Gradiente, divergenza e rotore

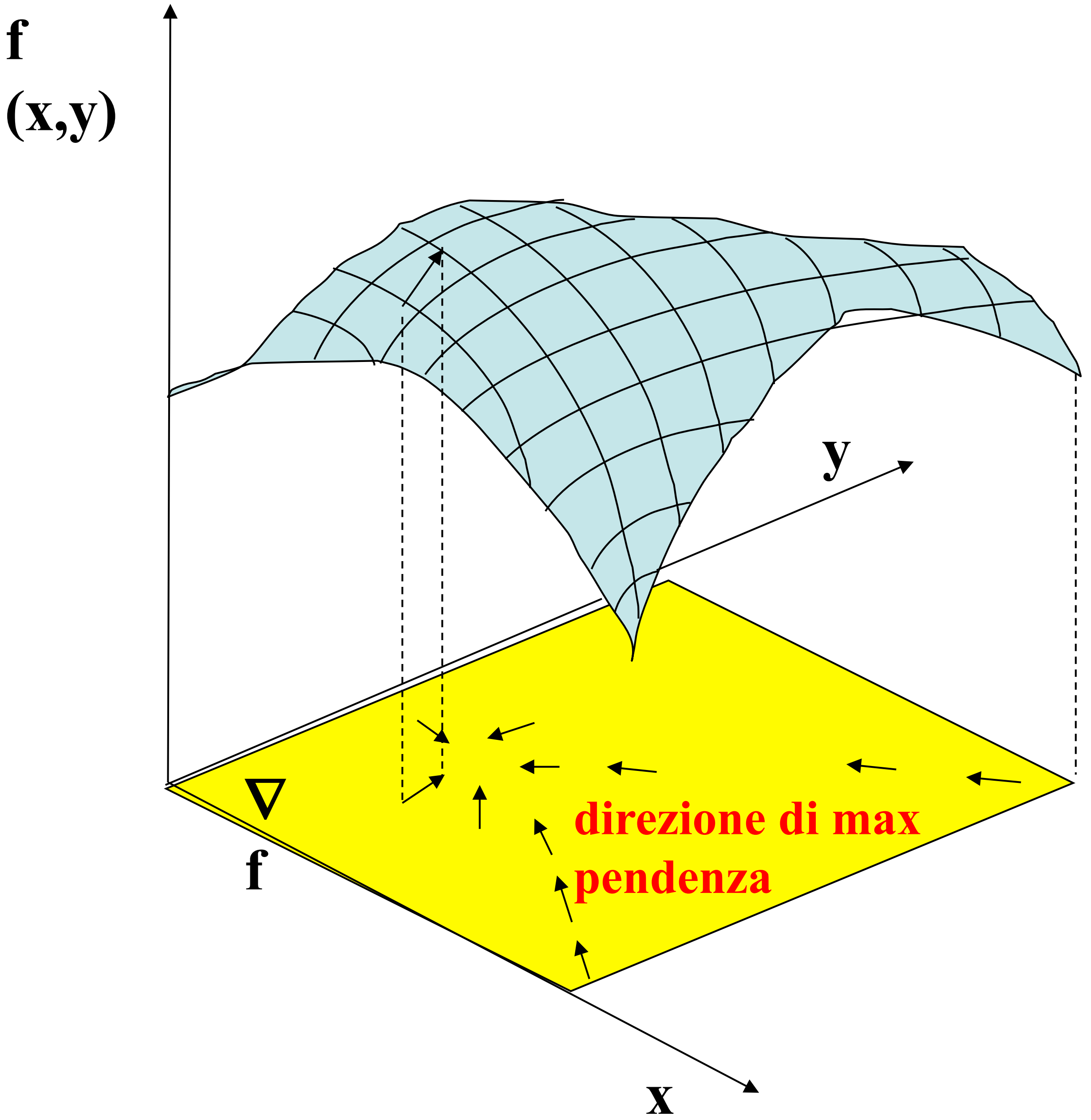
Gradiente di una funzione scalare della posizione

