Una misura della Probabilità

- Data una Prova che genera k eventi elementari
- $E_1, \ldots, E_k$ necessari ,
- $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k = I$,
- incompatibili a due a due

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{per ogni } i \neq j$$

ed equiprobabili

$$P(E_1) = P(E_2) = \cdots = P(E_k)$$

Una misura della Probabilità

- Dai postulati si deduce univocamente la misura della probabilità per ciascuno di essi

$$\boxed{P(E_i) = \frac{1}{k}}$$

$$\text{per ogni } i = 1, 2, \cdots, k$$

Il postulato empirico del caso

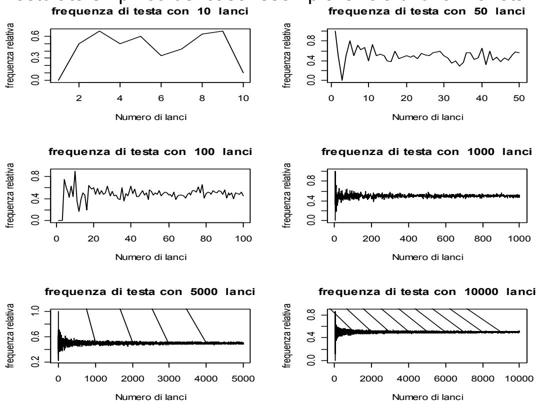
- In una successione di prove, ripetute molte volte nelle stesse condizioni, ogni evento si presenta con una frequenza relativa quasi uguale alla sua probabilità;

la differenza tra frequenza relativa e probabilità di un evento tende ad annullarsi all'aumentare delle prove.

osservazioni

1) la frequenza è un concetto ***a posteriori***, cioè si calcola *dopo* aver compiuto l'esperimento, mentre la probabilità è un concetto ***a priori***, cioè si calcola *prima* dell'esperimento e senza che sia necessario effettuarlo;
2) nella teoria della probabilità alla parola "caso" non si dà il significato che gli affida il linguaggio comune; per lo statistico, in un esperimento concreto, **"caso"** è l'insieme di quei fattori che egli non ritiene preponderanti nel determinare il risultato della prova;
3) la "tendenza" della frequenza relativa verso la probabilità di un evento non deve essere interpretata nel senso dell'analisi matematica (cioè come il limite di una successione); essa scaturisce solo da una universale convinzione circa il comportamento degli eventi casuali.

Postulato empirico del caso: esempio lancio di una moneta



Schema logico per le applicazioni

- 1. Individuare correttamente la prova, quindi gli eventi elementari verificando se sono necessari, incompatibili ed equiprobabili in modo da applicare la "regola" trovata precedentemente.
- 2. Distinguere correttamente se gli eventi elementari consistono in un solo elemento, o, invece, consistono in più elementi, ed indicarli con simboli di agevole interpretazione.
- 3. Esplicitare gli eventi complessi di cui si vuole calcolare la probabilità come unione, intersezione, o negazione degli eventi elementari sopra individuati.

Schema logico per le applicazioni

- 4. Per l'unione di più eventi, chiedersi se sono incompatibili ricordando che:

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$A \cap B \neq \emptyset \quad \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

E le loro ovvie generalizzazioni per più di due eventi.

Schema logico per le applicazioni

- 5. Per l'intersezione di due eventi, chiedersi se sono indipendenti ricordando che:

$$A \text{ e } B \text{ indipendenti} \quad \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$$

$$A \text{ e } B \text{ non indipendenti} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B \mid A)$$

Calcolo delle probabilità partendo da una tabella di dati osservati

Supponiamo di avere un numero elevato di osservazioni riassunte in una tabella

	reddito		
età	<25000	25000-50000	>50000
<30	**5%**	**12%**	**10%**
30--50	**14%**	**22%**	**16%**
>50	**8%**	**10%**	**3%**

Possiamo considerare le frequenze relative come un'approssimazione delle probabilità.

Calcolo delle probabilità partendo da una tabella di dati osservati

Consideriamo i totali di riga e di colonna ed esprimiamo le percentuali in frequenze relative

	reddito		
età	<25000	25000-50000	>50000
<30	**5%**	**12%**	**10%**
30--50	**14%**	**22%**	**16%**
>50	**8%**	**10%**	**3%**

	reddito			
età	<25000	25000-50000	>50000	
<30	**5%**	**12%**	**10%**	27%
30--50	**14%**	**22%**	**16%**	52%
>50	**8%**	**10%**	**3%**	21%
	27%	44%	29%	100%

	reddito			
età	<25000	25000-50000	>50000	
<30	**0.05**	**0.12**	**0.10**	0.27
30--50	**0.14**	**0.22**	**0.16**	0.52
>50	**0.08**	**0.10**	**0.03**	0.21
	0.27	0.44	0.29	1.00

Possiamo considerare le frequenze relative come un'approssimazione delle probabilità.

definisco

- A= un individuo ha reddito maggiore di 50000
- B= un individuo ha + di 30 anni

mi chiedo :

$P(A)$?

