

MATRICI E LORO ALGEBRA

⇒ RAPPRESENTAZIONE DI KET/BRA
- OPERATORI

⇒ ISOMORFISMO TRA
SPAZIO VETTORIALE $V^N \sim \mathbb{C}^N$

ALGEBRA OPERATORI \sim ALGEBRA MATRICI

⇒ POSSIAMO SEMPRE LAVORARE CON
KET/BRA OPERATORI USANDO
L'ALGEBRA DELLE MATRICI

MATRICI E LORO ALGEBRA 68

- NASCE DALLA GENERALIZZAZIONE DEI CONCETTI DI SCALARE E VETTORE

- SCALARE

a NUMERO (COMPLESSO)

- VETTORE

$$a_n = (a_1 \dots a_m)$$

M-PLA ORDINATA DI NUMERI COMPLESSI

- MATRICE $M \times M$

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

DISPOSIZIONE RETTANGOLARE DI NUMERI
COMPOSTA DA M RIGHE ED
 M COLONNE

i = INDICE DI RIGA

j = // DI COLONNA

• TENSORE DI RANGO N

DISPOSIZIONE DI NUMERI CON
N INDICI

$$T_{i_1 i_2 \dots i_N}$$

N INDICI

• UN VETTORE PUO ESSERE CONSIDERATO
COME UN CASO PARTICOLARE DI
MATRICE:

(a) VETTORE RIGA

$$V_i = (v_1 \dots v_m)$$

MATRICE 1 X M

(b) VETTORE COLONNA

$$V_j = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

MATRICE M X 1

- UNA MATRICE \bar{E} UN TENSORE DI RANGO 2
- UN VETTORE \bar{E} UN TENSORE DI RANGO 1

ALGEBRA DELLE MATRICI

INDICHEREMO LE MATRICI SIA
 CON LETTERE MAIUSCOLE SENZA
 INDICI A, B, C OPPURE MINUSCOLE
 CON INDICI a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}

- SOMMA DI MATRICI

$$C = A + B$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

L'ELEMENTO ij DI C E OTTENUTO
 SOMMANDO GLI ELEMENTI CORRISPONDENTI,
 ij DI A, B

L'ADDIZIONE \bar{E} ASSOCIATIVA
 E COMMUTATIVA

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE

$$B = \alpha A$$

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

ASSOCIATIVA, COMMUTATIVA

ES. $\alpha = 3$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$B = \alpha A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

- MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI

$$C = AB$$

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

$\left. \begin{matrix} \text{DEFINITA} \\ \{N \times M\} \\ A \end{matrix} \right\}$
 $\left. \begin{matrix} \text{PER} \\ \{M \times P\} \\ B \end{matrix} \right\}$
 $\left. \begin{matrix} \text{MATRICI} \\ \{N \times P\} \\ C \end{matrix} \right\}$

L' ELEMENTO c_{ij} DI C VIENE OTTENUTO
 MOLTIPLICANDO LA RIGA i DI A PER
LA COLONNA j DI B

ES. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

LA MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI
NON È COMMUTATIVA IN GENERE

$$AB \neq BA$$

~~Commutativa~~
 $[A, B] = AB - BA$

MA È ASSOCIATIVA E
DISTRIBUTIVA RISPETTO ALL'ADDIZIONE

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B+C) = AB+AC$$

MATRICE UNITÀ: $\mathbb{1} \Rightarrow \delta_{jk}$
 $\mathbb{1} \cdot A = A$ ELEMENTO NEUTRO

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

TRACCIA DI UNA MATRICE

$t = \text{tr } A = \text{tr } A^T \Rightarrow$ SCALARE *vettore*

$$t = \sum_i a_{ii}$$

SOMMA DEGLI ELEMENTI LUNGO
LA DIAGONALE

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr } A = 3 + 1 = 4$$

$$\text{tr } (AB) = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} b_{ji} \right) = \text{tr } (BA)$$