Sia f(x,y,z) una funzione scalare continua e derivabile delle coordinate costruiamo in ogni punto dello spazio un vettore le cui componenti x,y,z siano uguali alle derivate parziali della funzione f(x,y,z). Questo vettore prende il nome di **gradiente di f** (**grad f** o **∇f**)

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

∇f ci dice come varia la funzione f nell'intorno di un punto, la sua componente x è la derivata parziale di f rispetto ad x e indica quanto rapidamente varia f quando ci si muove lungo x.
La direzione di **∇f** in un punto qualsiasi è quella in cui, a partire da quel punto, ci si deve muovere per trovare l'incremento più rapido della funzione f.


f
(x,y)
y
∇
f
direzione di max
pendenza
x

Consideriamo ora la variazione del potenziale V tra (x,y,z) e (x+dx, y+dy, z+dz)

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Sia inoltre **ds** lo spostamento infinitesimo

$$d\vec{s} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

Ricordando che

$$dV = -\vec{E} \bullet d\vec{s}$$

Si ottiene

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\overrightarrow{grad} V$$

Il campo elettrico va da zone a V+ a zone a V-, il gradiente di V invece è un vettore con verso concorde a quello dei V crescenti

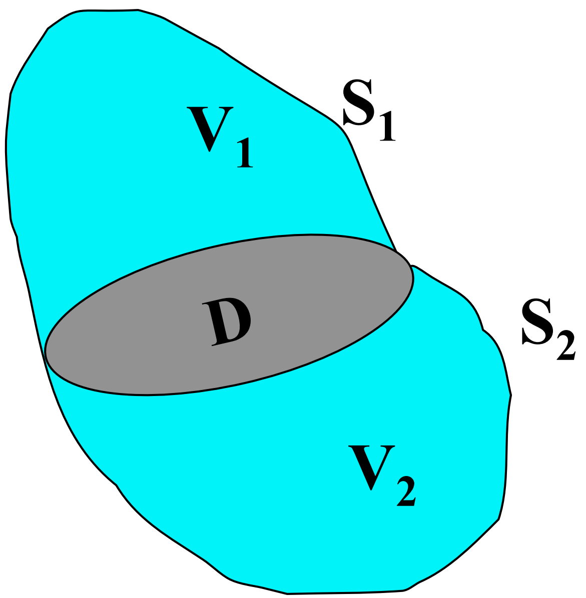
$$V = -kxy \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y\right)(-kxy) = k\left(y\vec{u}_x + x\vec{u}_y\right)$$

Divergenza di una funzione vettoriale F(x,y,z)

Consideriamo un volume finito V di forma qualsiasi e superficie S, il flusso della funzione **F** attraverso S vale

$$\Phi = \int_S \vec{F} \bullet d\vec{S}$$

Dividiamo ora il volume V in due parti tramite un diaframma D in modo da ottenere i due volumi V_1 e V_2 delimitati da S_1 ed S_2, con S_1 ed $S_2 \supset D$



$$\Phi = \int_{S_1} \vec{F} \bullet d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{F} \bullet d\vec{S}_2$$

Suddivido poi il volume in parti sempre più piccole in modo da avere integrali di superficie sempre più piccoli.

$$\Phi = \int_S \vec{F} \bullet d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \vec{F} \bullet d\vec{S}_i$$

L'obiettivo è quello di ottenere qualcosa che sia caratteristico di una regione molto piccola, ovvero una caratteristica locale o puntuale dello spazio. Ritorna pertanto utile ricorrere alla seguente quantità

$$\frac{\int_{S_i} \vec{F} \bullet d\vec{S}_i}{V_i}$$

Questo rapporto tende, procedendo per suddivisioni successive, ad un limite che costituisce una proprietà caratteristica della funzione **F** in quell'intorno e che prende il nome di divergenza di **F**

$$div\vec{F} = \lim_{V_i \to 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \vec{F} \bullet d\vec{S}_i \qquad (1)$$

Naturalmente si dà per scontato che questo limite esista e che esso sia indipendente da come si fa la suddivisione dello spazio.

