica  $f(x) = \sin x$  sull'intervallo  $(-\pi, \pi)$ . Cenni alle serie di Taylor dei polinomi (si riducono alla funzione generatrice).

Il prodotto scalare canonico dello spazio  $L^2(-\pi, \pi)$  ristretto alle funzioni continue sull'intervallo chiuso  $[-\pi, \pi]$ : verifica delle proprietà formali.

---

**12/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Spazi vettoriali normati

**Descrizione attività:**

Definizione della norma associata al prodotto scalare canonico dello spazio  $L^2(-\pi, \pi)$ , ristretto alle funzioni continue sull'intervallo chiuso  $[-\pi, \pi]$ , ed enunciazione delle sue proprietà. Nozione di spazio vettoriale normato. Calcolo della norma delle funzioni  $\sin nx$  e  $\cos nx$ . Definizione della metrica associata alla suddetta norma, e conseguente definizione della convergenza in media quadratica (detta anche convergenza nella norma di  $L^2$ ) per una successione di funzioni continue.

Espressione dei coefficienti di Fourier mediante il prodotto scalare canonico dello spazio  $L^2(-\pi, \pi)$  ristretto alle funzioni continue sull'intervallo chiuso  $[-\pi, \pi]$ . Cenni al concetto di base hilbertiana.

---

**15/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 15:00

**Ora fine:** 16:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Il teorema della convergenza limitata

**Descrizione attività:**

Studio dettagliato di un classico esempio di successione di funzioni continue, convergenti localmente uniformemente a zero su di un intervallo limitato, e con le quali però non si può passare al limite sotto il segno di integrale.

Il passaggio al limite sotto il segno di integrale è legittimo se le funzioni considerate sono equilimitate: dimostrazione sotto le ipotesi semplificative che le funzioni considerate siano continue e che la loro convergenza sia localmente uniforme.

---

**15/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 16:00

**Ora fine:** 17:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Controesempi al passaggio al limite sotto il segno di integrale

**Descrizione attività:**

Studio di diversi esempi di successioni di funzioni continue, convergenti a zero localmente uniformemente su di un intervallo limitato, e con le quali non si può passare al limite sotto il segno di integrale. Rappresentazione grafica di alcuni termini di tali successioni mediante animazioni realizzate con il software GeoGebra.

---

**16/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 09:00

**Ora fine:** 10:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Il teorema della convergenza monotona

**Descrizione attività:**

Presentazione del teorema della convergenza monotona sotto le ipotesi semplificative che (i) le funzioni considerate siano continue, (ii) la loro convergenza sia localmente uniforme, e (iii) il dominio di integrazione sia un intervallo limitato (l'enunciato generale del teorema sarà dato nella lezione del 10/05).

Discussione di un semplice esempio nel quale l'ipotesi della non-negatività dei termini della successione non è soddisfatta, e non si può passare al limite sotto il segno di integrale.

---

**16/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 10:00

**Ora fine:** 11:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Semplici estensioni del teorema della convergenza monotona

**Descrizione attività:**

Alcune semplici estensioni del teorema della convergenza monotona: (a) il caso delle funzioni di segno variabile, e (b) il caso delle successioni monotone decrescenti, entrambi esaminati sotto le ipotesi semplificative che (i) le funzioni considerate siano continue, (ii) la loro convergenza sia localmente uniforme, e (iii) il dominio di integrazione sia un intervallo limitato.

---

**29/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 15:00

**Ora fine:** 16:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

La spugna di Menger e l'insieme di Cantor

**Descrizione attività:**

Definizione di insieme di misura nulla secondo Peano-Jordan. Costruzione della spugna di Menger, che ha misura di Peano-Jordan nulla. Cenni all'insieme di Cantor.

---

**29/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 16:00

**Ora fine:** 17:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Insiemi di misura nulla secondo Peano-Jordan. Dipendenza della misura dalla dimensione

**Descrizione attività:**

Studio di alcuni semplici esempi di insiemi di misura nulla secondo Peano-Jordan, ed in particolare gli insiemi costituiti da un numero finito di punti. Dipendenza della misura di Peano-Jordan dalla dimensione: un segmento, avente misura di Peano-Jordan unidimensionale positiva, ha misura di Peano-Jordan tridimensionale nulla.

