Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Soluzioni classiche

Problemi

1) Trovare tutte le soluzioni classiche dell'equazione differenziale $y'(x) = 0$ aventi per dominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

2) Trovare almeno una soluzione classica delle seguenti equazioni differenziali: (a) $y'(x) = y(x)$; (b) $y''(x) = -y(x)$; (c) $y''(x) = y'(x)$ (in quest'ultimo caso, si suggerisce di considerare la funzione $z(x) = y'(x)$).

3) (a) Indicata con g una costante positiva, trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(x) = -g$. (b) Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) = -g, \\ y'(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(c) Dare un'interpretazione fisica della soluzione $y(x)$, spiegando cosa possono rappresentare le variabili x e y.

4) Trovare tutte le soluzioni classiche dell'equazione differenziale $y'(x) = y(x)$ aventi per dominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali [FMS, pag. 216].

[FMS] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Problema di Cauchy

Problemi

1) Trovare, se esiste, una soluzione dei seguenti problemi:

(a) $\begin{cases} xy' = y \\ y(1) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} xy' = y \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} xy' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2) Stabilire se esistono anche altre soluzioni oltre a quella eventualmente trovata.

3) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $y' = 2xy/(x^2 - 1)$ ([BPS], pag. 16, n. 5).

[BPS] M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi Matematica 2, Zanichelli.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Eq. lineari del I ordine

Problemi

1) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare, omogenea, del primo ordine, in forma normale: $y' = 3y$ ([MS], pag. 204/139, n. 4.7).

2) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare, non omogenea, del primo ordine, in forma normale: $y' = -y + e^{-x}$ ([MS], pag. 205/140, n. 4.9).

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy ([MS], pag. 207/141, n. 4.11):

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = x^3 \\ y(1) = 1/5 \end{cases}$$

[MS] P. Marcellini, C. Sbordone,
Esercitazioni di matematica, vol. 2, parte I, Liguori/
Esercitazioni di analisi matematica due, prima parte,
Zanichelli.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Eq. lineari del II ord.

Problemi

1) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} y' = -(4-5y)^3 \operatorname{sen} 10x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + 16\,y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

2) Consideriamo l'equazione differenziale lineare, omogenea, a coefficienti costanti, di ordine $n \geq 2$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)}(x) = 0 \tag{1}$$

con $a_n \neq 0$, e supponiamo che λ_0 sia una radice doppia dell'equazione caratteristica. Stabilire se la funzione $y(x) = x\, e^{\lambda_0\, x}$ è una soluzione della (1). Suggerimento: derivare l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, \lambda^k = (\lambda - \lambda_0)^2\, Q(\lambda)$$

e/o vedere [FMS], Proposizione 3, pag. 290.

[FMS] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone,
Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Metodo di somiglianza

Problemi

Si consideri la funzione

$$y(x) = A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x, \tag{1}$$

con A, B e ω costanti.

1) Applicando le consuete regole di derivazione, trovare le derivate $y'(x)$ e $y''(x)$.

2) Fissata $\omega \neq \pm 1$, determinare A e B in modo tale che la funzione $y(x)$ data dalla (1) soddisfi l'equazione differenziale
$$y'' = -y + \cos \omega x. \tag{2}$$
Suggerimento: sostituire $y(x)$ e $y''(x)$ nella (2).

3) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale (2) nell'ipotesi che $\omega \neq \pm 1$.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Convergenza uniforme

Problemi

Si consideri la successione delle funzioni $y_k(x) = x^k$ per $x \in (0, 1)$ ([FMS], esempio 2, pag. 15).

(a) Per ogni $x \in (0, 1)$, calcolare il limite $\lim_{k \to +\infty} y_k(x)$.

(b) Indicata con $y(x)$ la funzione limite, stabilire se $y_k \to y$ uniformemente in $(0, 1)$.

(c) Stabilire, calcolando gli integrali, se sussiste l'uguaglianza
$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^1 y_k(x)\, dx = \int_0^1 y(x)\, dx.$$

(d) Stabilire come deve essere preso il secondo estremo $b < 1$ affinché $y_k \to y$ uniformemente nell'intervallo $(0, b)$.