Nella pratica la div**F** è il flusso uscente da V_i per unità di volume nel caso limite in cui V_i sia infinitesimo.
La div**F** è una grandezza scalare ed è funzione delle coordinate x,y,z.

$$\int \vec{F} \bullet d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \vec{F} \bullet d\vec{S}_i = \sum_{i=1}^{N} V_i \left[\frac{\int_{S_i} \vec{F} \bullet d\vec{S}_i}{V_i} \right]$$

Per $N \rightarrow \infty$ e $V_i \rightarrow 0$, il termine tra parentesi quadre tende alla div**F** e $\Sigma V_i \rightarrow \int dV$, quindi

$$\int_S \vec{F} \bullet d\vec{S} = \int_V div\vec{F} dV$$

Quest'ultima relazione è il **Teorema di Gauss** o della divergenza ed è valido per ogni campo vettoriale per cui la relazione (1) ha un limite.
Nel caso in cui il campo vettoriale **F** si il campo elettrico **E** abbiamo

$$\int_S E \bullet d\vec{S} = \int_V div\vec{E} dV$$

$$\int_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \forall \text{ punto}$$

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$div\vec{E} > 0 \rightarrow \text{flusso netto uscente nell'intorno}$$

Laplaciano

Sappiamo che

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z \right)$$

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

La componente x di E è $E_x = -\partial V/\partial x$, analogamente per le componenti E_y ed E_z, quindi

$$div\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right) =$$

$$= -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = -div\,\overrightarrow{grad}V$$

Definiamo la seguente quantità

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplaciano in coordinate cartesiane ortonormali

Il Laplaciano in coordinate cartesiane può anche essere scritto sotto forma di prodotto scalare.

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplaciano = divergenza del gradiente di...

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Quest'ultima equazione è l' **equazione di Poisson** che ha validità locale e che in modo esplicito si scrive

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Equazione di Laplace

Se $\rho = 0$ allora il potenziale V deve soddisfare all'**equazione di Laplace**

$$\nabla^2 V = 0$$

Le soluzioni di questa equazione sono dette funzioni armoniche e godono della proprietà seguente:

se V(x,y,z) soddisfa l'equazione di Laplace, allora il valor medio di V sulla superficie di una sfera qualunque (anche non piccola) è uguale al valore di V calcolato nel centro della sfera.

Un'altra proprietà ci dice che è impossibile realizzare un campo elettrostatico capace di mantenere una particella carica in equilibrio stabile nel vuoto.

