

# 1 EQUAZIONI DI MAXWELL

Il campo elettromagnetico è un *campo di forze*. Può essere utile utilizzare una definizione operativa di *campo*: diciamo che in una zona dello spazio è presente un campo se è utile associare a ogni punto di tale zona il valore di una o più grandezze fisiche <sup>1</sup>. In particolare il campo è un campo di forze se la grandezza fisica è una forza, o una grandezza associata ad una forza. Il caso tipico è il campo gravitazionale: a ogni punto dello spazio attorno alla Terra, associamo un vettore, che è la accelerazione gravitazionale, che mi consente di calcolare la forza agente su un oggetto nel punto conoscendo solo il valore di tale accelerazione.

Caratteristica dei campi di forze è che gli oggetti che subiscono l'azione della forza sono anche quelli che producono il campo. Esempio tipico è il campo elettrostatico. Tale campo è prodotto da cariche elettriche, e solo cariche elettriche poste in un campo elettrostatico subiscono una forza a causa del campo.

Il campo elettromagnetico agisce su cariche e correnti, e pertanto viene prodotto da cariche e correnti. Le leggi che regolano tale campo, e che lo collegano alle sorgenti, sono state viste nei corsi di Fisica e sono

- legge di Faraday;
- legge di Ampère (generalizzata);
- legge di Gauss;
- *legge di Gauss magnetica*, ovvero assenza di cariche magnetiche libere.

Le equazioni di Maxwell sono la formulazione matematica di tali leggi, e qui sono date come postulati nella forma seguente:

$$\begin{aligned}\oint_c \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_c \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} &= I + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} &= Q \\ \oint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

dove  $\mathbf{e}$  è il vettore campo elettrico e si misura in  $[V/m]$ ,  $\mathbf{b}$  è il vettore induzione magnetica  $[Wb/m^2]$ ,  $\mathbf{h}$  è il vettore intensità magnetica  $[A/m]$ , e  $\mathbf{d}$  è il vettore induzione elettrica  $[C/m^2]$ . Tutte queste grandezze sono dei campi. Pertanto esse sono funzioni della posizione  $\mathbf{r}$  e del tempo  $t$  in cui sono calcolate.

Le sorgenti del campo sono costituite dalla corrente elettrica  $I$ , che si misura in  $[A]$ , e dalla carica elettrica  $Q$  che si misura in  $[C]$ .

Notiamo esplicitamente che le equazioni (1) sono equazioni macroscopiche e quindi concettualmente diverse dalle equazioni di Maxwell microscopiche, che legano campi nel vuoto e cariche elementari.

Le differenze ci sono sia nei campi, sia nelle sorgenti, ma sono più visibili in queste ultime, e quindi le differenze verranno discusse dapprima per la carica  $Q$ , in dettaglio, e poi, più brevemente, per le altre grandezze.

---

<sup>1</sup> Ad esempio, parleremo di campo di velocità dell'acqua di un canale se siamo interessati al valore di tale velocità punto per punto

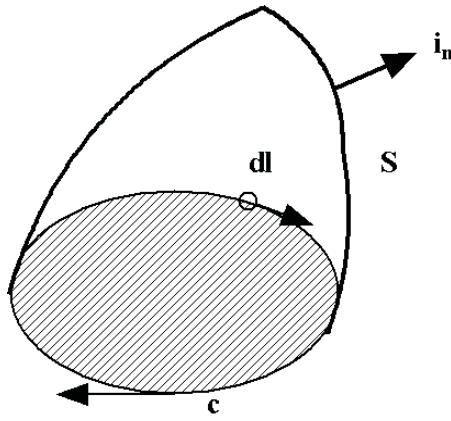


Fig. 1: Superficie e contorno

La carica  $Q_V$  contenuta in un volume  $V$  è la somma delle cariche elementari (elettroni o ioni) contenute dentro il volume. Naturalmente la carica  $Q_V$  varia sia se cambia la forma, o la dimensione di  $V$ , sia se il volume  $V$  cambia posizione. Tuttavia, se il numero di cariche contenute è grande, la variazione di carica totale per una variazione piccola di  $V$  è percentualmente piccola. Se invece in  $V$  sono contenute poche cariche, allora la variazione di  $Q_V$  può essere nulla (la variazione di  $V$  lascia le cariche contenute inalterate) o grande.

Se vogliamo descrivere come è distribuita nello spazio la carica  $Q$ , possiamo dividere lo spazio stesso in tanti volumetti  $\Delta V$  e considerare la carica contenuta in ciascuno di questi volumi come rappresentativa della distribuzione spaziale della carica.

Più formalmente, possiamo definire una *densità di carica*  $\rho(\mathbf{r}, t)$  come

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{Q_{\Delta V}(t)}{\Delta V} \quad (2)$$

dove  $\Delta V$  è centrato in  $\mathbf{r}$ . A questo punto sarebbe intuitivo passare, nella (2), al limite per  $\Delta V \rightarrow 0$ . Tuttavia, se il numero di cariche contenute è grande, la variazione di carica totale per una variazione piccola di  $V$  è percentualmente piccola. Se invece in  $V$  sono contenute poche cariche, allora la variazione di  $Q_V$  può essere nulla (la variazione di  $V$  lascia le cariche contenute inalterate) o grande. Pertanto, col ridursi di  $\Delta V$ , il rapporto nella (2) dapprima tende a un valore costante e poi, quando  $\Delta V$  è diventato troppo piccolo, allora varia in modo impulsivo. Ne segue che nella (2) non è possibile prendere il limite, ma solo considerare volumi  $\Delta V$  sufficientemente grandi da contenere molte cariche.

Naturalmente, affinché la (2) fornisca una descrizione utile della variazione spaziale della carica, si richiede che  $\Delta V$  sia più piccolo della scala di variazione della carica, ovvero della minima distanza su cui la carica varia in maniera *significativa*.

Le equazioni (1) sono equazioni macroscopiche se i volumi considerati sono abbastanza grandi da contenere molte cariche, e, allo stesso tempo, sufficientemente piccoli rispetto alla scala di variazione delle grandezze elettriche. Ne segue anche che le equazioni macroscopiche sono valide, e quindi possono essere usate, solo se esistono volumi di questo tipo. Poiché la scala di variazione spaziale del campo dipende dalla frequenza, le equazioni macroscopiche sono utilizzabili per onde radio, microonde e infrarossi, e anche, quasi sempre, per le onde luminose e il vicino ultravioletto. Non possono, invece, essere usate per il lontano ultravioletto (se non in casi particolari), nè per i raggi  $X$  e  $\gamma$ .