[FMS] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Densità di Cauchy

Problemi

Si consideri la successione delle funzioni $y_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da

$$y_k(x) = \frac{1}{\pi} \, \frac{k}{x^2 + k^2}.$$

(a) Stabilire per quali valori di $k = 1, 2, \ldots$ la funzione y_k è integrabile nel senso improprio (detto anche generalizzato) di Riemann sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

(b) Indicato con $y(x)$ il limite puntuale di $y_k(x)$ per $k \to +\infty$, stabilire se y_k tende uniformemente ad y sull'insieme $\mathbb{R}$.

(c) Stabilire, calcolando gli integrali, se sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y_k(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x) \, dx.$$

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Derivazione

Problemi

1) Stabilire per quali valori di $k = 1, 2, \ldots$ è derivabile nel punto $x_0 = 0$ la funzione $y_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$y_k(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}\,.$$

2) Determinare il limite puntuale di y_k per $k \to +\infty$.

3) Indicata con y la funzione limite, stabilire se y_k tende ad y uniformemente(*) sull'insieme $\mathbb{R}$.

4) Determinare la successione numerica delle derivate $y_k'(x_0)$ nel punto $x_0 = 0$.

5) Stabilire se la funzione limite y è derivabile nel punto $x_0 = 0$, e in caso affermativo stabilire se sussiste l'uguaglianza

$$y'(0) = \lim_{k \to +\infty} y_k'(0).$$

(*) Esempio 3, pag. 22, in: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Serie di potenze

Problemi

1) Scrivere le serie di Maclaurin delle seguenti funzioni:

$$\frac{1}{1-x}, \qquad \log(1-x), \qquad e^x.$$

2) Stabilire per quali valori della x le suddette serie convergono alle rispettive funzioni generatrici. Suggerimenti: somma di una progressione geometrica; formula di Taylor con il resto di Lagrange.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Serie di Fourier

Problemi

La serie di Fourier associata ad una funzione $f \in C^0([-\pi, \pi])$ è la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

i cui coefficienti a_n, b_n sono dati da

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx.$$

1) (a) Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = x$. (b) Sapendo che la suddetta serie converge puntualmente alla funzione generatrice nell'intervallo $(-\pi, \pi)$, posto $x = \pi/2$ verificare l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4},$$

la cui scoperta è attribuita a Leibniz: cfr. [K], pagg. 511-512.

2) Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$.

[K] M. Kline, Storia del pensiero matematico (vol. I), Einaudi.

Problemi

Consideriamo una serie di potenze, che indicheremo con

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k, \tag{1}$$

soddisfacente la condizione

$$\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L \in (0, +\infty).$$

1) Posto $r = 1/L$, determinare tutti i punti x soddisfacenti la disuguaglianza $|x| > r$ in corrispondenza dei quali la serie (1) converge. Suggerimento: verificare la condizione necessaria per la convergenza.

2) Stabilire per quali punti $x \in (-r, r)$ esiste un intervallo chiuso $[-\delta, \delta] \subset (-r, r)$ tale che $x \in (-\delta, \delta)$.

3) Indicata con $f(x)$ la somma della serie (1), determinare tutti i punti $x \in (-r, r)$ in corrispondenza dei quali la funzione $f(x)$ è derivabile, e sussiste l'uguaglianza

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, a_k\, x^{k-1}. \tag{2}$$

Suggerimento: trovare il raggio di convergenza della serie (2) e usare il teorema di derivazione termine a termine in un intervallo $[-\delta, \delta]$ scelto come nel problema 2.

Problemi

Indichiamo con X uno spazio metrico, e con $d(x_1, x_2)$ la funzione distanza. Un'applicazione $F\colon X \to X$ è una *contrazione*(*) se esiste una costante $\alpha < 1$ tale che $d(F(x_1), F(x_2)) \le \alpha\, d(x_1, x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$.

Lo spazio metrico X si dice *completo* se tutte le successioni di Cauchy ammettono limite.