$P(B)$?

$P(A \cap B)$?

$P(A \cup B)$?

$P(B \mid A)$?

Definiamo tutti i possibili eventi

E_1 = individuo minore di 30 anni e con reddito inferiore a 25000

E_2 = individuo tra 30 e 50 anni e con reddito inferiore a 25000

E_3 = individuo > 50 anni e con reddito inferiore a 25000

E_4 = individuo minore di 30 anni e con reddito tra 25000 e 50000

E_5 = individuo tra 30 e 50 anni e con reddito tra 25000 e 50000

E_6 = individuo > di 50 anni e con reddito tra 25000 e 50000

E_7 = individuo minore di 30 anni e con reddito > 50000

E_8 = individuo tra 30 e 50 anni e con reddito > 50000

E_9 = individuo > di 50 anni e con reddito > 50000

Considero come probabilità le frequenze relative

$P(E_1) = 0.05$ frequenza relativa di
individui con età minore di 30 anni
e con reddito inferiore a 25000

$P(E_2) = 0.14$ frequenza relativa di
individui tra 30 e 50 anni
e con reddito inferiore a 25000

$P(E_3) = 0.08$ frequenza relativa di
individui con età maggiore di 50 anni
e con reddito inferiore a 25000

$P(E_4) = 0.12$ frequenza relativa di
individui con età minore di 30 anni
e con reddito tra 25000 e 50000

$P(E_5) = 0.22$ frequenza relativa di
individui tra 30 e 50 anni
e con reddito tra 25000 e 50000

$P(E_6) = 0.10$ frequenza relativa di
individui con età maggiore di 50 anni
e con reddito tra 25000 e 50000

$P(E_7) = 0.10$ frequenza relativa di
individui con età minore di 30 anni
e con reddito maggiore di 50000

$P(E_8) = 0.16$ frequenza relativa di
individui tra 30 e 50 anni
e con reddito maggiore di 50000

$P(E_9) = 0.03$ frequenza relativa di
individui con età maggiore di 50 anni
e con reddito maggiore di 50000

Calcolo delle probabilità partendo da una tabella di dati osservati

Come derivare dalla tabella $P(A)$?

	reddito			
età	*<25000*	*25000-50000*	*>50000*	
<30	**0.05**	**0.12**	**0.10**	0.27
30--50	**0.14**	**0.22**	**0.16**	0.52
>50	**0.08**	**0.10**	**0.03**	0.21
	0.27	0.44	0.29	1.00

La somma delle celle in rosso è proprio la risposta

$$P(A) = 0.29$$

Calcolo delle probabilità partendo da una tabella di dati osservati

Come derivare dalla tabella $P(B)$?

	reddito			
età	*<25000*	*25000-50000*	*>50000*	
<30	**0.05**	**0.12**	**0.10**	0.27
30--50	**0.14**	**0.22**	**0.16**	0.52
>50	**0.08**	**0.10**	**0.03**	0.21
	0.27	0.44	0.29	1.00

La somma delle celle in rosso è proprio la risposta

La somma delle celle in arancione ovviamente danno la stessa risposta

$$P(B) = 0.73$$

Calcolo delle probabilità partendo da una tabella di dati osservati

Come derivare dalla tabella $P(A \cap B)$?

	reddito			
età	*<25000*	*25000-50000*	*>50000*	
<30	**0.05**	**0.12**	**0.10**	0.27
30--50	**0.14**	**0.22**	**0.16**	0.52
>50	**0.08**	**0.10**	**0.03**	0.21
	0.27	0.44	0.29	1.00

La somma delle celle in rosso è proprio la risposta perché sono le celle che soddisfano le condizioni richieste

$$P(A \cap B) = 0.19$$

Calcolo delle probabilità partendo da una tabella di dati osservati

Come derivare dalla tabella $P(A \cup B)$?

	reddito			
età	*<25000*	*25000-50000*	*>50000*	
<30	**0.05**	**0.12**	**0.10**	0.27
30--50	**0.14**	**0.22**	**0.16**	0.52
>50	**0.08**	**0.10**	**0.03**	0.21
	0.27	0.44	0.29	1.00

La somma delle celle in rosso è proprio la risposta

$$P(A \cup B) = 0.83$$

Calcolo delle probabilità partendo da una tabella di dati osservati

Come derivare $P(A \cup B)$
applicando il principio delle probabilità totali?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 0.29 + 0.73 - 0.19 = 0.83$$

$$P(A \cup B) = 0.83$$

Calcolo delle probabilità partendo da una tabella di dati osservati

Come derivare dalla tabella $P(B \mid A)$?

	reddito			
età	<25000	25000-50000	>50000	
<30	**0.05**	**0.12**	**0.10**	0.27
30--50	**0.14**	**0.22**	**0.16**	0.52
>50	**0.08**	**0.10**	**0.03**	0.21
	0.27	0.44	0.29	1.00

La somma delle celle in rosso diviso la cella in arancione è proprio la risposta.
E' la probabilità condizionata!

