MATRICI E LORO ALGEBRA

$\Rightarrow$ RAPPRESENTAZIONE DI KET / BRA
- OPERATORI

$\Rightarrow$ ISOMORFISMO TRA

SPAZIO VETTORIALE $V^N \sim \mathbb{C}^N$

ALGEBRA OPERATORI $\sim$ ALGEBRA MATRICI

$\Rightarrow$ POSSIAMO SEMPRE LAVORARE CON

KET / BRA OPERATORI USANDO

L'ALGEBRA DELLE MATRICI

MATRICI E LORO ALGEBRA

- NASCE DALLA GENERALIZZAZIONE DEI CONCETTI DI SCALARE E VETTORE

- SCALARE

a NUMERO (COMPLESSO)

- VETTORE

$a_i = (a_1 \dots a_n)$

N-PLA ORDINATA DI NUMERI COMPLESSI

- MATRICE $m \times n$

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

DISPOSIZIONE RETTANGOLARE DI NUMERI COMPOSTA DA m RIGHE ED n COLONNE

i = INDICE DI RIGA
j = // DI COLONNA

- TENSORE DI RANGO N

DISPOZIONE DI NUMERI CON N INDICI

$$\underbrace{T_{ij\ldots\ldots}}_{N \text{ INDICI}}$$

- UN VETTORE PUO ESSERE CONSIDERATO COME UN CASO PARTICOLARE DI MATRICE:

(a) VETTORE $\boxed{\text{RIGA}}$

$$V_i = (V_1 \ldots V_m)$$

$\boxed{\text{MATRICE} \quad 1 \times M}$

(b) VETTORE COLONNA

$$V_j = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix}$$

MATRICE $m \times 1$

- UNA MATRICE È UN $\boxed{\text{TENSORE DI RANGO 2}}$

- UN VETTORE È UN $\boxed{\text{TENSORE DI RANGO 1}}$

ALGEBRA DELLE MATRICI

INDICHEREMO LE MATRICI SIA CON LETTERE MAIUSCOLE SENZA INDICI A, B, C OPPURE MINUSCOLE CON INDICI a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}

- $\boxed{\text{SOMMA DI MATRICI}}$

$$C = A + B$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

L'ELEMENTO ij DI C È OTTENUTO SOMMANDO GLI ELEMENTI CORRISPONDENTI ij DI A, B

L'ADDIZIONE È ASSOCIATIVA E COMMUTATIVA

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE

$B = \alpha A$

$b_{ij} = \alpha a_{ij}$

ASSOCIATIVA, COMMUTATIVA

ES. $\alpha = 3$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \alpha A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

- MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI

DEFINITA PER MATRICI $\underset{A}{\{N \times M\}}$ $\underset{B}{\{M \times P\}}$

$C = AB$

$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ $C = \{N \times P\}$

L'ELEMENTO ij DI C VIENE OTTENUTO MOLTIPLICANDO $\boxed{\text{LA RIGA } i \text{ DI } A \text{ PER LA COLONNA } j \text{ DI } B}$

ES.
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

LA MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI NON È COMMUTATIVA IN GENERE

$$AB \neq BA$$

$$[A,B] = AB - BA$$

MA È ASSOCIATIVA E DISTRIBUTIVA RISPETTO ALL'ADDIZIONE

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

MATRICE UNITÀ : $\mathbb{1} \Rightarrow \delta_{ik}$ $\quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & & \\ \cdots & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{1} \cdot A = A$ ELEMENTO NEUTRO

- TRACCIA DI UNA MATRICE

$$t = tr A = trace(A) \Rightarrow \text{SCALARE}$$

$$t = \sum_i a_{ii}$$

SOMMA DEGLI ELEMENTI LUNGO LA DIAGONALE

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$tr A = 3 + 1 = 4$$

$$tr(AB) = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} b_{ji} \right) = tr(BA)$$

IN PARTICOLARE

$$\mathrm{Tr}\,[A,B] = \mathrm{tr}\,[AB - BA] = 0$$

- PIÙ IN GENERALE SE $A^T = -A$
  $\mathrm{TR}\, A = 0$

- TRASPOSTA DI UNA MATRICE A

$$\tilde{A}$$

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$$

SI OTTIENE SCAMBIANDO RIGHE CON COLONNE

- $(\widetilde{AB}) = \tilde{B}\tilde{A}$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