Si noti che la distinzione tra equazioni macroscopiche e microscopiche dipende dalla

presenza di mezzi materiali. Quindi tale distinzione cade nel caso del vuoto, dove le (1) possono sempre essere usate.

Dalla (2) segue

$$Q_V(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (3)$$

Il discorso su  $I$  è simile. La corrente attraverso una superficie  $\Delta S$  dipende dalla normale  $\mathbf{i}_n$  alla superficie stessa. La corrente quindi può variare non solo se  $\Delta S$  cambia posizione, dimensione o forma, ma anche se varia la normale. Si trova che il rapporto tra la corrente, scelta positiva in direzione di  $\mathbf{i}_n$ , e  $\Delta S$  varia con  $\mathbf{i}_n$  come la componente di un vettore, e si può quindi definire una densità di corrente  $\mathbf{j}$  come

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_n = \frac{I_{\Delta S}(t)}{\Delta S} \quad (4)$$

purchè la superficie  $\Delta S$  sia macroscopica. Segue allora

$$I_{\Delta S}(t) = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{i}_n dS = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \quad (5)$$

Le densità di carica e di corrente si misurano rispettivamente in  $[C/m^3]$  e  $[A/m^2]$ . Si noti che una corrente è un moto di cariche. Pertanto tra  $\mathbf{j}$  e  $\rho$  vale la relazione

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

essendo  $\mathbf{v}$  il *campo di velocità* delle cariche in moto che costituiscono la corrente.

Per quanto riguarda i campi macroscopici, infine, questi possono essere semplicemente definiti come il valor medio del corrispondente campo microscopico, fatto su un volume piccolo ma *macroscopico*.

Introducendo le densità di carica e di corrente, le (1) diventano

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_c \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \\ \oint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Vediamo le prime conseguenze delle (6). Per prima cosa notiamo che la presenza della variazione del flusso del campo magnetico  $-d\Phi_b/dt$  nella legge di Faraday indica che un campo elettrico si genera se  $\Phi_b$  varia, qualunque sia la causa: variazione temporale delle sorgenti, moto delle sorgenti o di  $c$ , deformazione o rotazione di  $c$ . Se  $c$  e  $S$  sono fissate allora

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S}$$

Nelle ultime due equazioni  $S$  è una superficie *qualunque* che si appoggia su  $c$ . Consideriamo allora due superfici  $S_1$ ,  $S_2$  generiche.

Si ha ovviamente

$$\frac{d}{dt} \int_{S_1} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \frac{d}{dt} \oint \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} \quad (7)$$

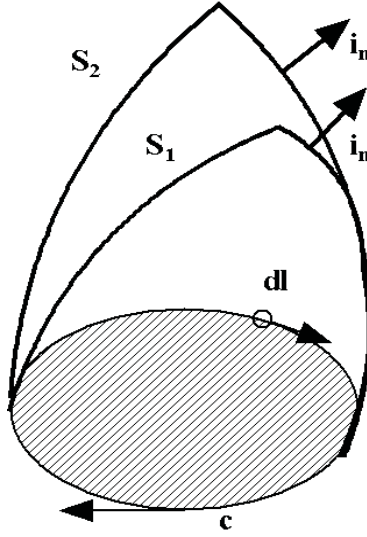


Fig. 2: Unione  $S_1$  e  $S_2$

dove  $S$  è la unione di  $S_1$ ,  $S_2$  ( ma ora con la normale rovesciata). Quindi il flusso di  $\mathbf{b}$ , è costante. La quarta delle equazioni (6) è quindi essenzialmente una *condizione iniziale*. Invece

$$\frac{d}{dt} \int_{S_1} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (8)$$

da cui ricaviamo l'*equazione di continuità*

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (9)$$

Quindi l'equazione di continuità della carica non è una equazione indipendente, ma una conseguenza della legge di Gauss macroscopica. Ciò implica che, nello scegliere i postulati iniziali, è equivalente introdurre la legge di Gauss o l'equazione di continuità.

Notiamo infine che da (1,9) si ottiene

$$\oint_S \left( \mathbf{j} + \frac{d}{dt} \mathbf{d} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (10)$$

ovvero che è nullo il flusso di  $\mathbf{j} + \frac{d}{dt} \mathbf{d}$ , mentre nel caso statico è nullo il flusso solo di  $\mathbf{j}$ . Questo giustifica il nome di *corrente di spostamento* dato a  $\frac{d}{dt} \mathbf{d}$ , mentre  $\mathbf{j} + \frac{d}{dt} \mathbf{d}$  può essere considerata una sorta di corrente totale (cariche in moto più corrente di spostamento).

## 2 FORZA DI LORENTZ

Per completare la descrizione del campo elettromagnetico, occorre l'espressione della forza che questo esercita sulle sorgenti del campo, che nel caso macroscopico sono  $\mathbf{J}$  e  $\rho$ .

Dalla fisica e' noto che una particella *puntiforme* immersa in un campo elettromagnetico subisce una forza, data dalla espressione della forza di Lorentz, che coinvolge i campi microscopici. Tale relazione deve essere però riscritta nel caso di problemi macroscopici, in cui non siamo interessati alla forza su una carica puntiforme, ma alla forza che viene esercitata da un campo macroscopico su una distribuzione di cariche e di correnti. Tale relazione, che chiameremo ancora forza di Lorentz, e che diamo anch'essa come postulato, è

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{e} + \mathbf{j} \times \mathbf{b} \quad (11)$$

dove  $\mathbf{f}$  è la densità di forza (ovvero  $\mathbf{f} dV$  è la forza che agisce sul volume elementare macroscopico  $dV$ ). Nota  $\mathbf{f}$  si può ottenere risultante e momento risultante di tutte le forze.

Tenendo conto che la corrente è costituita da cariche in moto :  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  si ha

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{e} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{b} \quad (12)$$

La risultante delle forze agenti su di un volume elementare  $\Delta V$  (macroscopico) è

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} \Delta V = \rho \Delta V \mathbf{e} + \rho \Delta V \mathbf{v} \times \mathbf{b}$$

dove  $\rho \Delta V$  è la carica contenuta in  $\Delta V$ . Nel caso di una carica puntiforme  $q = \rho \Delta V$ , in moto con velocità  $\mathbf{v}$ , risulta

$$\mathbf{r} = q \mathbf{e} + q \mathbf{v} \times \mathbf{b}$$

mentre il momento risultante è nullo.