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.19}{0.29} = 0.66$$

Calcolo delle probabilità partendo da una tabella di dati osservati

Come derivare $P(A \cap B)$
applicando il principio delle probabilità composte?

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) =$$
$$= 0.29 \cdot 0.66 = 0.19$$

Si noti anche che…

$$P(A) = \frac{p(A \cap B)}{P(B \mid A)} = \frac{0.19}{0.66} = 0.29$$

riepilogando…

$$P(A) = 0.29$$
$$P(B) = 0.73$$
$$P(A \cup B) = 0.83$$
$$P(A \cap B) = 0.19$$
$$P(B \mid A) = 0.66$$

Il teorema di Bayes

Siano dati m eventi necessari ed incompatibili

$$H_1, H_2, \cdots, H_m$$

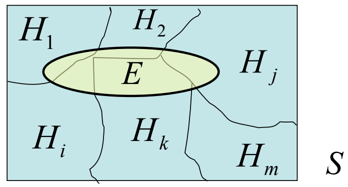
con $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_m = S$ **Necessari**

e $H_i \cap H_j = \emptyset \qquad \forall i \neq j$ **Incompatibili 2 a 2**

Sia E un evento incluso in S, cioè

$$E \subset S$$

Il teorema di Bayes



$$E = E \cap S = E \cap (H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_m) =$$

$$= (E \cap H_1) \cup (E \cap H_2) \cup \cdots \cup (E \cap H_m)$$

$$\Longrightarrow$$

Il teorema di Bayes

$$P(E) = P\left[(E \cap H_1) \cup (E \cap H_2) \cup \cdots \cup (E \cap H_m)\right] =$$

$$= P(E \cap H_1) + P(E \cap H_2) + \cdots + P(E \cap H_m) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} P(E \cap H_j) = \boxed{\sum_{j=1}^{m} P(H_j) P(E \mid H_j)}$$

Il teorema di Bayes

Se siamo interessati a :

$$P(H_i \mid E) ???$$

$$P(H_i \mid E) = \frac{P(H_i \cap E)}{P(E)} =$$

$$\boxed{= \frac{P(H_i) P(E \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(H_j) P(E \mid H_j)}}$$

Il teorema di Bayes

Cosa rappresentano le singole probabilità?

$P(H_i) =$ **Probabilità a Priori**

$P(E \mid H_i) =$ **Probabilità Probative o Verosimiglianze**

$P(H_i \mid E) =$ **Probabilità a Posteriori**

Con questo teorema si risolvono i problemi inversi, cioè: Dato un effetto, si vuole risalire alla causa!

Il teorema di Bayes

Ipotizziamo due possibili cause per l'evento E, cioè_

$P(H_1 \mid \mathrm{E})$ *e* $P(H_0 \mid \mathrm{E})$

Se $P(H_1 \mid E) > P(H_0 \mid E) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{P(H_1)P(E \mid H_1)}{P(H_0)P(E \mid H_0) + P(H_1)P(E \mid H_1)} >$$

$$> \frac{P(H_0)P(E \mid H_0)}{P(H_0)P(E \mid H_0) + P(H_1)P(E \mid H_1)} \Rightarrow$$

Il teorema di Bayes

$$\Rightarrow \frac{P(H_1)P(E \mid H_1)}{\sum_j P(H_j)P(E \mid H_j)} > \frac{P(H_0)P(E \mid H_0)}{\sum_j P(H_j)P(E \mid H_j)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(H_1)P(E \mid H_1) > P(H_0)P(E \mid H_0) \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{P(H_1)P(E \mid H_1)}{P(H_0)P(E \mid H_0)} > 1}$$

Il teorema di Bayes

$\dfrac{P(H_1)}{P(H_0)} =$ **Rapporto tra Probabilità A priori o *a priori odds***

$\dfrac{P(E \mid H_1)}{P(E \mid H_0)} =$ **Rapporto tra Verosimiglianze o *Fattore di Bayes***

Il teorema di Bayes

Se $\frac{P(H_1)}{P(H_0)} \sim 1 \Rightarrow$ **Il fattore di Bayes è >1 ed è quello che ci fa propendere per H_1**

Se $\frac{P(E\,|\,H_1)}{P(E\,|\,H_0)} \sim 1 \Rightarrow$ **La scelta per H_1 dipende principalmente dall' "a priori odds" che risulta >1**