MATR. SIM. $A = \tilde{A}$ ANTIS. $\tilde{A} = -A$

- DETERMINANTE DI UNA MATRICE

DI UNA MATRICE QUADRATA SI PUÒ SEMPRE CALCOLARE IL DETERMINANTE

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- det A È UNO SCALARE DEFINITO DA

$$\det A = \frac{1}{N!} \sum_{ijk\dots} \sum_{pqr} \varepsilon_{ijk\dots} \varepsilon_{pqr\dots} a_{ip} a_{jq} a_{kr} \dots$$

DOVE $\varepsilon_{ijk\dots}$ TENSORE DI LEVI CIVITA

$\varepsilon_{123\dots} = 1$

$\varepsilon_{\dots} = 1$ PERMUTAZIONI PARI

$\varepsilon_{\dots} = -1$ // DISPARI

- $\varepsilon_{ijk\dots}$ TENSORE COMPLETAMENTE ANTISIMMETRICO PER OGNI SCAMBIO DI INDIC

ESEMPI: $D=2$ $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$

$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$D=3$ ε_{ijk} $\begin{cases} \varepsilon_{123} = 1 \\ \varepsilon_{132} = -1 \\ \varepsilon_{312} = 1 \end{cases}$

- TENSORE $=0$ OGNIQUALVOLTA DUE INDICI UGUALI

$\varepsilon_{iji} = 0$

- SVILUPPO DI LAPLACE SECONDO RIGHE O COLONNE PER CALCOLARE

- ALGORITMO DI GAUSS

PROPRIETÀ

- $\det A = \det \tilde{A}$
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$
- $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \Longrightarrow$ SEGUE DA $A^{-1}A = \mathbb{1}$
- $\det \mathbb{1} = 1$
- $\det(S^{-1}AS) = \det A$
- $\det A_D = \prod_i \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_N$

$$A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

INVERSA DI UNA MATRICE A^{-1}

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}$$

- CALCOLO DELL'INVERSA USANDO I MINORI C_{ij}
- $$a^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} C_{ji}}{\det A}$$

- MATRICE INVERTIBILE SE E SOLO SE $\det A \neq 0$

- USO DEL TENSORE DI LEVI-CIVITA IN 3D PER ESPRIMERE IL PRODOTTO VETTORIALE

$$\bar{V} = \bar{a} \times \bar{b} \qquad \bar{a} = a_i \quad \bar{b} = b_i \qquad V = V_i$$

$$V_i = \sum_{kl} \varepsilon_{ikl} a_k b_l$$

$$\bar{V} = \nabla \times \bar{E} \qquad \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$V_i = \sum_{kl} \varepsilon_{ikl} \frac{\partial E_l}{\partial x^k}$$

USO DETERMINANTI

- RANGO r DI UNA MATRICE TRAMITE CALCOLO DEI MINORI ESTRATTI

- DIPENDENZA ED INDIPENDENZA LINEARE DI UN SET DI M VETTORI

- TRASPOSTA DI UNA MATRICE $\tilde{A}$ (A^T)

$A \to a_{ij}$ $\quad\quad \tilde{A} = a_{ji}$

- MATRICE SIMMETRICA

$\tilde{A} = A \quad \to \quad a_{ij} = a_{ji}$

- MATRICE ANTISIMMETRICA $\quad \tilde{A} = -A \quad \to \quad a_{ij} = -a_{ji}$

- MATRICE AGGIUNTA $\quad A^+$

$A^+ = \tilde{A}^*$

$B = CD$

$B^+ = D^+C^+$

$A \to a_{ij} \quad\quad A^+ = a_{ji}^*$

- MATRICE (ANTI) HERMITIANA

$A = A^+ \longrightarrow a_{ij} = a_{ji}^*$

$A = -A^+ \longrightarrow a_{ij} = -a_{ji}^*$

- SE A, B HERMITIANE $\quad C = [A,B] \Rightarrow C^+ = -C$, $\quad D = \{A,B\}$, $\; D^+ = D$

- MATRICE UNITARIA

$U^+ = U^{-1} \quad\quad U^+U = \mathbb{1}$

$\tilde{U}^* = U^{-1} \quad\quad \sum_k u^+_{ik} u_{kl} = \delta_{il}$

- MATRICE ORTOGONALE

$\tilde{U} = U^{-1} \quad\quad \tilde{U}U = \mathbb{1}$

FUNZIONI DI MATRICI

- DATA A MATRICE $N \times N$

SI PUÒ DEFINIRE $F(A) \in C^{\infty}$
COME SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR
IN $A=0$

$$F(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} A^m$$

ESEMPIO

$$B = e^{eA} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \mathbb{1}, \quad A^3 = A, \quad A^{2m} = \mathbb{1}, \quad A^{2m+1} = A$$

$$B = e^{eA} = \mathbb{1} + eA + \frac{1}{2} e^2 A^2 + \dots \frac{1}{2m!} (eA)^{2m}$$
$$+ \frac{1}{(2m+1)!} (eA)^{2m+1}$$