## 3 EQUAZIONI DI MAXWELL E MATERIALI

La discussione precedente mostra che delle equazioni di Maxwell (6) considerate finora le due leggi di Gauss sono sostanzialmente contenute nelle altre. Pertanto basterà considerare le sole leggi di Faraday e di Ampère, che riportiamo

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_c \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_{tot}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (13)$$

Le (13) (e ovviamente anche le (6) ) sono dette *equazioni in forma integrale* e costituiscono la forma più generale di queste equazioni. Tuttavia il loro utilizzo è, in molti casi, poco

intuitivo. Si usano al loro posto le *equazioni in forma differenziale*, che sono ricavate nella Appendice 2<sup>1</sup>, e sostanzialmente collegano la variazione nel tempo del campo elettrico in un punto alla variazione spaziale del campo magnetico attorno allo stesso punto, e viceversa. Sono quindi due equazioni differenziali vettoriali, ovvero che coinvolgono le derivate dei vettori di campo.

Nella seconda delle (13) abbiamo indicato con  $\mathbf{j}_{tot}$  la densità totale di corrente elettrica. Ricordiamo infatti che la densità di corrente è costituita da cariche in moto. Questo moto può essere dovuto a due cause diverse:

- forze esterne al campo elettromagnetico che stiamo considerando;
- la forza di Lorentz dovuta al campo descritto dalle equazioni di Maxwell.

Di conseguenza possiamo dividere la densità di corrente totale in due parti, dette rispettivamente densità di corrente *impressa* e densità di corrente *indotta* o sostenuta dal campo:

$$\mathbf{j}_{tot} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j} \quad (14)$$

Entrambe le correnti risultano essere sorgenti del campo elettromagnetico. Tuttavia, mentre la corrente indotta risulta una incognita del problema, quella impressa è da considerare un dato ( $\mathbf{j}_0$  è cioè un termine noto delle equazioni di Maxwell).

Pertanto le due equazioni di Maxwell (indipendenti) (13), che sono equazioni vettoriali, contengono cinque incognite ( $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{j}$ ), anch'esse vettoriali. Sono quindi necessarie tre ulteriori relazioni vettoriali tra i vettori di campo per rendere determinato il problema.

D'altra parte, le equazioni di Maxwell nella forma (13) devono essere indeterminate, in quanto, fissate le sorgenti, il campo deve necessariamente dipendere dal materiale in cui si sviluppa ma deve anche essere soluzione delle (13). Poichè al variare del materiale, varierà il campo ma dovrà restare soluzione delle equazioni di Maxwell, allora le (13) devono essere indeterminate.

Le considerazioni precedenti ci dicono anche che per rendere determinato il problema occorre aggiungere 3 relazioni vettoriali tra i vettori di campo che descrivono il comportamento elettromagnetico del materiale in cui il campo si sviluppa (*relazioni costitutive*). Ricordiamo infatti che i costituenti microscopici del materiale subiscono l'azione del campo elettromagnetico *esterno* modificandosi (polarizzazione dei dielettrici e dei materiali magnetici) e cambiando il loro stato di moto (correnti di conduzione). A sua volta queste modificazioni danno luogo a correnti e cariche che producono un campo ulteriore, che dipende dalla natura del materiale. Le relazioni costitutive traducono matematicamente l'effetto di queste modificazioni.

Il caso più semplice è quello del vuoto in cui non vi sono costituenti microscopici. Le relazioni costitutive prendono allora la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \varepsilon_0 \mathbf{e} \\ \mathbf{b} &= \mu_0 \mathbf{h} \\ \mathbf{j} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

dove le costanti  $\varepsilon_0$ , e  $\mu_0$  sono dette costante dielettrica e permeabilità magnetica del vuoto e valgono

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 8.85 \text{ pF/m} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} = 1.256 \text{ }\mu\text{H/m} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Nel seguito di questo corso, comunque, non avremo necessità di considerare esplicitamente le equazioni in forma differenziale.

Tuttavia la forma matematica delle equazioni dipende dalla struttura delle relazioni costitutive e non dai loro dettagli. Pertanto la soluzione delle equazioni del campo elettromagnetico è sostanzialmente la stessa in tutti quei materiali in cui le relazioni costitutive sono della forma (15), anche se con valori diversi delle costanti. Basterà lasciare le costanti come parametri del problema<sup>2</sup>, ovvero sostituire le (15) con

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \varepsilon \mathbf{e} \\ \mathbf{b} &= \mu \mathbf{h} \\ \mathbf{j} &= 0\end{aligned}\tag{16}$$

dove le costanti  $\varepsilon$ , e  $\mu$  sono dette costante dielettrica e permeabilità magnetica del materiale, diverse da materiale a materiale ma, nell'ambito di un singolo problema sono delle costanti, essendo fissato il materiale.

Può essere utile introdurre le costanti relative

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}\tag{17}$$

e nel seguito utilizzeremo indifferentemente  $\varepsilon_r \varepsilon_0$  oppure  $\varepsilon$ .

Naturalmente i materiali per cui valgono le (16) sono solo una parte dei materiali di interesse, e anche una parte abbastanza piccola. Tuttavia vedremo che, in buona parte dei casi di interesse, molti problemi possono essere risolti utilizzando relazioni costitutive nella forma (16) o in una forma simile (ad esempio, sostituendo la terza equazione con  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$ , dove la conducibilità  $\sigma$  è una costante)

## 4 CONTINUITÀ DEI CAMPI

Consideriamo una superficie di separazione tra due regioni, come in Fig. 3. Scegliamo un verso della normale  $\mathbf{i}_n$  orientata dalla regione 1 alla 2, e consideriamo un volume cilindrico con base un cerchio  $\Delta S$  di raggio  $R_b$ , e di altezza  $\Delta h$ , entrambe piccole.

Applicando la legge di Gauss a questo cilindro si ha:

$$\int_{B2} \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n dS + \int_{B1} \mathbf{d} \cdot [-\mathbf{i}_n] dS + \int_{SL} \mathbf{d} \cdot \mathbf{dS} = \int_{\Delta h} \rho dS$$

essendo  $B1$  e  $B2$  le due basi del cilindro e  $SL$  la superficie laterale (di area  $2\pi R_b \Delta h$ ). Se  $\Delta S$  è sufficientemente piccolo, possiamo assumere  $\mathbf{d}$  costante su ciascuna delle basi, ovviamente con valori diversi sulle due basi, che indichiamo con  $\mathbf{d}_2$  e  $\mathbf{d}_1$  rispettivamente. Allora  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n$  va fuori dall'integrale e segue

$$\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{i}_n \Delta S - \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{i}_n \Delta S + \int_{SL} \mathbf{d} \cdot \mathbf{dS} = \int_{\Delta h} \rho dS\tag{18}$$

L'ultimo integrale a primo membro è limitato da  $2\pi R_b \Delta h \text{Max}|\mathbf{d}|$ . Se facciamo, nella (18), tendere  $\Delta h \rightarrow 0$ , tale integrale va a zero.