~~tr(A+B) = tr(A) + tr(B)~~
~~tr(A^T) = tr(A)~~

IN PARTICOLARE

$$\text{tr}[A, B] = \text{tr}[AB - BA] = 0$$

• PIÙ IN GENERALE SE $A^T = -A$

$$\text{tr} A = 0$$

- TRASPOSTA DI UNA MATRICE A

$$\tilde{A}$$

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$$

SI OTTIENE SCAMBIANDO RIGHE
CON COLONNE

• $(\tilde{A}\tilde{B}) = \tilde{B}\tilde{A}$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

MATR. SIM $A = \tilde{A}$

ANTIS. $\tilde{A} = -A$

- DETERMINANTE DI UNA MATRICE

DI UNA MATRICE QUADRATA SI PUO' SEMPRE CALCOLARE IL DETERMINANTE

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{vmatrix}$$

- $\det A$ È UNO SCALARE DEFINITO DA

$$\det A = \frac{1}{N!} \sum_{\lambda \tau \kappa \dots} \sum_{\rho \eta \pi \dots} \epsilon_{\lambda \tau \kappa \dots} \epsilon_{\rho \eta \pi \dots} a_{\lambda \rho} a_{\tau \eta} a_{\kappa \pi} \dots$$

DOVE $\epsilon_{\lambda \tau \kappa \dots}$ TENSORE
DI LEVI CIVITA

$$\epsilon_{123 \dots} = 1$$

$$\epsilon_{\dots} = 1 \quad \text{PERMUTAZIONI PARI}$$

$$\epsilon_{\dots} = -1 \quad \text{// DISPARI}$$

- $\epsilon_{\lambda \tau \kappa \dots}$ TENSORE COMPLETAMENTE
ANTISIMMETRICO PER OGNI
SCAMBIO DI INDICE

ESEMPLI:

$$D=2$$

$$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D=3$$

$$\epsilon_{\lambda \tau \kappa}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{123} = 1 \\ \epsilon_{132} = -1 \\ \epsilon_{312} = 1 \end{cases}$$

• TENSORE = 0 OGNI QUALVOLTA DUE
INDICI UGUALI

$$\epsilon_{\lambda \tau \lambda} = 0$$

- SVILUPPO DI LAPLACE SECONDO RIGHE O COLONNE PER CALCOLARE

- ALGORITMO DI GAUSS

PROPRIETÀ

- $\det A = \det \tilde{A}$

- $\det(A B) = (\det A)(\det B)$

- $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \implies$ SEGUE DA $A^{-1}A = \mathbb{1}$

- $\det \mathbb{1} = 1$

- $\det(S^{-1}AS) = \det A$

- $\det A_D = \prod \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N$

$$A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

INVERSA DI UNA MATRICE A^{-1}

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}$$

- CALCOLO DELL'INVERSA USANDO I MINORI C_{ij}

- $a^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} C_{ji}}{\det A}$

- MATRICE INVERTIBILE SE E SOLO SE $\det A \neq 0$

- USO DEL TENSORE DI LEVI-CIVITA IN 3D PER ESPRIMERE IL PRODOTTO VETTORIALE

$$\bar{v} = \bar{a} \times \bar{b}$$

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a_i \\ \bar{b} &= b_i \end{aligned}$$

$$v = v_i$$

$$v_i = \sum_{k,l} \epsilon_{ikl} a_k b_l$$

$$\bar{v} = \nabla \times \bar{E}$$

$$\bar{v} = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$v_i = \sum_{k,l} \epsilon_{ikl} \frac{\partial E_l}{\partial x^k}$$

USO DETERMINANTI

- RANGO \mathbb{Z} DI UNA MATRICE TRAMITE CALCOLO DEI MINORI ESTRATTI
- DIPENDENZA ED INDIPENDENZA LINEARE DI UN SET DI M VETTORI