Il *teorema delle contrazioni* asserisce che ogni contrazione F in uno spazio metrico completo X ha uno e un solo *punto fisso*, cioè un elemento $x \in X$ tale che $F(x) = x$.

1) Determinare tutti i valori dei parametri m e q tali che la funzione $F(x) = mx + q$ sia una contrazione nello spazio $X = \mathbb{R}$ con la metrica euclidea.

2) Stabilire se la funzione $F(x) = \sqrt{x}$ è una contrazione nello spazio $X = [0, +\infty)$ con la metrica euclidea. Suggerimento: trovare i punti fissi di F.

3) Stabilire se la funzione $F(x) = \operatorname{sen} x$ è una contrazione nello spazio $X = \mathbb{R}$ con la metrica euclidea. Suggerimento: prendere $x_1 = 0$ e studiare il limite

$$\lim_{x_2\to x_1} \frac{d(F(x_1), F(x_2))}{d(x_1, x_2)}.$$

(*) Cfr. pag. 106 in: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
La norma-p in $\mathbb{R}^2$

Problemi

Siano a e b due numeri reali soddisfacenti le disuguaglianze $0 \le a \le b$. Stabilire se esiste il limite

$$\lim_{p \to +\infty} \sqrt[p]{a^p + b^p}$$

ed in caso affermativo calcolarlo.(*)

(*)Pag. 97 in: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Convergenza limitata

Problemi

1) Scrivere una successione di funzioni $f_k \in C^0([0,1])$ convergente alla funzione $f(x) = 0$ uniformemente su ogni intervallo $[a,b] \subset (0,1)$.

2) Stabilire se ogni successione di funzioni f_k soddisfacente le suddette ipotesi soddisfa anche l'uguaglianza

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx = 0. \tag{1}$$

Suggerimento: studiare le funzioni(*) $f_k(x) = k\,x\,e^{-kx^2}$.

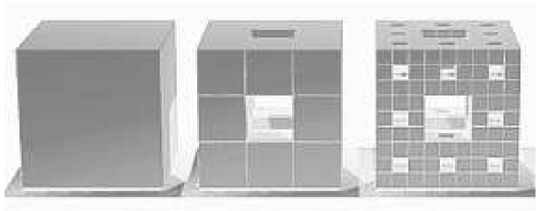
3) Stabilire se ogni successione di funzioni f_k soddisfacente le medesime ipotesi, e tale inoltre che $|f_k(x)| \le 1$ per ogni $k = 0, 1, 2, \ldots$ ed ogni $x \in [0,1]$, soddisfa anche la (1).

(*)Esempio 1, pag. 20, in: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Spugna di Menger

Problemi

Per effettuare *l'iterazione di Menger* su di un cubo K_0 di lato ℓ_0 bisogna: (a) individuare i 12 spigoli $S_1, \ldots, S_{12}$ del cubo K_0, e (b) dividere il cubo K_0 in 27 cubetti di lato $\ell_0/3$ (come il cubo di Rubik). I 20 cubetti che toccano almeno uno degli spigoli $S_1, \ldots, S_{12}$ costituiscono il solido $K_1 = \mathcal{M}(K_0)$.



K_0, K_1 e K_2 (figura tratta da Wikipedia)

Effettuando l'iterazione di Menger su ciascuno dei 20 cubetti che costituiscono il solido K_1 si ottiene il solido $K_2 = \mathcal{M}(K_1)$ costituito da 20^2 cubettini di lato $\ell_0/3^2$. Procedendo in tal modo si definisce una successione di solidi K_j i cui volumi indicheremo con V_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$

1) Calcolare il limite $\lim\limits_{j\to+\infty} V_j$.

2) Stabilire se sussiste l'uguaglianza $\bigcap\limits_{j=0}^{+\infty} K_j = \emptyset$. Suggerimento: considerare uno degli 8 vertici del cubo K_0.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Intersezione infinita

Problemi

La misura di Lebesgue N-dimensionale di un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ coincide con la sua misura di Peano-Jordan quando E è misurabile secondo Peano-Jordan. Inoltre, se E è illimitato, la sua misura di Lebesgue $|E|$ è data da

$$|E| = \lim_{k\to+\infty} |E \cap B_k(0)|,$$

dove $B_k(0) = \{\, x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < k \,\}$, $k = 1, 2, \ldots$, purché l'intersezione $E \cap B_k(0)$ sia misurabile per ogni k.