---

**30/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 09:00

**Ora fine:** 10:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Misura di Peano-Jordan degli insiemi numerabili

**Descrizione attività:**

Studio di un insieme infinito (numerabile) avente misura di Peano-Jordan unidimensionale nulla: l'insieme dei numeri aventi la forma  $x = 1/n$  per  $n$  intero positivo. Confronto con altri insiemi numerabili che non hanno misura nulla secondo Peano-Jordan (anzi, non sono misurabili secondo Peano-Jordan): l'insieme  $Q$  dei numeri razionali, e l'intersezione tra  $Q$  e l'intervallo  $[0,1]$ .

---

**30/04/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 10:00

**Ora fine:** 11:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan. Misura nulla secondo Lebesgue

**Descrizione attività:**

Definizione della misura esterna e della misura interna N-dimensionali di un dato sottoinsieme E di  $\mathbb{R}^N$  secondo Peano-Jordan. Concetto di insieme misurabile secondo Peano-Jordan.

Definizione della misura di Peano-Jordan. La misura di Peano-Jordan tridimensionale del solido sferico coincide con il suo volume, e alla stessa conclusione si perviene con le altre figure geometriche notevoli studiate nell'antichità.

Ciò non ostante, non tutti gli insiemi sono misurabili secondo Peano-Jordan: dimostrazione dell'asserto, mediante la costruzione di controesempi.

Definizione di insieme di misura nulla secondo Lebesgue. Applicazione: l'intersezione tra l'insieme  $\mathbb{Q}$  dei numeri razionali e l'intervallo  $[0,1]$  ha misura di Lebesgue nulla.

---

**02/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Misura di Lebesgue degli insiemi illimitati

**Descrizione attività:**

Definizione della misura di Lebesgue degli insiemi illimitati. Alcune particolarità della misura degli insiemi illimitati: una semiretta, che ha misura di Lebesgue unidimensionale infinita, ha tuttavia misura bidimensionale nulla; una successione di insiemi di misura infinita può avere intersezione vuota.

---

**02/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Costruzione della misura di Lebesgue

**Descrizione attività:**

Definizione della misura di Lebesgue degli insiemi limitati: misura degli aperti, misura dei chiusi, misura interna e misura esterna di un insieme limitato, concetto di insieme misurabile. Discussione della buona positura della definizione, con particolare riguardo alla misurabilità degli aperti limitati.

---

**03/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Proprietà della misura di Lebesgue

**Descrizione attività:**

Buona positura della definizione della misura di Lebesgue, con particolare riguardo verso la misura degli aperti (dimostrazione) e la misura dei chiusi (enunciato). La misura interna secondo Peano-Jordan di un qualunque insieme non è mai maggiore della sua misura esterna (dimostrazione). La misura interna secondo Lebesgue di un qualunque insieme non è mai maggiore della sua misura esterna (enunciato). La misurabilità si mantiene sotto le operazioni insiemistiche di unione numerabile, intersezione numerabile e passaggio al complementare (enunciato).

---

**03/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Sigma-algebra

**Descrizione attività:**

Nozione di sigma-algebra di insiemi. Esempi notevoli: i boreliani; gli insiemi misurabili; tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^N$ . Differenze fra le tre suddette sigma-algebra (cenni), inclusa l'esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue (enunciato). Ulteriori proprietà della misura di Lebesgue: monotonia rispetto all'inclusione insiemistica; numerabile additività; invarianza per traslazioni (enunciati).

---

**06/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 15:00

**Ora fine:** 16:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Continuità della misura di Lebesgue. Altre misure

**Descrizione attività:**

Enunciato e dimostrazione della proprietà di continuità della misura di Lebesgue: l'unione di una successione monotona (rispetto all'inclusione insiemistica) di insiemi misurabili  $A_k$  è a sua volta un insieme misurabile, e la sua misura è il limite della misura di  $A_k$ .

Cenni a qualche altra misura sulla retta reale: misura di Gauss, misura di Dirac.

---

**06/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 16:00

**Ora fine:** 17:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

L'insieme di Vitali. Funzioni misurabili

**Descrizione attività:**

Costruzione dell'insieme di Vitali (insieme non misurabile secondo Lebesgue). Definizione della proprietà di misurabilità di una funzione.

---

**07/05/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 10:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Misurabilità delle funzioni continue. Misurabilità della funzione limite

**Descrizione attività:**

Le funzioni continue sono misurabili (dimostrazione).