• TRASPOSTA DI UNA MATRICE $\tilde{A} \quad (A^T)$

$$A \rightarrow Q_{ij} \quad \tilde{A} = Q_{ji}$$

• MATRICE SIMMETRICA

$$\tilde{A} = A \rightarrow Q_{ij} = Q_{ji}$$

• MATRICE ANTISIMMETRICA $\tilde{A} = -A \rightarrow Q_{ij} = -Q_{ji}$

• MATRICE ACCIUNTA A^+

$$A^+ = \tilde{A}^*$$

$$B = CD$$

$$B^+ = D^+ C^+$$

$$A \rightarrow Q_{ij}$$

$$A^+ = Q_{ji}^*$$

• MATRICE (ANTI) HERMITIANA

$$A = A^+ \rightarrow Q_{ij} = Q_{ji}^*$$

$$A = -A^+ \rightarrow Q_{ij} = -Q_{ji}^*$$

• SE A, B HERMITIANE

$$C = [A, B] \Rightarrow C^+ = -C, \quad D = \begin{cases} A, B \\ \vdots \\ D \end{cases} \Rightarrow D^+ = D$$

• MATRICE UNITARIA

$$U^+ = U^{-1}$$

$$U^+ U = \mathbb{1}$$

$$\tilde{U}^* = U^{-1}$$

$$\sum_k U_{ik}^+ U_{ke} = \delta_{ie}$$

• MATRICE ORTOGONALE

$$\tilde{U} = U^{-1}$$

$$\tilde{U} U = \mathbb{1}$$

FUNZIONI DI MATRICI

• DATA A MATRICE $N \times N$

SI PUÒ DEFINIRE $F(A) \in C^\infty$
COME SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR
IN $A=0$

$$F(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} A^m$$

ESEMPIO

$$B = e^{QA}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \mathbb{1}, \quad A^3 = A, \quad A^{2m} = \mathbb{1}, \quad A^{2m+1} = A$$

$$B = e^{QA} = \mathbb{1} + \frac{QA}{1} + \frac{1}{2} \frac{Q^2 A^2}{2} + \dots + \frac{1}{2m!} \frac{(QA)^{2m}}{+} \\ + \frac{1}{(2m+1)!} \frac{(QA)^{2m+1}}{+}$$

RACCOGUAMO TERMINI PARI E DISPARI

$$B = \left[\mathbb{1} + \frac{1}{2} e^2 A^2 + \dots + \frac{1}{2m!} (QA)^{2m} \right] + \left[QA + \frac{1}{3} (QA)^3 \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{(2m+1)!} (QA)^{2m+1} \right] = \mathbb{1} \left[1 + \frac{1}{2} e^2 + \dots + \frac{1}{2m!} e^{2m} \right] + \\ + A \left[e + \frac{1}{3!} e^3 + \dots + \frac{1}{(2m+1)!} e^{2m+1} \right] \Rightarrow \begin{matrix} \cos e \\ \sin e \end{matrix}$$

$$B = \cosh e \, \mathbb{1} + \sinh e \, A = \begin{pmatrix} \cosh e & 0 \\ 0 & \cosh e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sinh e \\ \sinh e & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh e & \sinh e \\ \sinh e & \cosh e \end{pmatrix}$$

- TRASFORMAZIONI

DI SIMILITUDINE

$$A' = S^{-1} A S$$

$$Q'_{AT} = \sum_{k \neq l} S^{-1}_{lk} Q_{kl} S_{lj}$$

• TRASFORMAZIONI

UNITARIE

$$A' = U^{\dagger} A U$$

$$Q'_{AT} = \sum_{k \neq l} U^{\dagger}_{lk} Q_{kl} U_{lj}$$

• TRASFORMAZIONI

ORTOGONALI

$$A' = R^{\dagger} A R$$

$$Q'_{AT} = \sum_{k \neq l} R^{\dagger}_{lk} Q_{kl} R_{lj}$$

INVARIANTI

$$\text{Tr } A = \text{Tr } A'$$

$$\det A' = \det A$$

$$\det A^{\dagger} = (\det A)^{*}$$

$$U^{\dagger} U = I \Rightarrow \det(U^{\dagger} U) = \det I \Rightarrow |\det U|^2 = 1 \quad U = e^{i\theta}$$