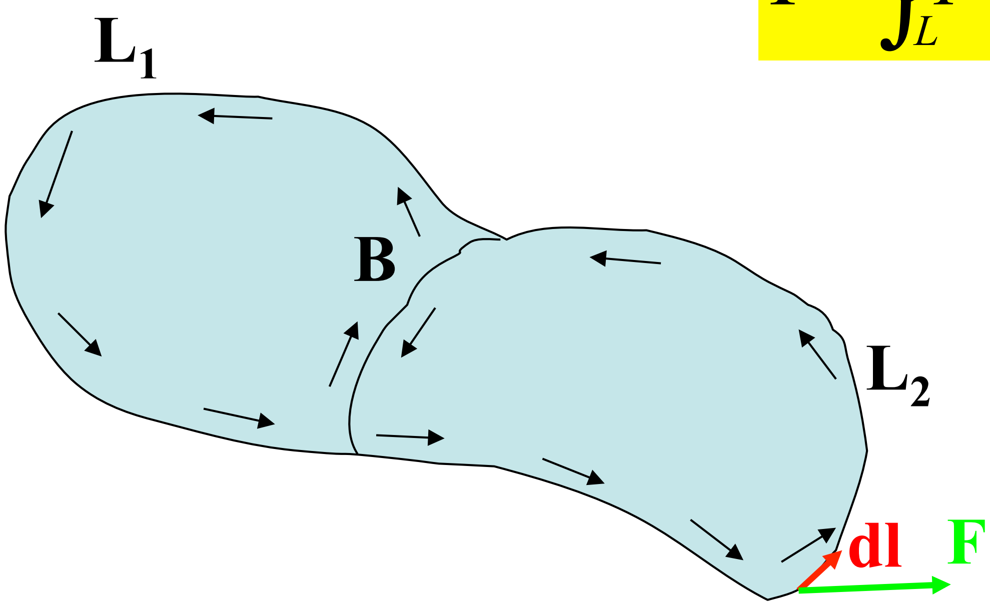
Rotore di una funzione vettoriale

Facciamo l'integrale di linea di un campo vettoriale F(x,y,z) lungo un percorso chiuso L

$$\Gamma = \oint_L \vec{F} \bullet d\vec{l}$$

circuitazione

d**l** = spostamento infinitesimo



La linea di integrazione L non giace necessariamente in un piano
Il procedimento ricalca quello seguito per la divergenza
Suddivido L in L_i sempre più piccole

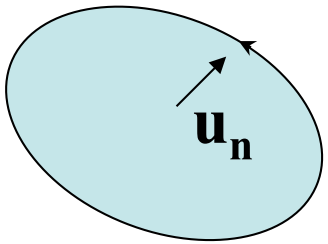
$$\oint_L \vec{F} \bullet d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} \oint_{L_i} \vec{F} \bullet d\vec{l}_i$$

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i$$

In questo caso torna utile considerare il rapporto tra la circuitazione e l'area ad essa associata. Tuttavia l'area è un vettore e si deve decidere come orientarla.

$\mathbf{u_n}$ = versore normale alla superficie S_i / $\mathbf{u_n}$ resti costante al tendere a zero dell'area dell'elemento che circonda un certo punto P, allora consideriamo il seguente limite

$$\lim_{S_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{S_i} \text{ oppure } \lim_{S_i \to 0} \frac{\oint_{L_i} \vec{F} \bullet d\vec{l}_i}{S_i}$$



Il verso di $\mathbf{u_n}$ è quello di percorrenza della linea L (vite destrorsa)

Il limite che otteniamo è uno scalare associato al punto P nel campo vettoriale **F** e alla direzione $\mathbf{u_n}$. La grandezza ottenuta risulta quindi un vettore

$$\left(rot\vec{F}\right)\bullet \vec{u}_{n_i} = \lim_{S_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{S_i} = \lim_{S_i \to 0} \frac{\oint_{L_i} \vec{F} \bullet d\vec{l}_i}{S_i}$$

Teorema di Stokes

$$\Gamma = \oint_L \vec{F} \bullet d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i = \sum_{i=1}^{N} S_i \left(\frac{\Gamma_i}{S_i}\right)$$

Per $N \to \infty$ e $S_i \to 0$, il termine tra parentesi tende a $(\mathrm{rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{u_{ni}}$

$$\sum_{i=1}^{N} S_i \left(\frac{\Gamma_i}{S_i}\right) = \sum_{i=1}^{N} S_i \left(rot\vec{F}\right)\bullet \vec{u}_{n_i} \to \int_S rot\vec{F} \bullet d\vec{S}$$

quindi

$$\oint_L \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_S \left(rot\vec{F}\right)\bullet d\vec{S}$$ **Teorema di Stokes**

In coordinate cartesiane abbiamo

$$rot\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{u}_x =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

infine

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

Un campo vettoriale con **rot ≠ 0** ha circolazione o vorticosità.
Per il campo elettrostatico si ha sempre rot**E** = 0 **condizione sufficiente perché il campo elettrostatico sia conservativo**

Gauss

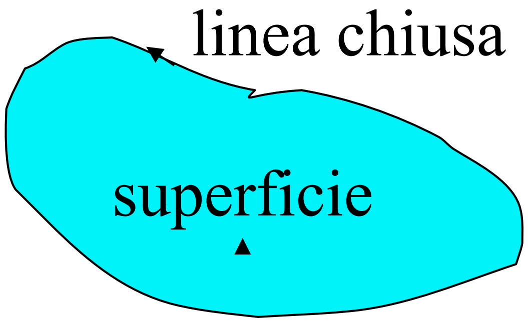
superficie che limita un volume

$$\int_S \vec{F} \bullet d\vec{S} = \int_V div\vec{F} dV$$

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \bullet \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