RACCOGLIAMO TERMINI PARI E DISPARI

$$B = \left[\mathbb{1} + \frac{1}{2} e^2 A^2 + \dots \frac{1}{2m!} (eA)^{2m} \dots\right] + \left[eA + \frac{1}{3} (eA)^3\right.$$
$$\left. + \dots \frac{1}{(2m+1)!} (eA)^{2m+1} + \dots\right] = \mathbb{1}\left[1 + \frac{1}{2} e^2 + \dots \frac{1}{2m!} e^{2m} \dots\right] +$$
$$+ A\left[e + \frac{1}{3!} e^3 + \dots \frac{1}{(2m+1)!} e^{2m+1}\right]$$

$\Rightarrow \cosh e$

$\Rightarrow \sinh e$

$$B = \cosh e\, \mathbb{1} + \sinh e\, A = \begin{pmatrix} \cosh e & 0 \\ 0 & \cosh e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sinh e \\ \sinh e & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh e & \sinh e \\ \sinh e & \cosh e \end{pmatrix}$$

- TRASFORMAZIONI DI SIMILITUDINE

$A' = S^{-1} A S \qquad a'_{iJ} = \sum_{kl} S^{-1}_{ik} a_{kl} S_{lJ}$

- TRASFORMAZIONI UNITARIE

$A' = U^+ A \cdot U \qquad a'_{iJ} = \sum_{kl} u^+_{ik} a_{kl} u_{lJ}$

- TRASFORMAZIONI ORTOGONALI

$A' = \tilde{R} A R \qquad a'_{iJ} = \sum_{kl} \tilde{r}_{ik} a_{kl} r_{lJ}$

INVARIANTI

$\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{tr}\, A'$
$\det A' = \det A$

- $\det A^+ = (\det A)^*$
- $U^+U = \mathbb{1} \Rightarrow \det(U^+U) = \det \mathbb{1} \Rightarrow |\det U|^2 = 1 \quad U = e^{i\theta}$
- $A^+ = A \Rightarrow \det A = (\det A)^* \Rightarrow \in \mathbb{R}$
- $A^+ = -A \Rightarrow \det A = -(\det A)^* \in \mathrm{Im}$
- $A^+ = A \quad \mathrm{Tr}\, A \in \mathbb{R}$
- $A^+ = -A \quad \mathrm{Tr}\, A \in \mathrm{Im}$
- $A = -\tilde{A} \Rightarrow \mathrm{Tr}\, A = 0, \quad \det A = 0$ PER N = DISPARI

MATRICE AS NON INVERTIBILE IN D. DISPARI

- $\ln \det A = \mathrm{Tr} \ln A \qquad U = e^{iA} \qquad U^+ = U^{-1} \quad A = A^+$

$\ln \det U = i\,\mathrm{tr}\, A \qquad i\theta = i\,\mathrm{tr}\, A \Rightarrow \theta = \mathrm{tr}\, A$

EQUAZIONI ED IDENTITÀ MATRICIALI

- INDICI <u>LIBERI</u> E INDICI SOMMATI (CONTRATTI)

$$A+B = CD + L$$

$$b_{ij} + a_{ij} = \Sigma_k \, c_{i\underline{k}} \, d_{\underline{k}j} + l_{ij}$$

LIBERI

CONTRATTI

- BILANCIAMENTO

IN OGNI TERMINE DEVONO ESSERE PRESENTI <u>TUTTI</u> E <u>SOLO</u> GLI STESSI INDICI LIBERI,

$$P = ABC + LS$$

$$p_{ij} = \Sigma_k a_{ik} \Sigma_e b_{ke} c_{ej} + \Sigma_k l_{ik} s_{kj}$$

- PRODOTTI ~~TRIPLE~~ DI PIÙ MATRICI

$$D = ABC \qquad D = A(BC)$$

$$\Downarrow$$

$$d_{ij} = \Sigma_k a_{ik} (BC)_{kj}$$

$$(BC)_{kj} = \Sigma_e b_{ke} c_{ej}$$

$$d_{ij} = \Sigma_k \Sigma_e a_{ik} b_{ke} c_{ej}$$

ANCORA

$$M = ABCD$$

$$M_{ij} = \sum_k a_{ik} \sum_\ell b_{k\ell} \sum_p c_{\ell p} d_{pj}$$

$$= \sum_{k\ell p} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell p} d_{pj}$$