Un'importante formulazione della proprietà di completezza dell'insieme dei numeri reali: ogni successione monotona ammette limite (finito o infinito). Tale formulazione è equivalente a quella utilizzata nella lezione del 04/04.

Il limite puntuale di una successione di funzioni misurabili è ancora una funzione misurabile (enunciato). Dimostrazione nel caso particolare delle successioni monotone.

Il limite puntuale di una successione di funzioni integrabili secondo Riemann può non essere integrabile secondo Riemann: dimostrazione mediante la costruzione di un controesempio.

---

**07/05/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 10:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

L'integrale di Lebesgue

**Descrizione attività:**

Definizione, nell'impostazione originale di Lebesgue, dell'integrale di una funzione limitata esteso ad un insieme misurabile e di misura finita (una definizione equivalente sarà data mediante funzioni semplici nella lezione del 09/05).

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'integrale sia ben definito è che la funzione integranda sia misurabile (dimostrazione).

---

**09/05/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 11:00**Ora fine:** 12:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Confronto fra l'integrale di Lebesgue e quello di Riemann. Teorema della convergenza limitata

**Descrizione attività:**

Relazione fra la misura interna e la misura esterna secondo Peano-Jordan, e la misura interna e la misura esterna di Lebesgue. Conseguenza: se una data funzione è integrabile secondo Riemann, allora è integrabile anche secondo Lebesgue e i valori numerici degli integrali coincidono (il confronto fra l'integrale improprio di Riemann e quello di Lebesgue sarà svolto nella lezione del 13/05). Semplici esempi di calcolo di integrali.

Differenza fra l'integrale di Lebesgue e quello di Riemann: il limite (se esiste) di una successione di funzioni integrabili secondo Riemann può non essere integrabile secondo Riemann (controesempio illustrato il 07/05), mentre invece il limite di una successione di funzioni misurabili è una funzione misurabile (argomento della lezione del 07/05), e vale il teorema della convergenza limitata (enunciato). Un caso particolare del teorema della convergenza limitata è stato dimostrato nella lezione del 15/04.

---

**09/05/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 12:00**Ora fine:** 13:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Integrale di Lebesgue di funzioni illimitate

**Descrizione attività:**

Definizione di funzione semplice. Esempi. Funzioni semplici minoranti, e funzioni semplici maggioranti di una funzione data.

Definizione dell'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile, limitata, esteso a un dominio di misura finita, mediante funzioni semplici (la definizione secondo l'impostazione originale di Lebesgue è stata illustrata nella lezione del 07/05). Esempio: determinazione di una particolare somma superiore riferita alla funzione  $f(x) = \sin x$  sull'intervallo da 0 a  $\pi$  greco.

Definizione dell'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile, non negativa.

Definizione dell'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile, nell'ipotesi che la parte positiva e la parte negativa abbiano integrale finito.

---

**10/05/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 11:00**Ora fine:** 12:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

I teoremi di Fubini e di Tonelli (1/2)

**Descrizione attività:**

Preparazione ai teoremi di Fubini e di Tonelli: studio dettagliato di un controesempio teso ad illustrare che l'identità fra due integrali iterati, ottenuti invertendo l'ordine delle integrazioni, non sussiste in generale. Interpretazione geometrica dell'integrale doppio.

---

**10/05/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 12:00**Ora fine:** 13:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

I teoremi di Fubini e di Tonelli (2/2), ed il teorema della convergenza monotona.

**Descrizione attività:**

Enunciato dei teoremi di Fubini e di Tonelli. Enunciato e dimostrazione del corollario che afferma che se uno dei due integrali iterati è assolutamente convergente, allora lo è anche l'altro, e l'integrale doppio si può ridurre a due integrazioni semplici.

Enunciato del teorema della convergenza monotona, già presentato sotto ipotesi semplificate nella lezione del 16/04.

---

**13/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 15:00

**Ora fine:** 16:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Integrale improprio di Riemann e integrale di Lebesgue

**Descrizione attività:**

Misurabilità della somma, della differenza, del prodotto e del rapporto di due funzioni misurabili (enunciato).

Confronto fra l'integrale improprio di Riemann sull'asse reale e l'integrale di Lebesgue: se la funzione integranda è non negativa, e integrabile secondo Riemann, i due integrali coincidono. Dimostrazione mediante il teorema della convergenza monotona (richiami sull'integrale improprio sono stati svolti il 28/03; il confronto tra l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue è stato svolto il 09/05).