1) Stabilire per quali valori di $j = 0, 1, 2, \ldots$ l'intervallo $E_j = [j, +\infty)$ è un sottoinsieme chiuso dell'insieme dei numeri reali.

2) Determinare la misura di Lebesgue dell'intervallo E_j per ciascun valore di j.

3) Determinare la misura di Lebesgue dell'insieme E dato da(*)
$$E = \bigcap_{j=0}^{+\infty} E_j.$$
Suggerimento: cercare innanzitutto di individuare (se esiste) almeno un punto dell'insieme E.

(*)Esempio 3, pag. 465, in: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Funzioni misurabili

Problemi

Diciamo che una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è misurabile se la controimmagine $f^{-1}((t, +\infty))$ dell'intervallo aperto $(t, +\infty)$ è un insieme misurabile, qualunque sia $t \in \mathbb{R}$.

1) Trovare, se possibile, una funzione misurabile $f_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed un intervallo chiuso $[t_0, +\infty)$ tali che la controimmagine $f_0^{-1}([t_0, +\infty))$ non risulti misurabile. Suggerimento: l'intervallo chiuso $[t_0, +\infty)$ è l'intersezione degli intervalli aperti $(t_0 - \frac{1}{k}, +\infty)$ per $k = 1, 2, \ldots$

2) Si consideri una successione di funzioni misurabili $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, monotona nel senso che $f_{k+1}(x) \ge f_k(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $k \in \mathbb{N}$. (a) Trovare tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ in corrispondenza dei quali esiste il limite

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(x).$$

(b) Indicato con $f(x)$ il suddetto limite, e supponendo che risulti $f(x) < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che la controimmagine $E = f^{-1}((t, +\infty))$ sia un insieme misurabile. Suggerimento: l'insieme E è l'unione degli $E_k = f_k^{-1}((t, +\infty))$. (c) Trovare una particolare successione monotona di funzioni misurabili f_k tali che l'insieme $X = f^{-1}([0, +\infty))$ non sia l'unione degli $X_k = f_k^{-1}([0, +\infty))$.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
G. Fubini, L. Tonelli

Problemi

Indicati con A e B gli intervalli $A = (-1, 0)$ e $B = (0, 1)$, e posto $E = (A \cup B) \times B$, si consideri la funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \frac{|x|}{xy}.$$

1) Stabilire se f è misurabile, e calcolare gli integrali

$$\int_{A \times B} f(x, y)\, dx\, dy, \quad \int_{B \times B} f(x, y)\, dx\, dy, \quad \int_E |f(x, y)|\, dx\, dy.$$

2) Stabilire se è ben definito l'integrale di Lebesgue

$$\int_E f(x, y)\, dx\, dy.$$

3) Stabilire, calcolando i seguenti integrali, se sussiste l'uguaglianza

$$\int_{A \cup B} \left(\int_B f(x, y)\, dy \right) dx \; = \int_B \left(\int_{A \cup B} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Analisi Matematica 3 prof. Antonio Greco Passaggio al limite

Problemi

1) Data una funzione misurabile e non negativa $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, stabilire se

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Suggerimento: applicare il teorema della convergenza monotona alla successione $f_k(x) = f(x)\, \chi_{(-\infty,k)}(x)$, dove $\chi_{(-\infty,k)}$ denota la funzione caratteristica dell'intervallo $(-\infty, k)$.

2) Si considerino le funzioni non negative $f_k\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ date da

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 + (-1)^k, & \text{se } x \in (-\infty, 0); \\ 1 - (-1)^k, & \text{se } x \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Stabilire, calcolando gli integrali, se sussiste la disuguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\liminf_{k \to +\infty} f_k(x) \Big)\, dx \le \liminf_{k \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\, dx.$$