$$A^{\dagger} = A \Rightarrow \det A = (\det A)^{*} \Rightarrow \det A \in \mathbb{R}$$

$$A^{\dagger} = -A \Rightarrow \det A = -(\det A)^{*} \Rightarrow \det A \in i\mathbb{R}$$

$$A^{\dagger} = A \quad \text{Tr } A \in \mathbb{R}$$

$$A^{\dagger} = -A \quad \text{Tr } A \in i\mathbb{R}$$

$$A = -A^{\dagger} \Rightarrow \text{Tr } A = 0, \quad \det A = 0 \quad \text{PER } N = \text{DISPARI}$$

MATRICE AS NON INVERTIBILE IN D. DISPARI

$$\ln \det A = \text{Tr } \ln A \quad U = e^{iA} \quad U^{\dagger} = U^{-1} \quad A = A^{\dagger}$$

$$\ln \det U = i \text{Tr } A \quad 1 = \det U \Rightarrow 0 = \text{Tr } A$$

EQUAZIONI ED IDENTITÀ MATRICIALI

- INDICI LIBERI E INDICI SOMMATI (CONTRATTI)

$$A + B = CD + L$$

$$b_{ij} + a_{ij} = \sum_k c_{ik} d_{kj} + l_{ij}$$

↓ ↓
↓ ↓
LIBERI
↓ ↓
CONTRATTI

• BILANCIAMENTO

IN OGNI TERMINE DEVONO ESSERE PRESENTI TUTTI E SOLO GLI STESSI INDICI LIBERI.

$$P = ABC + LS$$

$$p_{ij} = \sum_k a_{ik} \sum_e b_{ke} c_{ej} + \sum_k l_{kj} s_{ki}$$

- PRODOTTI ~~DI PIU~~ DI PIU MATRICI

$$D = ABC$$

$$D = A(BC)$$

≠

$$d_{ij} = \sum_k a_{ik} (BC)_{kj}$$

$$(BC)_{kj} = \sum_e b_{ke} c_{ej}$$

$$d_{ij} = \sum_k \sum_e a_{ik} b_{ke} c_{ej}$$

ANCORA

$$M = ABCD$$

$$M_{ij} = \sum_k a_{ik} \sum_e b_{ke} \sum_p c_{ep} d_{pj}$$

$$= \sum_{kep} a_{ik} b_{ke} c_{ep} d_{pj}$$

• MATRICE UNITA $\mathbb{1} \quad \delta_{ke}$

$$\mathbb{1} A = A \cdot \mathbb{1} = A$$

$$\sum_e \delta_{ke} a_{ej} = \sum_e a_{ke} \delta_{ej} = a_{kj}$$

δ_{ke} TRASFORMA L'INDICE
e di a IN INDICE k

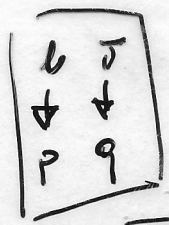
$$\sum_e \delta_{ke} a_{ej} = a_{kj}$$

$$A A^{-1} = \mathbb{1}$$

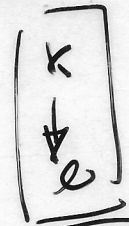
$$\sum_k a_{jk} a_{ik}^{-1} = \delta_{je}$$

