Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Soluzioni classiche

Problemi

1) Trovare tutte le soluzioni classiche dell'equazione differenziale $y'(x) = 0$ aventi per dominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

2) Trovare almeno una soluzione classica delle seguenti equazioni differenziali: (a) $y'(x) = y(x)$; (b) $y''(x) = -y(x)$; (c) $y''(x) = y'(x)$ (in quest'ultimo caso, si suggerisce di considerare la funzione $z(x) = y'(x)$).

3) (a) Indicata con g una costante positiva, trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(x) = -g$.
(b) Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y''(x) = -g, \\ y'(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
(c) Dare un'interpretazione fisica della soluzione $y(x)$, spiegando cosa possono rappresentare le variabili x e y.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Problema di Cauchy

Problemi

1) Trovare (se possibile) una soluzione per ciascuno dei seguenti problemi:

(a) $\begin{cases} xy' = y \\ y(1) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} xy' = y \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} xy' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2) Stabilire se esistono anche altre soluzioni oltre a quella eventualmente trovata.

Problemi

1) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare, omogenea, del primo ordine, in forma normale: $y' = 3y$ ([MS], pag. 204/139, n. 4.7).

2) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare, non omogenea, del primo ordine, in forma normale: $y' = -y + e^{-x}$ ([MS], pag. 205/140, n. 4.9).

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy ([MS], pag. 207/141, n. 4.11):

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = x^3 \\ y(1) = 1/5 \end{cases}$$

[MS] P. Marcellini, C. Sbordone,
Esercitazioni di matematica, vol. 2, parte I, Liguori/
Esercitazioni di analisi matematica due, prima parte, Zanichelli.

Problemi

1) (a) Trovare l'integrale generale dell'equazione $y'' = y$.
(b) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 16\, y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

2) Stabilire come devono essere presi i parametri $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ affinché le funzioni $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ siano linearmente indipendenti. Suggerimento: calcolare il determinante wronskiano.

3) Consideriamo l'equazione differenziale lineare, omogenea, a coefficienti costanti, di ordine $n \geq 2$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)}(x) = 0 \tag{1}$$

con $a_n \neq 0$, e supponiamo che λ_0 sia una soluzione di molteplicità 2 dell'equazione caratteristica. Stabilire se la funzione $y(x) = x\, e^{\lambda_0 x}$ è una soluzione della (1). Suggerimento: derivare rispetto a λ ambo i membri dell'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, \lambda^k = (\lambda - \lambda_0)^2\, Q(\lambda)$$

e porre $\lambda = \lambda_0$, oppure vedere [FMS], Proposizione 3.

[FMS] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due (pag. 290), Liguori / Lezioni di analisi matematica due (pag. 215), Zanichelli.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Teorema di Cauchy

Problemi

Si considerino le funzioni $y_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite per ricorrenza ponendo: $y_0(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t)\,dt \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \text{ e } n = 1, 2, \ldots$$

1) Utilizzando il principio di induzione, verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$ risulta

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

2) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} y_n(x)$ per ciascun $x \in \mathbb{R}$.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Convergenza uniforme

Problemi

Si consideri la successione delle funzioni $y_k(x) = x^k$ per $x \in (0, 1)$ ([FMS], esempi 2 e 3).

1) Per ogni $x \in (0, 1)$, calcolare il limite $\lim_{k\to+\infty} y_k(x)$.

2) Indicata con $y(x)$ la funzione limite, stabilire se $y_k \to y$ uniformemente in $(0, 1)$.

3) Stabilire, calcolando gli integrali, se sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^1 y_k(x)\,dx = \int_0^1 y(x)\,dx.$$

4) Stabilire come deve essere preso il secondo estremo $b < 1$ affinché $y_k \to y$ uniformemente nell'intervallo $(0, b)$.

[FMS] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due (pag. 15), Liguori / Lezioni di analisi matematica due (pag. 2), Zanichelli.

Problemi

Si consideri la successione delle funzioni $y_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da

$$y_k(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{k}{x^2 + k^2}.$$

1) Stabilire per quali valori di $k = 1, 2, \dots$ la funzione y_k è integrabile nel senso improprio (detto anche generalizzato) di Riemann sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

2) Indicato con $y(x)$ il limite puntuale di $y_k(x)$ per $k \to +\infty$, stabilire se y_k tende uniformemente ad y sull'insieme $\mathbb{R}$.

3) Stabilire, calcolando gli integrali, se sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y_k(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)\,dx.$$

Problemi

Si consideri la funzione $f(x) = -\log(1-x)$ per $x < 1$.

1) Sviluppare $f(x)$ in serie di Maclaurin.

2) Trovare il raggio di convergenza di tale serie.

3) Stabilire per quali valori di x la suddetta serie è convergente.

4) Stabilire per quali valori di x la serie converge alla funzione generatrice. Suggerimento: integrare termine a termine la serie geometrica. Nel punto $x = -1$, usare la formula di Taylor con il resto di Lagrange, oppure sfruttare la continuità della somma della serie.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Serie di Fourier

Problemi

La serie di Fourier associata ad una funzione continua $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ è la seguente:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\Big),$$

dove i coefficienti a_k, b_k sono dati da

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx.$$

1) Determinare la serie di Fourier associata alla funzione $f(x) = x/2$.