---

**13/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 16:00

**Ora fine:** 17:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Lemma di Fatou. Teorema della convergenza dominata

**Descrizione attività:**

Enunciato del lemma di Fatou, e dimostrazione a partire dal teorema della convergenza monotona. Esempio.

Enunciato del teorema della convergenza dominata, e dimostrazione del teorema della convergenza limitata a partire dal teorema della convergenza dominata.

Richiami sull'esistenza di insiemi illimitati e di misura finita.

---

**14/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 09:00

**Ora fine:** 10:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Dimostrazione del teorema della convergenza dominata

**Descrizione attività:**

Dimostrazione del teorema della convergenza dominata a partire dal lemma di Fatou.

Dimostrazione del fatto che il limite inferiore della successione numerica  $(-a_k)$  è l'opposto del limite superiore della successione  $(a_k)$ .

---

**14/05/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 10:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Il teorema fondamentale del calcolo integrale. La locuzione "quasi ovunque"

**Descrizione attività:**

Enunciato del teorema fondamentale del calcolo integrale nella teoria di Lebesgue.

La locuzione "quasi ovunque". Applicazioni: l'integrale di Lebesgue di due funzioni che coincidono quasi ovunque è lo stesso; il teorema della convergenza dominata continua a valere se la successione considerata converge quasi ovunque. Rassegna di insiemi aventi misura nulla secondo Lebesgue, incluso l'insieme dei numeri razionali, con riferimento alle lezioni del 29/04 e del 30/04.

Dimostrazione della non integrabilità secondo Lebesgue della funzione  $y = \sin x$  sulla semiretta  $x > 0$  (la non integrabilità della stessa funzione nel senso improprio di Riemann è stata dimostrata nella lezione del 28/03).

---

**16/05/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 11:00**Ora fine:** 12:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Derivazione sotto il segno di integrale

**Descrizione attività:**

Regola di derivazione sotto il segno di integrale. Dimostrazione mediante il teorema della convergenza dominata. Applicazione al calcolo delle derivate parziali del potenziale elettrostatico.

---

**16/05/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 12:00**Ora fine:** 13:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

La condizione di Lipschitz

**Descrizione attività:**

Enunciato del teorema di esistenza e unicità in piccolo della soluzione del problema di Cauchy associato ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale (il caso particolare di una sola equazione scalare è stato enunciato in data 11/03, e la dimostrazione è stata svolta nelle lezioni successive).

La condizione di Lipschitz: formulazione; uso della condizione di Lipschitz per rimpiazzare l'ipotesi di esistenza e continuità delle derivate nel teorema di Cauchy; riconoscimento della lipschitzianità di una funzione scalare di una variabile a partire dalla sua derivata prima, mediante il teorema di Lagrange.

Esempi di funzioni lipschitziane di una variabile:  $f(y) = y^2$  (localmente lipschitziana);  $f(y) = \sin y$  (globalmente lipschitziana);  $f(y) = |y|$  (globalmente lipschitziana). Una funzione che non è lipschitziana in alcun intorno dell'origine sarà presentata nella lezione del 17/05.

Cenni al teorema di esistenza in grande sotto l'ipotesi della lipschitzianità globale.

---

**17/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

La convergenza totale

**Descrizione attività:**

Esempio di una funzione che non è lipschitziana in alcun intorno dell'origine, con riferimento alla lezione del 16/05.

Definizione della convergenza totale di una serie di funzioni. Dimostrazione del fatto che la convergenza totale in un dato sottoinsieme  $X$  della retta reale implica la convergenza uniforme nello stesso insieme  $X$  (criterio di Weierstrass).

Applicazione: indicato con  $r$  il raggio di convergenza di una data serie di potenze (determinato come nella lezione del 08/04), se  $r > 0$  allora la serie converge totalmente (dunque converge uniformemente) nell'intervallo  $[-\delta, \delta]$  per ogni valore di  $\delta$  appartenente all'intervallo  $(0, r)$ .

---

**20/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 15:00

**Ora fine:** 16:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Derivazione termine a termine delle serie di potenze

**Descrizione attività:**

Determinazione dettagliata, mediante il teorema di derivazione termine a termine illustrato nella lezione del 02/04, del raggio di convergenza della serie ottenuta derivando termine a termine una serie di potenze di raggio  $r$ .