- IN UNA EQUAZIONE MATRICIALE
POSSIAMO CAMBIARE SEMPRE NOME
CONTEMPORANEAMENTE AGLI STESSI
INDICI LIBERI O CONTRATTI

$$c_{IJ} = \sum_k a_{Ik} b_{kJ}$$

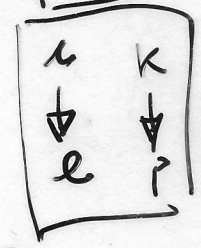


$$c_{PQ} = \sum_k a_{Pk} b_{kQ}$$



$$c_{IJ} = \sum_e a_{Ie} b_{eJ}$$

$$c_{eJ} = \sum_p a_{ep} b_{pJ}$$

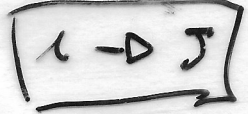


- - - - -
- - - - -

- IN UNA EQUAZIONE MATRICIALE POSSIAMO SEMPRE CONTRARRE ULTERIORMENTE INDICI LIBERI. (PRENDERE LA TRACCIA)

2 ALTA VOLTA

$$c_{IJ} = \sum_k a_{Ik} b_{kJ}$$



$$\sum_I c_{II} = \sum_k \sum_I a_{Ik} b_{kI}$$

- IN UNA EQ. MATR. POSSIAMO SEMPRE MOLTIPLICARE ENTRAMBE I MEMBRI PER UNA STESSA MATRICE
 $\Rightarrow A$ DESTRA O A SINISTRA

$$C = AB$$

$$C_{ik} = \sum_e a_{ie} b_{ek}$$

• MULTIPLICHIAMO A DESTRA
PER C^{-1}

$$C C^{-1} = A B C^{-1}$$

$$\sum_k C_{ik} C^{-1}_{kj} = \sum_{ek} a_{ie} b_{ek} C^{-1}_{kj}$$

$$S_{ij} = \sum_{ek} a_{ie} b_{ek} C^{-1}_{kj}$$

• MATRICI SIMMETRICHE

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad A = A^T, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{12} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

• MATRICI ANTISIMMETRICHE

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad A = -A^T, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots \\ -a_{12} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 \dots \end{pmatrix}$$

$$a_{ii} = 0 \Rightarrow \text{Tr} A = 0$$

• SE $A = A^T$ $B = -B^T$

$$\text{Tr} AB = 0$$

$$\sum_k A_{ik} B_{ki} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k (A_{ik} + A_{ki}) B_{ki} = \frac{1}{2} \sum_k A_{ik} B_{ki}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_k A_{ki} B_{ki} = \frac{1}{2} \sum_k A_{ik} B_{ki} - \frac{1}{2} \sum_k$$

$$A_{ki} B_{ki} = \frac{1}{2} \sum_k A_{ik} B_{ki} - \frac{1}{2} \sum_k$$

$$\text{Tr } AB = \sum_{i,k} a_{ik} b_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (a_{ik} b_{ki} + a_{ki} b_{ik})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} b_{ki} - \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ki} b_{ik}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} b_{ki} - \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ki} b_{ik} = 0$$

$$\boxed{i \leftrightarrow k}$$

VERO IN GENERALE QUANDO VENGONO
 CONTRATTI DUE INDICI SU UN
 TENSORE SIMM. E SU TENSORE
 ANTIS.

ESEMPIO : PRODOTTI VETTORIALI
~~IN~~ IN 3D

$$\vec{V} = \vec{W} \times \vec{S} \Rightarrow V_\lambda = \sum_{j,k} \epsilon_{\lambda jk} w_j s_k$$

$$\hat{V} = \vec{\nabla} \times \vec{S} \Rightarrow V_\lambda = \sum_{j,k} \epsilon_{\lambda jk} \frac{\partial}{\partial x^j} S_k$$

$$\boxed{\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0}$$

$$V_\lambda = \sum_{j,k} \epsilon_{\lambda jk} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \varphi$$

PERCHÉ $\left. \begin{aligned} \epsilon_{\lambda jk} &= -\epsilon_{\lambda kj} \\ \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned} \right\} = 0$