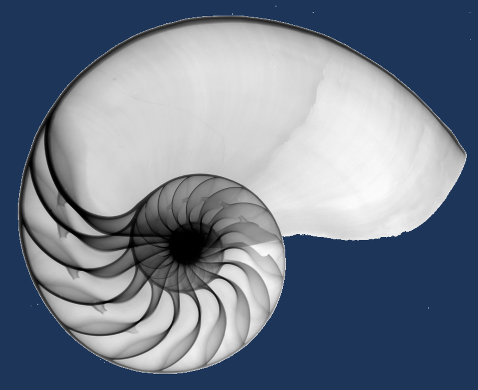
La portata di una figura piana



Antonio Greco
greco@unica.it

Gruppo di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica e Informatica

Il teorema di Pitagora e la distanza fra due punti

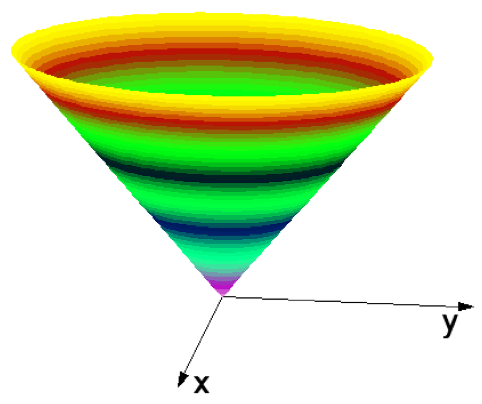
La distanza tra due punti $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ del piano cartesiano, di coordinate $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1})$ e $(\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2})$, è espressa dalla formula

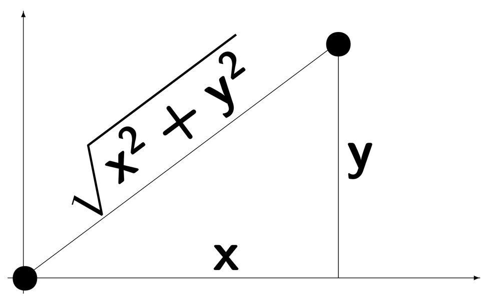
$$\mathrm{dist}(\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}) = \sqrt{(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2})^2 + (\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2})^2}\,.$$

In particolare, la distanza del punto $\mathbf{P}$ di coordinate $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dall'origine è data dalla funzione

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}$$

il cui grafico (qui a destra) è un cono infinitamente alto, con il vertice nell'origine





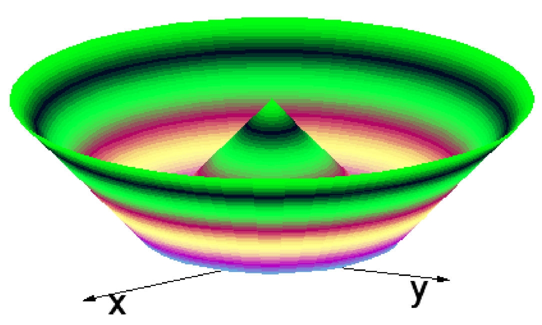
La formula che esprime la distanza fra due punti si può vedere come una moderna formulazione del teorema di Pitagora.

La distanza di un punto dal contorno di una figura piana

Il contorno di una figura piana $\mathbf{\Omega}$ si suole indicare con $\partial\mathbf{\Omega}$. La distanza di un punto $\mathbf{P}$ di coordinate $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ da $\partial\mathbf{\Omega}$ è la distanza di $\mathbf{P}$ da quei punti del contorno che risultano più vicini a $\mathbf{P}$.

Per esempio, se il punto $\mathbf{P}$ coincide con l'origine, dunque $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, e se $\mathbf{\Omega}$ è il disco ivi centrato e di raggio $\mathbf{R}$, allora tutti i punti della circonferenza $\partial\mathbf{\Omega}$ sono equidistanti da $\mathbf{P}$, e risulta

$$\mathrm{dist}(\mathbf{P},\, \partial\mathbf{\Omega}) = \mathbf{R}.$$



Facendo variare le coordinate $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, e lasciando fissa la figura $\mathbf{\Omega}$, si definisce una *funzione di due variabili* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ il cui grafico è accennato qui a fianco.