Stokes

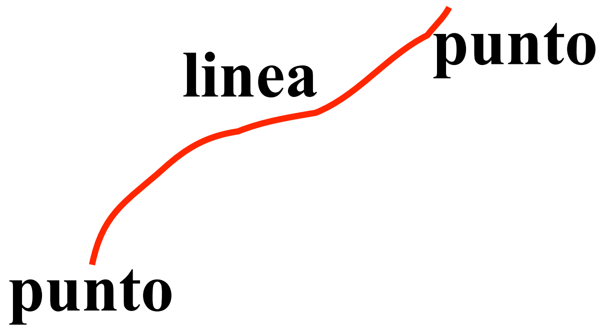


linea che limita una superficie

$$\oint_L \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_S rot\vec{F} \bullet d\vec{S}$$

$$rot\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

Grad



punti che limitano una linea

$$V_2 - V_1 = \int_L \overrightarrow{gradV} \bullet d\vec{l}$$

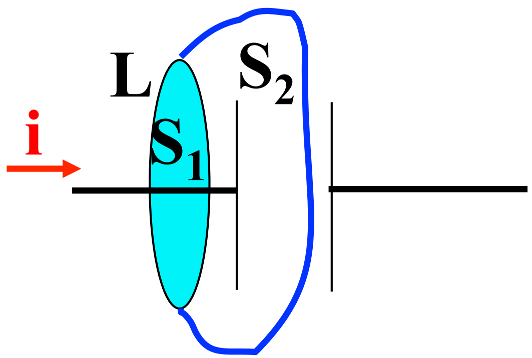
$$\overrightarrow{gradV} = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z = \vec{\nabla} V$$

Equazioni di Maxwell

Esaminiamo la legge di Ampére

$$\oint_L \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 i = \mu_0 \int_S \vec{j} \bullet d\vec{S}$$

Prendiamo un condensatore e consideriamo il flusso della densità di corrente attraverso due superfici, entrambe delimitate dalla linea di integrazione L, ma con S_1 che non contiene alcuna armatura ed S_2 contenente la prima armatura del condensatore. (carica)



Se consideriamo la superficie S_1 delimitata dalla linea L ed applichiamo Ampére, abbiamo che la circuitazione del campo magnetico B risulta proporzionale alla corrente i che scorre nel circuito ed arriva alla prima armatura del condensatore. Se invece consideriamo S_2, delimitata da L, abbiamo in entrata la corrente i, ma non registriamo alcun flusso uscente

Per mantenere tutto consistente dobbiamo ipotizzare, ed è quanto fece Maxwell, che tra le armature del condensatore vi sia una corrente, non convenzionale, legata al variare del campo elettrico nel condensatore. A questa corrente si dà il nome di corrente di spostamento i_s.
Pertanto la legge di Ampére viene riscritta e prende il nome di legge di Ampére - Maxwell

$$\oint_L \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \left(i_c + i_s\right)$$

Per collegare i_s al campo elettrico partiamo dal teorema di Gauss

$$\Phi_{\vec{E}_{tot}} = \oint_S \vec{E} \bullet \vec{u}_n dS = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{\vec{E}_{tot}}}{dt} = i_s$$

In termini differenziali si ha

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

mentre in termini integrali abbiamo

$$\oint_L \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 i_c + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E} \bullet \vec{u}_n dS$$

Riassumendo

$$\oint_S \vec{E} \bullet \vec{u}_n dS = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B} \bullet \vec{u}_n dS = 0 \qquad div\vec{B} = 0$$

$$\oint_L \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \bullet \vec{u}_n dS \qquad rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E} \bullet \vec{u}_n dS \qquad rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$