---

<sup>2</sup> Si considerano parametri di un problema delle grandezze che possono essere diverse da problema a problema, ma che nella analisi di ciascun caso assumono un valore costante

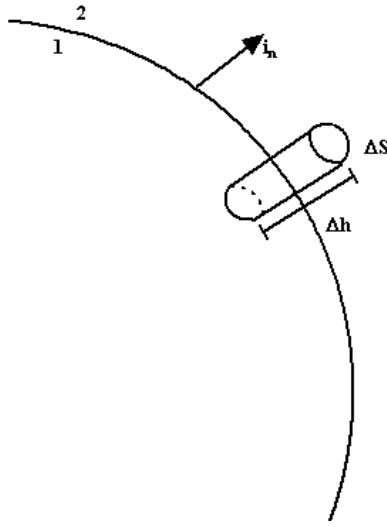


Fig. 3: Superficie di separazione tra due regioni 1 e 2

Invece, l'integrale a secondo membro, per  $\Delta h \rightarrow 0$ , è nullo solo se non vi sono densità superficiali di carica  $\rho_s$  (cariche distribuite solo alla superficie). Si ha

$$\begin{aligned} (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \cdot \mathbf{i}_n &= \rho_s \\ (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{i}_n &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

e dall'equazione di continuità,

$$(\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) \cdot \mathbf{i}_n = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_s$$

Consideriamo ora un percorso rettangolare, come in Fig. 4, centrato sulla superficie di separazione tra le due regioni 1 e 2. Dalla legge di Ampère ( se  $\Delta l$  e  $\Delta h$  sono piccoli) si ha, fissato un  $\mathbf{i}_b$  sulla superficie (generico) e un conseguente  $\mathbf{i}_t$

$$\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{i}_t \Delta l - \int_C^D \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_n dS - \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{i}_t \Delta l + \int_A^B \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_n dS = \Delta l \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_b dS + \Delta l \frac{d}{dt} \int \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_b dS \quad (20)$$

in quanto, per la piccolezza di  $\Delta l$ , possiamo assumere  $\mathbf{h}$  costante sui due lati  $BC$  e  $DA$ .

L' ultimo integrale è limitato da  $\Delta l \text{Max} |\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n| \Delta h$  e quindi tende a zero con  $\Delta h$ . Analogamente gli integrali su  $AB$  e  $CD$ . Resta allora

$$\Delta l (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_t = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{i}_b dS$$

In assenza di correnti superficiali l'ultimo termine è nullo. Si dice corrente superficiale una  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s \cdot \delta(s)$ . Fisicamente equivale ad un flusso di particelle concentrato in un volume di spessore paragonabile al raggio delle particelle stesse ( e quindi considerabile nullo). In presenza di tali correnti si ha  $(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_t = \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{i}_b$  (l'integrale vale  $1/\Delta l$  per la corrente che fluisce attraverso la linea  $A'D'$ ). Ma  $\mathbf{i}_b$  è arbitrario, mentre  $\mathbf{i}_t = \mathbf{i}_b \times \mathbf{i}_n$  e quindi



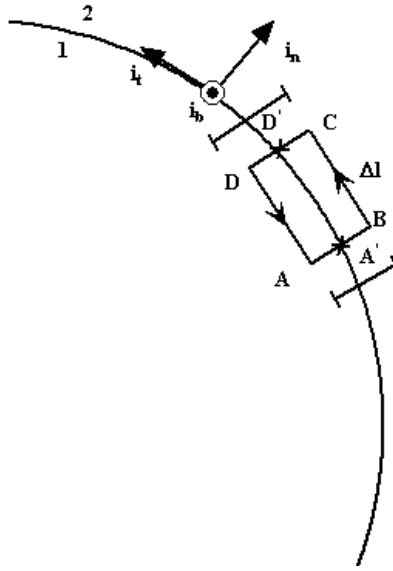


Fig. 4: Superficie di separazione tra due regioni 1 e 2

$$\mathbf{j}_s \cdot \mathbf{i}_b = (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_b \times \mathbf{i}_n = \mathbf{i}_n \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_b$$

per qualsiasi  $\mathbf{i}_b$ . Segue

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) = \mathbf{j}_s \quad (21)$$

Analogamente

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = 0 \quad (22)$$

Le (21,22) costituiscono la forma generale delle condizioni di continuità dei campi tangenti ad una superficie, di cui  $\mathbf{i}_n$  è la normale (orientata dal lato 1 al lato 2).

[Ovviamente se necessario si possono considerare due versori tangenti sulla superficie  $\mathbf{i}_u, \mathbf{i}_v$  (ortogonali  $\mathbf{i}_v = \mathbf{i}_u \times \mathbf{i}_n$ ) ottenendo  $(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_u = -\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{i}_v$ ,  $(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_v = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{i}_u$ ].

## 5 ONDE PIANE

I campi, incognite delle equazioni di Maxwell dipendono da tre variabili spaziali e dal tempo. Conviene pertanto cominciare a determinare delle soluzioni particolari di tali equazioni, ovvero soluzioni che godano di particolari proprietà, piuttosto che porsi il problema della soluzione completa di tali equazioni.

Le soluzioni più semplici sono quelle ottenute nel vuoto in assenza di sorgenti, e che dipendono solo da una coordinata spaziale. Tali soluzioni sono quindi campi elettromagnetici costanti su tutti i piani ortogonali a tale direzione, e prendono il nome di *onde piane*.

Scegliamo allora un sistema di riferimento con l'asse  $z$  nella direzione in cui i campi variano, e cerchiamo un campo **variabile** solo con  $z$ . Sviluppando le equazioni di Maxwell (13) in queste ipotesi<sup>1</sup> si trova per cominciare che  $e_z$  ed  $h_z$  sono costanti. Poichè siamo interessati a soluzioni variabili possiamo porre

$$e_z = 0 \qquad h_z = 0$$

ottenendo che i campi sono ortogonali alla direzione in cui il campo varia.

Inoltre si trova che sono possibili onde piane in cui sono diversi da zero solo  $e_x$  ed  $h_y$  e onde piane in cui sono diverse da zero solo  $e_y$  ed  $h_x$ . Per tali onde, evidentemente,  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{h}$  sono ortogonali anche tra loro. La soluzione generale è la somma di queste due soluzioni, e quindi per una onda piana  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{i}_z$  sono sempre *ortogonali*.