Vertici, spigoli e differenziabilità

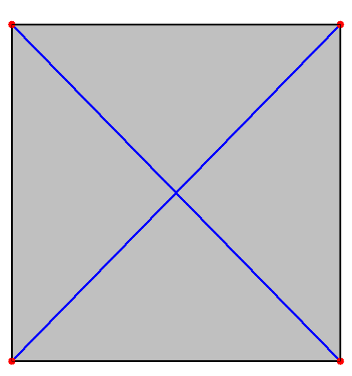
Il grafico della funzione distanza dal contorno di una figura piana può presentare dei vertici, degli spigoli, o comunque non essere *liscio* in qualche punto: si dice che la funzione distanza, in tali punti, *non è differenziabile*.

Si dimostra che la distanza dal contorno non è differenziabile in un punto $\mathbf{P}$, interno o esterno alla figura, se e solo se i punti del contorno più vicini a $\mathbf{P}$ sono più di uno

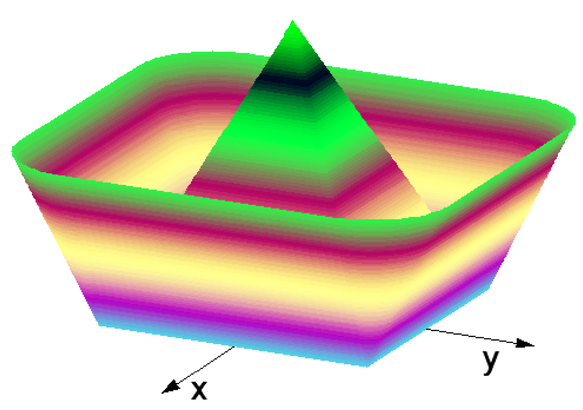
Lo scheletro di una figura piana

I punti interni (dunque non sul contorno) di una figura piana $\mathbf{\Omega}$, in corrispondenza dei quali la funzione distanza dal contorno non è differenziabile costituiscono *l'insieme singolare* $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Omega})$ di tale figura.

Possono esserci dei punti che, pur non appartenendo all'insieme singolare, hanno distanza nulla da esso: ciò capita, ad esempio, col quadrato e con l'ellisse. Aggiungendo tali punti all'insieme singolare si ottiene lo scheletro di $\mathbf{\Omega}$, che si indica con $\overline{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{\Omega})$.



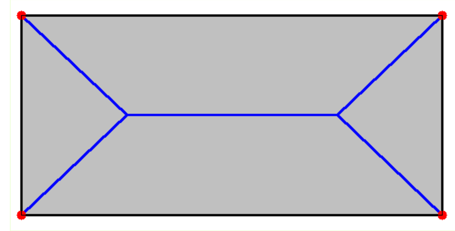
L'insieme singolare (in blu) del quadrato. Aggiungendo i quattro punti rossi si ottiene lo *scheletro*.



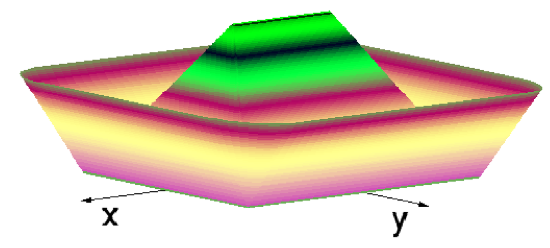
La distanza dal contorno del quadrato

Alcune figure e i loro scheletri

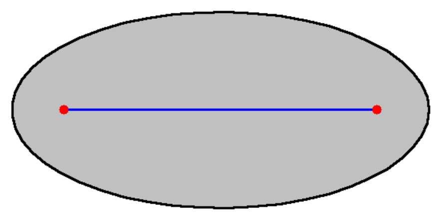
Cercando lo *scheletro* di una figura piana si possono avere delle sorprese...



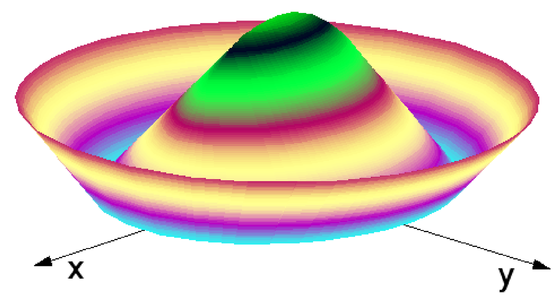
L'insieme singolare (in blu) del rettangolo: non coincide con le diagonali!