---

**20/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 16:00

**Ora fine:** 17:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Funzioni analitiche

**Descrizione attività:**

Determinazione delle derivate successive di una funzione  $f(x)$  definita come somma di una serie di potenze, convergente nell'intervallo  $(-r, r)$ . Sviluppo di  $f(x)$  in serie di Maclaurin.

Definizione di funzione analitica. Esempi: le funzioni  $e^x$ ,  $\sin x$  e  $\cos x$  sono funzioni analitiche su tutto l'asse reale (riferimento alla lezione del 09/04). Esempio: la funzione  $1/(1-x)$  è analitica sulla semiretta  $x < 1$  e sulla semiretta  $x > 1$ . Controesempi: funzioni di classe  $C^\infty$  su tutto l'asse reale, che tuttavia non sono analitiche in alcun intorno dell'origine.

---

**21/05/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 10:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Estensione delle funzioni analitiche al campo dei numeri complessi. Sviluppo di Fourier della funzione  $f(x) = x^2$

**Descrizione attività:**

Cenni all'estensione delle funzioni analitiche dal campo dei numeri reali a quello dei numeri complessi, con riferimento alla lezione del 09/04. Esempio: la funzione  $1/(1 + x^2)$ , analitica su tutto l'asse reale, non si può estendere ad una funzione analitica in tutto il piano complesso perché presenta delle singolarità nei punti  $x=i$  ed  $x=-i$ .

Richiami sul teorema di convergenza puntuale della serie di Fourier enunciato nella lezione del giorno 11/04. Determinazione dettagliata dei coefficienti di Fourier della funzione  $f(x) = x^2$  nell'intervallo  $(-\pi, \pi)$ .

---

**21/05/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 10:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Cenni alla serie di Fourier in  $L^2$

**Descrizione attività:**

Uso della serie di Fourier della funzione  $f(x) = x^2$  per stabilire il valore numerico della somma di  $1/k^2$  per  $k$  che va da 1 all'infinito, valore già determinato per altra via da Eulero.

Cenni alla proprietà di completezza dello spazio vettoriale normato  $L^2$ , ed al teorema di convergenza della serie di Fourier in  $L^2$ , con riferimento alla lezione del 12/04.

---

**23/05/2019 - lezione -****Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 10:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Uguaglianza di Parseval e disuguaglianza di Bessel

**Descrizione attività:**

L'uguaglianza di Parseval: enunciato. Relazione fra l'uguaglianza di Parseval ed il teorema di Pitagora in  $R^3$ , con riferimento al concetto di base hilbertiana introdotto nella lezione del 12/04.

Disuguaglianza di Bessel: dimostrazione.

---

**23/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Il teorema di Riemann-Lebesgue

**Descrizione attività:**

Teorema di Riemann-Lebesgue: enunciato in  $L^1$ , dimostrazione in  $L^2$ .

Richiami sugli spazi normati, con particolare riferimento allo spazio  $L^2$  sull'intervallo  $(-\pi, \pi)$ . Equivalenza in  $L^2$  fra due funzioni che differiscono su di un insieme di misura nulla. Esempio: la funzione di Dirichlet coincide in  $L^2$  con la funzione nulla.

Relazione fra la norma-infinito in  $R^2$  e la norma- $p$  con  $p > 1$ : la prima è il limite della seconda per  $p$  che tende all'infinito, il che ne giustifica il nome.

---

**23/05/2019 - lezione -**

**Docente:** GRECO ANTONIO

**Ora inizio:** 12:00

**Ora fine:** 13:00

**Ore accademiche:** 1

**Titolo attività:**

Equivalenza fra norme

**Descrizione attività:**

Concetto di equivalenza fra norme in uno spazio vettoriale normato. Norme equivalenti inducono la stessa topologia.

Tutte le norme nello spazio vettoriale finito-dimensionale  $R^N$  sono equivalenti fra loro: cenni alla dimostrazione, con particolare riferimento alle norme- $p$ . Confronto fra le sfere unitarie definite rispetto alla norma-1, alla norma-2 (norma euclidea) e alla norma-infinito detta anche norma del massimo.

Non tutte le norme negli spazi funzionali sono equivalenti fra loro. Esempio: la norma uniforme nello spazio  $C^0([a,b])$  non è equivalente alla norma di  $L^2([a,b])$ . Definizione degli spazi  $C^k([a,b])$  e delle loro norme canoniche.

---