Onde piane in cui sono diversi da zero solo  $e_x$  ed  $h_y$  soddisfano alle equazioni:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z} e_x &= \mu \frac{\partial}{\partial t} h_y \\ -\frac{\partial}{\partial z} h_y &= \epsilon \frac{\partial}{\partial t} e_x \end{aligned} \tag{23}$$

A partire dalle soluzioni di queste equazioni, basta sostituire  $e_x \rightarrow e_y$  e  $h_y \rightarrow -h_x$  per avere la soluzione con  $e_y$  ed  $h_x$ .

Prima di risolvere le (23), notiamo esplicitamente che queste equazioni descrivono campi variabili solo rispetto a una direzione. Che questa sia la direzione  $z$  è solo una conseguenza del sistema di riferimento scelto.

## 6 PROPAGAZIONE PER ONDE

Prima di addentrarci nelle proprietà generali delle (23) e nel calcolo della loro soluzione generale (che verrà però fatto solo per il caso di soluzioni che varino sinusoidalmente nel tempo) vediamo di trovare qualche soluzione particolare delle (20) e di discuterne le proprietà. Le (23) sono equazioni differenziali a derivate parziali, in cui le variabili sono  $z$ ,  $t$ . Cerchiamo soluzioni, se esistono, che dipendono da tali variabili solo tramite la grandezza  $z - v_p t$ , essendo  $v_p$  una costante (dimensionalmente una velocità) da determinare. Poniamo cioè

---

<sup>1</sup> La dimostrazione è riportata nella Appendice 3.

$$\begin{aligned} e_x(z, t) &= \mathcal{E}(z - v_p t) \\ h_y(z, t) &= \mathcal{H}(z - v_p t) \end{aligned} \quad (24)$$

dove  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{H}$  sono funzioni da determinare, e sostituiamo nelle (23).

$$\begin{aligned} -\dot{\mathcal{E}} &= -v_p \mu_0 \dot{\mathcal{H}} \\ -\dot{\mathcal{H}} &= -v_p \varepsilon_0 \dot{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}} &= \frac{1}{v_p \mu_0} \dot{\mathcal{E}} \\ \dot{\mathcal{H}} &= v_p \varepsilon_0 \dot{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (25)$$

dove il punto indica la derivata della funzione rispetto al proprio argomento. Le (25) costituiscono un sistema lineare omogeneo che può avere soluzione solo se le due equazioni sono equivalenti, ovvero se

$$v_p \mu_0 = \frac{1}{v_p \varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad v_p^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \quad (26)$$

che fissa il valore di  $v_p$ .

La costante  $v_p \mu_0 = (v_p \varepsilon_0)^{-1}$ , che lega  $\dot{\mathcal{E}}$  e  $\dot{\mathcal{H}}$  e che è dimensionalmente una impedenza, e prende il nome di *impedenza caratteristica* dello spazio libero. Tale grandezza s'indica in genere con  $\zeta$  e vale  $377 \, \Omega$ . Dalla (26) segue quindi

$$\zeta = v_p \mu_0 = \frac{1}{v_p \varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (27)$$

Notiamo poi che le equazioni delle onde piane determinano solo  $v_p^2$  e quindi vi saranno soluzioni funzione di  $\xi^+ = z - v_p^+ t$  e soluzioni funzione di  $\xi^- = z - v_p^- t$ , essendo  $v_p^+$  la radice quadrata positiva di  $(\mu_0 \varepsilon_0)^{-1}$  e  $v_p^- = -v_p^+$ .

Dalle (25) segue poi

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\xi} = \zeta \frac{d\mathcal{H}}{d\xi} \quad (28)$$

e, a parte una costante arbitraria che possiamo fissare pari a 0,

$$\mathcal{E}(\xi^+) = \zeta \mathcal{H}(\xi^+) \quad (29)$$

che è l'unica condizione imposta sulla  $\mathcal{E}$  (ed  $\mathcal{H}$ ). Allo stesso modo si ottiene  $\mathcal{E}(\xi^-) = -\zeta \mathcal{H}(\xi^-)$ . In altri termini, dette  $f$  e  $g$  due funzione arbitrarie, sono separatamente soluzioni delle equazioni delle onde piane sia

$$\begin{aligned} e_x(z, t) &= f(z - v_p t) \\ h_y(z, t) &= \frac{1}{\zeta} f(z - v_p t) \end{aligned} \quad (30)$$

sia

$$\begin{aligned}
e_x(z, t) &= g(z + v_p t) \\
h_y(z, t) &= -\frac{1}{\zeta} g(z + v_p t)
\end{aligned} \tag{31}$$

Prendiamo in particolare la (30). Se consideriamo la *fotografia* del campo elettrico a due istanti diversi di tempo,  $t_1$  e  $t_2$ , otteniamo rispettivamente  $f(z - v_p t_1)$  e  $f(z - v_p t_2)$ . In altri termini i due andamenti di campo sono uguali come forma ma si trovano in punti diversi dell'asse  $z$ . Se  $f(\xi)$  è diversa da 0 solo tra 0 e  $Z$ , allora il campo all'istante  $t_1$  è diverso da 0 tra  $z = v_p t_1$  e  $z = v_p t_1 + Z$ , mentre il campo all'istante  $t_2$  è diverso da 0 tra  $z = v_p t_2$  e  $z = v_p t_2 + Z$  (vedi Fig. 3).

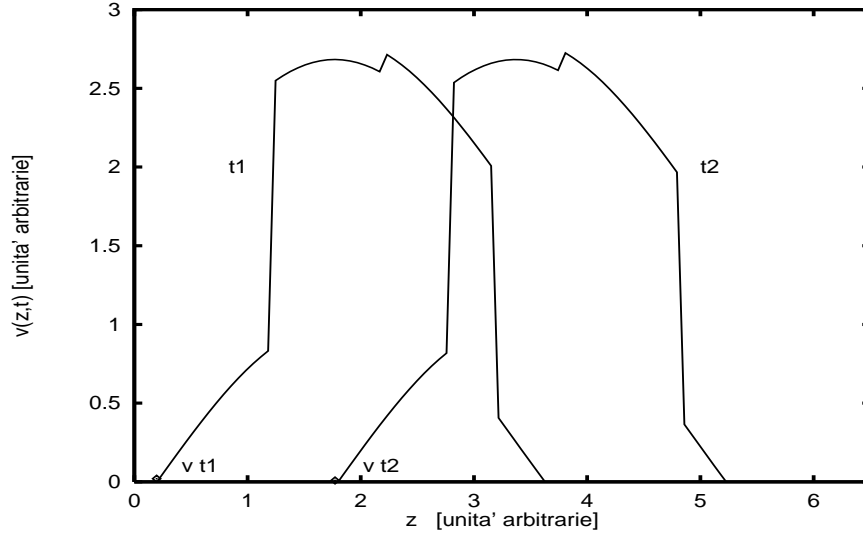


Fig. 1: Andamento del campo elettrico nello spazio negli istanti  $t_1$  e  $t_2$  (con  $t_2 > t_1$ ).