La distanza dal contorno del rettangolo



L'insieme singolare (in blu) dell'ellisse. Aggiungendo i due punti rossi si ottiene lo *scheletro*.



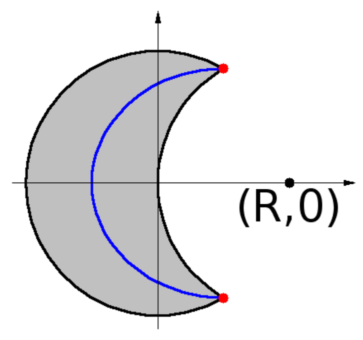
La distanza dal contorno dell'ellisse

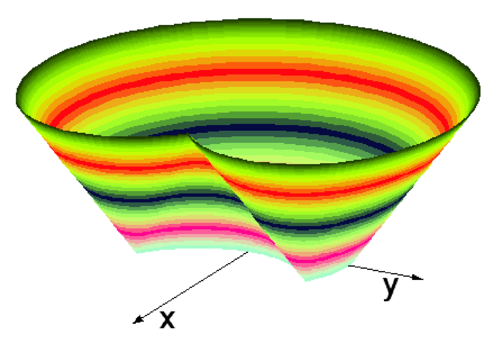
Per i più curiosi: gli estremi dello scheletro dell'ellisse (i due punti rossi) non sono, in generale, i fuochi! Infatti la distanza focale dell'ellisse di semiassi $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} < \mathbf{a}$, vale $\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2}$, mentre lo scheletro è lungo $\mathbf{2}\,\frac{\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}}$.

La portata di una figura piana

Per tutte le figure fin qui considerate, la distanza dal contorno non presenta né vertici né spigoli nei punti *esterni* alla figura stessa: ciò è dovuto al fatto che si tratta di *figure convesse*, le quali hanno *portata infinita*.

Quando una figura non è convessa, la funzione distanza dal contorno può ancora essere differenziabile nei punti esterni alla figura, entro un margine il cui spessore si chiama *portata*.





Ad esempio, togliendo dal cerchio centrato nell'origine e di raggio $\mathbf{R}$ tutti i punti che distano meno di $\mathbf{R}$ dal punto di coordinate $(\mathbf{R}, \mathbf{0})$, si ottiene una mezzaluna che ha portata uguale a $\mathbf{R}$.

La figura a destra mostra la comparsa di uno spigolo in corrispondenza del punto di coordinate $(\mathbf{R}, \mathbf{0})$. A proposito... lo scheletro della mezzaluna (in blu nella figura a sinistra) è un arco di circonferenza?

Le equazioni alle derivate parziali

La funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$ distanza del punto di coordinate $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dall'origine soddisfa l'equazione differenziale $\mathbf{\Delta}_\infty \mathbf{f}^{4/3} = \mathbf{4}^3/\mathbf{3}^4$ in tutto il piano: il simbolo $\mathbf{\Delta}_\infty$ denota l'operatore *infinito-laplaciano*, che è dato da

$$\mathbf{\Delta}_\infty \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}\,\partial \mathbf{y}}\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}}\right)^2$$

se $\mathbf{u}$ è una funzione sufficientemente regolare... ma siccome $\mathbf{f}^{4/3}$ non lo è proprio *nell'origine*, l'equazione si intende soddisfatta nel senso di viscosità, illustrato dai matematici Crandall, Ishii e Lions nel lavoro appresso citato.

Bibliografia

- M. G. Crandall, H. Ishii, P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order PDEs.* Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 1–67.
- G. Crasta, I. Fragalà, *Characterization of stadium-like domains via boundary value problems for the ∞-Laplacian.* Nonl. Anal. **133** (2016), 228–249.
- A. Greco, *Constrained radial symmetry for the infinity-Laplacian.* Nonlinear Anal. Real World Appl. **37** (2017), 239–248.

I grafici di questo poster sono stati tracciati con wxMaxima 16.04.2 e rifiniti con GIMP 2.8.18.
La colorazione segue le linee di livello della funzione distanza.