- MATRICE UNITÀ $\mathbb{1}$ $\delta_{k\ell}$

$$\mathbb{1} A = A \cdot \mathbb{1} = A$$

$$\sum_\ell \delta_{k\ell} a_{\ell j} = \sum_\ell a_{k\ell} \delta_{\ell j} = a_{kj}$$

$\delta_{k\ell}$ TRASFORMA L'INDICE ℓ di a IN INDICE k

$$\sum_\ell \delta_{k\ell} a_{\ell j} = a_{kj}$$

[redacted]

$$A A^{-1} = \mathbb{1}$$

$$\sum_k a_{jk} a^{-1}_{k\ell} = \delta_{j\ell}$$

- IN UNA EQUAZIONE MATRICIALE POSSIAMO CAMBIARE SEMPRE NOME <u>CONTEMPORANEAMENTE</u> AGLI <u>STESSI</u> INDICI LIBERI O CONTRATTI

ES

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

$$c_{pq} = \sum_k a_{pk} b_{kq}$$

$i \to p$, $j \to q$

$$c_{ij} = \sum_\ell a_{i\ell} b_{\ell j}$$

$k \to \ell$

$$c_{\ell j} = \sum_p a_{\ell p} b_{pj}$$

$i \to \ell$, $k \to p$

— — — — —

— — — — —

- IN UNA EQUAZIONE MATRICIALE POSSIAMO SEMPRE CONTRARRE ULTERIORMENTE INDICI LIBERI (PRENDERE LA TRACCIA)

2 ALLA VOLTA

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

$\boxed{i \to j}$

$$\sum_i c_{ii} = \sum_k \sum_i a_{ik} b_{ki}$$

- IN UNA EQ. MATR. POSSIAMO SEMPRE MOLTIPLICARE ENTRAMBI I MEMBRI PER UNA STESSA MATRICE ⇒ A DESTRA O A SINISTRA

$C = AB$ $\qquad c_{ik} = \sum_l a_{il} b_{lk}$

• MOLTIPLICHIAMO A DESTRA PER C^{-1}

$$C C^{-1} = A B C^{-1}$$

$$\sum_k c_{ik} c^{-1}_{kj} = \sum_{lk} a_{il} b_{lk} c^{-1}_{kj}$$

$$\delta_{ij} = \sum_{lk} a_{il} b_{lk} c^{-1}_{kj}$$

• MATRICI SIMMETRICHE

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad A = A^T, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{12} & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

• MATRICI ANTISIMMETRICHE

$$a_{ij} = -a_{ji} \qquad A = -A^T \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & \dots \\ -a_{12} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$a_{ii} = 0 \Rightarrow Tr\, A = 0$$

• SE $A = A^T$ $\quad B = -B^T$

$$Tr\, AB = 0$$

$$\sum_i A_{ik} B_{ki} = \frac{1}{2} \sum_i (A_{ik} + A_{ki}) B_{ki} = \frac{1}{2} \sum_i A_{ik} B_{ki} + \frac{1}{2} \sum_i A_{ki} B_{ki} = \frac{1}{2} \sum_i A_{ik} B_{ki} - \frac{1}{2} \sum_i A_{ki} B_{ik} = \frac{1}{2} \sum_i A_{ik} B_{ki} - \frac{1}{2} \sum_i$$

$$\mathrm{Tr}\, AB = \sum_{i,k} a_{ik} b_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \left(a_{ik} b_{ki} + a_{ik} b_{ki} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ik} a_{ik} b_{ki} - \frac{1}{2} \sum_{ik} a_{ki} b_{ik}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ik} a_{ik} b_{ki} - \frac{1}{2} \underset{\boxed{i \leftrightarrow k}}{\underset{\Updownarrow}{\sum_{ik}}} a_{ki} b_{ik} = 0$$

VERO IN GENERALE QUANDO VENGONO CONTRATTI **DUE INDICI** SU UN TENSORE SIMM. E SU TENSORE ANTIS.

ESEMPIO: PRODOTTI VETTORIALI IN 3D

$$\bar{V} = \bar{W} \times \bar{S} \Rightarrow V_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} W_j S_k$$

$$\bar{V} = \bar{\nabla} \times \bar{S} \Rightarrow V_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} S_k$$

$$\boxed{\bar{V} = \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \varphi = 0} \qquad V_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \varphi = 0$$

$$\text{PERCHE} \begin{cases} \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} \\ \dfrac{\partial}{\partial x^j} \dfrac{\partial}{\partial x^k} = \dfrac{\partial}{\partial x^k} \dfrac{\partial}{\partial x^j} \end{cases}$$