La funzione  $f(z - v_p t)$  rappresenta dunque una *onda* ovvero una *configurazione di campo* che si muove nello spazio con velocità finita misurabile, mantenendosi riconoscibile <sup>1</sup>. Il moto di un'onda è detto *propagazione*. Naturalmente questa onda deve avere una causa (ovvero una sorgente) posizionata per valori di  $z$  negativi (ovvero minori di quelli in cui stiamo considerando l'onda) e attiva precedentemente agli istanti  $t_1$ ,  $t_2$  in cui stiamo guardando tale onda.

La velocità di *propagazione* dell'onda descritta da  $f(z - v_p t)$  si ottiene immediatamente come rapporto tra lo spazio percorso nel moto e il tempo impiegato percorrerlo, e vale

$$\frac{v_p t_2 - v_p t_1}{t_2 - t_1} = v_p \tag{32}$$

L'onda descritta da  $f(z - v_p t)$  è pertanto un'onda che si propaga nel verso positivo dell'asse  $z$  con velocità pari a  $v_p$ . Allo stesso modo si può verificare che  $g(z + v_p t)$  rappresenta un'onda che si propaga con la stessa velocità, ma nel verso negativo dell'asse  $z$ . Si può cioè dire che i vettori velocità delle due onde sono  $v_p \hat{z}$  e  $-v_p \hat{z}$ . Le due onde prendono anche il nome di *onda progressiva* e *onda riflessa*. Notiamo esplicitamente che, *separatamente* per le due onde, la forma di tensione e di corrente è la stessa (a parte un cambio di segno per l'onda riflessa).

<sup>1</sup> Nel nostro caso, anzi, si mantiene esattamente inalterata la forma e persino la ampiezza.

D'altra parte le equazioni delle onde sono lineari, e quindi, qualunque siano le funzioni  $f$  e  $g$ , anche

$$e_x(z, t) = f(z - v_p t) + g(z + v_p t) \quad (33)$$

è una possibile onda di campo elettrico. La corrispondente onda di campo magnetico vale però

$$h_y(z, t) = \frac{1}{\zeta} [f(z - v_p t) - g(z + v_p t)] \quad (34)$$

e quindi la forma dei due campi è diversa ed il loro rapporto (che separatamente per le due onde di (30) e (31) è costante e pari a  $\zeta$ ) diviene funzione di  $(z, t)$ . Si può dimostrare che le (33,34) costituiscono la soluzione generale di (23).

Dalla (26) segue che se la costante dielettrica vale  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  allora

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_r \varepsilon_0) \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

ovvero la velocità di propagazione delle onde in un mezzo è numericamente pari alla velocità della luce nel mezzo stesso. Si noti che in tale mezzo l'impedenza intrinseca vale

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = \frac{\zeta}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

## 7 ONDE SINUSOIDALI

Consideriamo una onda piana sinusoidale nel tempo. Dalla forma generale delle onde piane, segue che questo è possibile se le funzioni  $f$  e  $g$  sono anch'esse sinusoidali, con la stessa pulsazione  $\omega$ . Infatti, se richiediamo che per  $z = 0$  risulti

$$e_x(0, t) = |E^+| \cos(\omega t + \varphi^+) + |E^-| \cos(\omega t + \varphi^-) \quad (35)$$

dovrà risultare  $f(-v_p t) = |E^+| \cos(\omega t + \varphi^+)$ , e analoga per  $g$ .

Se ne ricava quindi che

$$\begin{aligned} f(\xi) &= |E^+| \cos\left(\frac{\omega}{-v_p} \xi + \varphi^+\right) = |E^+| \cos\left(\frac{\omega}{v_p} \xi - \varphi^+\right) \\ g(\xi) &= |E^-| \cos\left(\frac{\omega}{v_p} \xi + \varphi^-\right) \end{aligned} \quad (36)$$

Pertanto la forma generale di una onda piana *sinusoidale* che si propaga in direzione  $z$  è

$$\begin{aligned} e_x(z, t) &= |E^+| \cos\left[\frac{\omega}{v_p}(z - v_p t) - \varphi^+\right] + |E^-| \cos\left[\frac{\omega}{v_p}(z + v_p t) + \varphi^-\right] \\ &= |E^+| \cos\left[\frac{\omega}{v_p} z - \omega t - \varphi^+\right] + |E^-| \cos\left[\frac{\omega}{v_p} z + \omega t + \varphi^-\right] \end{aligned} \quad (37)$$

Notiamo esplicitamente che l'ipotesi di una onda sinusoidale nel tempo implica automaticamente che l'onda ha un andamento sinusoidale anche nello spazio.

Si definisce costante di propagazione della onda piana la quantità

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \quad (38)$$

con la convenzione di prendere sempre la radice reale positiva.

Per questo campo sinusoidale, possiamo considerare, per ogni punto  $z$ , il corrispondente numero complesso, che dipende solo da  $z$ :

$$E_x(z) = E^+ e^{-j\beta z} + E^- e^{j\beta z} \quad (39)$$

Nella rappresentazione (39), il primo termine è l'onda progressiva e il secondo quella riflessa. La possibile doppia scelta del segno di  $\beta$  si riflette nella presenza di due termini nella soluzione, con valori opposti di  $\beta$ . La convenzione fatta sul segno della radice quadrata consente di associare a ciascuna delle due possibili onde (incidente e riflessa) una espressione univoca.

La costante  $\beta$  gioca allora il ruolo della *pulsazione* ed il corrispondente *periodo spaziale*

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (40)$$

prende nome di *lunghezza d'onda*.

La espressione (39) del campo elettrico soddisfa ovviamente anche le (23), riscritte ovviamente per segnali sinusoidali. Ricordando che nel passaggio nel  $DF$  la derivata rispetto al tempo diventa una moltiplicazione per  $j\omega$ , e che quella spaziale resta inalterata (vedi Appendice), le (23) diventano

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z} E_x &= j\omega\mu H_y \\ -\frac{\partial}{\partial z} H_y &= j\omega\varepsilon E_x \end{aligned} \quad (41)$$

A partire dalla rappresentazione (39) si ottiene, dalla prima della (41), l'andamento del campo magnetico, come

$$H_y(z) = \frac{\beta}{\omega\mu_0} \left[ E^+ e^{-j\beta z} - E^- e^{j\beta z} \right] \quad (42)$$

Ovviamente anche nella (42) vi sono i due termini di onda progressiva e riflessa, col segno meno tra di essi. Inoltre, confrontando (42) e (29) segue che  $\beta/\omega\mu_0$  è l'inverso della impedenza caratteristica del vuoto.