2) Sapendo che la serie di Fourier della suddetta funzione converge puntualmente alla funzione generatrice nell'intervallo $(-\pi, \pi)$, e posto $x = \pi/2$, verificare l'uguaglianza

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{\pi}{4},$$

la cui scoperta è attribuita a Leibniz: cfr. [K], pagine 511-512.

[K] M. Kline, Storia del pensiero matematico (vol. I), Einaudi.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Contrazioni

Problemi

Indichiamo con X uno spazio metrico, e con $d(x_1, x_2)$ la funzione distanza. Un'applicazione $F\colon X \to X$ è una *contrazione*(*) se esiste una costante $\alpha < 1$ tale che $d(F(x_1), F(x_2)) \le \alpha\, d(x_1, x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$.

Lo spazio metrico X si dice *completo* se tutte le successioni di Cauchy ammettono limite.

Il *teorema delle contrazioni* asserisce che ogni contrazione F in uno spazio metrico completo X ha uno e un solo *punto fisso*, cioè un elemento $x \in X$ tale che $F(x) = x$.

1) Determinare tutti i valori dei parametri m e q tali che la funzione $F(x) = mx + q$ sia una contrazione nello spazio $X = \mathbb{R}$ con la metrica euclidea.

2) Stabilire se la funzione $F(x) = \sqrt{x}$ è una contrazione nello spazio $X = [0, +\infty)$ con la metrica euclidea. Suggerimento: trovare i punti fissi di F.

3) Stabilire se la funzione $F(x) = \operatorname{sen} x$ è una contrazione nello spazio $X = \mathbb{R}$ con la metrica euclidea. Suggerimento: prendere $x_1 = 0$ e studiare il limite

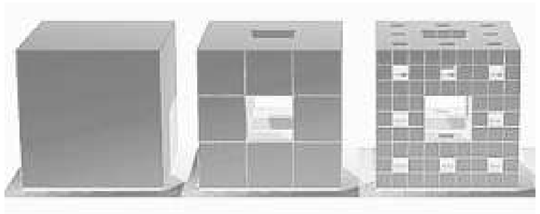
$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{d(F(x_1), F(x_2))}{d(x_1, x_2)}.$$

(*) N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due (pag. 106), Liguori / Lezioni di analisi matematica due (pag. 71), Zanichelli.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Spugna di Menger

Problemi

Per effettuare *l'iterazione di Menger* sul cubo $K_0 = [0, \ell_0]^3$, di lato $\ell_0 > 0$, bisogna: (a) individuare i 12 spigoli $S_1, \ldots, S_{12}$ del cubo K_0, e (b) dividere il cubo K_0 in 27 cubetti di lato $\ell_0/3$ (come il cubo di Rubik). I 20 cubetti che toccano almeno uno degli spigoli $S_1, \ldots, S_{12}$ costituiscono il solido $K_1 = \mathcal{M}(K_0)$.



K_0, K_1 e K_2 (figura tratta da Wikipedia)

Effettuando l'iterazione di Menger su ciascuno dei 20 cubetti che costituiscono il solido K_1 si ottiene il solido $K_2 = \mathcal{M}(K_1)$ costituito da 20^2 cubettini di lato $\ell_0/3^2$. Procedendo in tal modo si definisce una successione di solidi K_n i cui volumi indicheremo con $|K_n|$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$

1) Stabilire per quali valori di n il solido K_n è un plurintervallo tridimensionale.

2) Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} |K_n|$.

3) Stabilire se la spugna di Menger $F = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} K_n$ è misurabile secondo Peano-Jordan, e in caso affermativo calcolarne la misura.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Funzioni misurabili

Problemi

Consideriamo una successione di funzioni misurabili $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia una successione monotona nel senso che $f_{k+1}(x) \geq f_k(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $k \in \mathbb{N}$.

1) Trovare tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ in corrispondenza dei quali esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x). \tag{1}$$

2) Posto $E_{k,t} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid f_k(x) > t \,\}$, stabilire per quali valori di $M \in \mathbb{N}$ risulta misurabile l'insieme S_M dato da

$$S_M = \bigcup_{k=0}^{+\infty} E_{k,M}.$$

3) Stabilire se è misurabile l'insieme S definito come segue:

$$S = \bigcap_{M=0}^{+\infty} S_M.$$

4) Stabilire se è misurabile l'insieme $\mathbb{R} \setminus S$ costituito dai punti $x \in \mathbb{R}$ nei quali il limite (1) ha un valore finito.

5) Indicato con $f(x)$ il suddetto limite, determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che la controimmagine $F_t = f^{-1}((t, +\infty))$ sia un insieme misurabile. Suggerimento: l'insieme F_t è l'unione degli $E_{k,t}$ meno l'insieme S.

6) Stabilire se la funzione $f \colon \mathbb{R} \setminus S \to \mathbb{R}$ definita come sopra è una funzione misurabile.