Può essere utile riscrivere la (39) mettendo in evidenza l'onda progressiva

$$E_x(z) = E^+ e^{-j\beta z} \left[ 1 + \frac{E^-}{E^+} e^{2j\beta z} \right] = E^+ e^{-j\beta z} \left[ 1 + \Gamma(z) \right] \quad (43)$$

L'ultima uguaglianza della (43) definisce la funzione  $\Gamma(z)$ , che prende il nome di *coefficiente di riflessione* e misura il rapporto tra l'ampiezza dell'onda riflessa e quella dell'onda incidente <sup>1</sup>. Una importante proprietà del coefficiente di riflessione è che, essendo  $\beta$  reale,  $|\Gamma(z)|$  è costante.

---

<sup>1</sup> Si noti che, spesso, si indica la quantità  $\Gamma(0) = E^-/E^+$  semplicemente col simbolo  $\Gamma$ .

Possiamo infine scrivere anche il campo magnetico in una forma analoga alla (43) come

$$H_y(z) = \frac{1}{\zeta} E^+ e^{-j\beta z} \left[ 1 - \Gamma(z) \right] \quad (44)$$

## 8 MEZZI DISPERSIVI

Il vuoto non ha costituenti elementari, e quindi la risposta al campo applicato è istantanea (vedi (15)). Abbiamo anche detto che molti materiali hanno relazioni costitutive analoghe (16), ovvero istantanee. Questo però è possibile solo se i costituenti elementari sono privi di inerzia. Evidentemente nessun oggetto fisico è privo di inerzia, per cui le (16) possono solo essere delle approssimazioni, di cui va valutata precisione e limiti di applicabilità.

Occorre quindi esaminare più in dettaglio l'effetto dell'inerzia dei costituenti microscopici sulle relazioni costitutive. Al solito consideriamo il caso dei materiali dielettrici, in quanto le altre relazioni costitutive hanno comportamenti matematicamente analoghi.

La relazione tra induzione e campo elettrico finora utilizzata è stata la

$$\mathbf{d}(t) = \varepsilon \mathbf{e}(t) \quad (45)$$

in cui i due vettori sono calcolati nello stesso punto.

Sappiamo che un dielettrico risponde al campo  $\mathbf{e}(t)$  applicato polarizzandosi, ovvero orientando (o deformando) i dipoli che lo costituiscono. Se il campo  $\mathbf{e}(t)$  è costante o varia molto lentamente, tali dipoli riescono a seguire senza ritardo la variazione del campo elettrico, e allora può valere la (45). Se invece la variazione di  $\mathbf{e}$  è rapida, i dipoli non riescono più a seguirla istantaneamente a causa della loro inerzia e pertanto la polarizzazione di un dielettrico dipenderà non solo al campo applicato in quell'istante ma anche da quello che era stato applicato precedentemente (*materiali con memoria*).

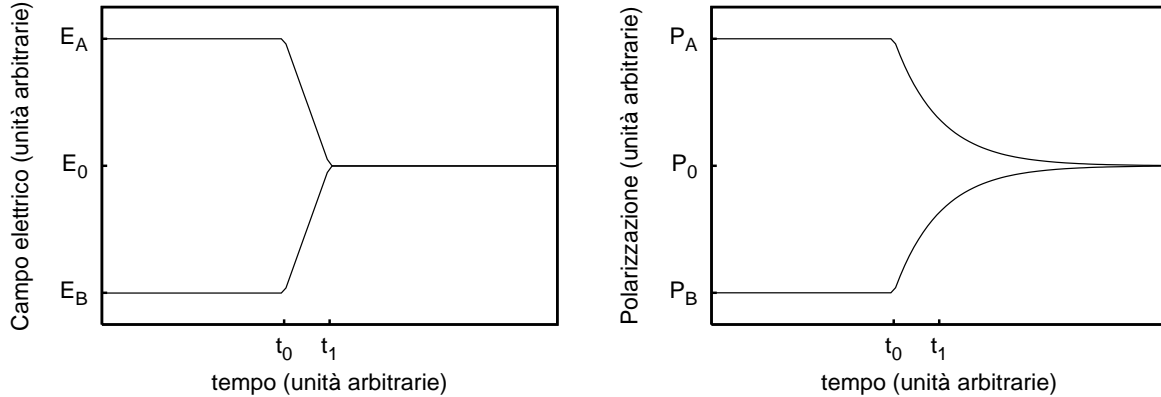


Fig. 1: Andamenti di campo elettrico e polarizzazione in un materiale con memoria

Consideriamo i due casi di Fig 1. Per  $t < t_0$  il dielettrico ha una certa polarizzazione,  $P_A$ , nel caso in cui campo elettrico valga  $E_A$ , e una inferiore,  $P_B$ , se il campo vale  $E_B$ . A  $t = t_0$  Il campo varia molto rapidamente portandosi, in entrambi i casi, al valore  $E_0$  all'istante  $t_1$ . Nel caso A la polarizzazione si riduce ma, a causa della inerzia, tende a ridursi più lentamente del campo per cui all'istante  $t_1$  sarà maggiore di quella che si avrebbe per un campo costantemente pari ad  $E_0$ . Allo stesso modo, nel caso B, la crescita è più lenta di quella del campo e la polarizzazione resta minore di quella corrispondente a un campo pari a  $E_0$ , che è poi anche il valore a regime, ovvero per  $t \rightarrow \infty$ . Il risultato è mostrato in figura 2, dove si vede che lo stesso campo, pari ad  $E_0$ , dà luogo a polarizzazioni diverse a seconda della *storia* del campo negli istanti precedenti. La (36) va allora generalizzata, introducendo la polarizzazione  $\mathbf{p}(t)$  nella forma



$$\mathbf{d}(t) = \varepsilon_0 \mathbf{e}(t) + \mathbf{p}(t) \quad (46)$$

La polarizzazione  $\mathbf{p}(t)$  dipende non solo dal campo applicato nello stesso istante  $\mathbf{e}(t)$ , ma anche da tutti i valori passati del campo, e in particolare da come varia il campo.

Il caso più semplice è quello di un campo statico (ovvero costante nel tempo). In tal caso la polarizzazione è sempre proporzionale al campo stesso

$$\mathbf{p} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{e} \quad (47)$$

e quindi vale la prima delle (16). La costante  $\chi$ , detta polarizzabilità statica, vale  $\varepsilon_r - 1$ . Possiamo aspettarci quindi che le (16) valgano se il campo varia lentamente. Per vedere però cosa significa, nel nostro caso, l'avverbio *lentamente* e per poter considerare anche campi che non variano lentamente, occorre esaminare la relazione tra  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{e}$ . Questa relazione può essere anche molto complicata, ma in genere vengono usati modelli semplici, ovviamente approssimati, ma che consentono di descrivere più facilmente il comportamento del campo in materiali dispersivi.

Il modello più semplice del comportamento di Fig. 1 è un modello esponenziale (modello del primo ordine <sup>1</sup>). Se il campo applicato varia bruscamente da zero a un valore  $\mathbf{e}_0$ , la polarizzazione dovrà passare da zero al suo valore finale pari a  $\chi \varepsilon_0 \mathbf{e}_0$ . Nel modello del primo ordine si assume che la velocità di variazione di  $\mathbf{p}(t)$  sia proporzionale alla differenza tra il valore *finale* di  $\mathbf{p}(t)$ , dato dalla (47), e quello attuale:

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [\chi \varepsilon_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{p}(t)] \quad (48)$$

con  $\tau$  costante empirica di proporzionalità.

La (48) è una equazione differenziale del primo ordine non omogenea

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{p}(t) = \frac{\chi \varepsilon_0}{\tau} \mathbf{e}_0 \quad (49)$$

Poichè un integrale particolare della equazione completa è costante (e pari a  $\chi \varepsilon_0 \mathbf{e}_0$ ), la soluzione di questa equazione è

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 e^{-t/\tau} + \chi \varepsilon_0 \mathbf{e}_0$$

La costante di integrazione  $\mathbf{p}_0$  si ottiene imponendo che  $\mathbf{p}(0) = 0$  e vale  $\mathbf{p}_0 = -\chi \varepsilon_0 \mathbf{e}_0$ . Sostituendo segue

$$\mathbf{p}(t) = \chi \varepsilon_0 \mathbf{e}_0 [1 - e^{-t/\tau}] \quad (50)$$

La costante empirica  $\tau$  è dunque la costante di tempo della transizione di  $\mathbf{p}(t)$  dal valore iniziale a quello finale, nel senso che questa transizione è completata in un tempo pari a 6–8 volte <sup>2</sup> il valore di  $\tau$ .

Pertanto gli effetti della dispersività si sentono solo se la scala temporale di variazione del campo è paragonabile, o minore, di  $\tau$ .

---

<sup>1</sup> Se consideriamo la relazione tra  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{p}$  come un sistema dinamico, allora il modello esponenziale corrisponde a un sistema del primo ordine, con un solo polo.

<sup>2</sup> Dopo  $6\tau$  il valore di  $\mathbf{p}(t)$  differisce dal valore finale dello 0.3 %, dopo  $8\tau$  dello 0.03 %

Il significato fisico di  $\tau$  può essere visto considerando la diseccitazione del dielettrico. Supponiamo che il dielettrico subisca un campo costante  $\mathbf{e}_0$  che, a  $t = 0$  viene bruscamente spento. Il valore di  $\mathbf{p}(t)$  si ottiene da una equazione simile alla (49) ma con il forzamento nullo

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{p}(t) = 0$$

La soluzione è  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) e^{-t/\tau}$ , dove la costante di integrazione  $\mathbf{p}(0)$  è il valore dalla polarizzazione prima dello spegnimento del campo e vale  $\chi\varepsilon_0\mathbf{e}_0$ . Sostituendo si trova

$$\mathbf{p}(t) = \chi\varepsilon_0\mathbf{e}_0 e^{-t/\tau} \quad (51)$$

Dalla (51) segue che la polarizzazione decade a 0 in un tempo di alcune volte  $\tau$ <sup>3</sup>. Poichè la polarizzazione si stabilisce se i costituenti elementari si muovono sotto l'azione del campo, e scompare quando gli stessi costituenti elementari, non più spinti dal campo, si muovono tornando ad una configurazione casuale, ne segue che  $\tau$  misura l'inerzia dei costituenti microscopici al moto.

Possiamo riesprimere questo fatto in termini di frequenza, visto che siamo particolarmente interessati a segnali sinusoidali. Se il campo applicato è sinusoidale a frequenza  $\omega_0$ , ovvero  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{E} \cos(\omega_0 t)$ , l'equazione (48) diventa, nelle approssimazioni del modello di primo ordine,

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [\chi\varepsilon_0 \mathbf{E} \cos(\omega_0 t) - \mathbf{p}(t)]$$

ovvero

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{p}(t) = \frac{\chi\varepsilon_0}{\tau} \mathbf{E} \cos(\omega_0 t) \quad (52)$$

Possiamo trasformare la (52) nel  $DF$ , ottenendo

$$j\omega_0 \mathbf{P} + \frac{1}{\tau} \mathbf{P} = \frac{\chi\varepsilon_0}{\tau} \mathbf{E} \quad (53)$$

in cui  $\mathbf{P}$  è il vettore complesso corrispondente alla polarizzazione sinusoidale  $\mathbf{p}(t)$ .

Risolvendo la (53) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{\chi\varepsilon_0}{\tau} \frac{1}{j\omega_0 + \frac{1}{\tau}} \mathbf{E} = \chi\varepsilon_0 \frac{1}{1 + j\omega_0\tau} \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \left[ 1 + \frac{\chi}{1 + j\omega_0\tau} \right] \mathbf{E} = \varepsilon(\omega_0) \mathbf{E} \end{aligned} \quad (54)$$

Nella (54) si è definita la costante dielettrica complessa

$$\varepsilon(\omega_0) = \varepsilon_0 \left[ 1 + \frac{\chi}{1 + j\omega_0\tau} \right] \quad (55)$$

dipendente dalla frequenza (ma, in ogni dato problema nel  $DF$ , fissata, essendo fissata la frequenza).

---

<sup>3</sup> Dopo  $6\tau$  il valore di  $\mathbf{p}(t)$  è pari al 0.3 % di quello iniziale, , dopo  $8\tau$  allo 0.03 %

Dalla (54) segue che un materiale è non dispersivo se la frequenza  $\omega_0$  a cui viene sollecitato è sufficientemente piccola da soddisfare  $\omega_0\tau \ll 1^3$ .

D'altra parte il valore di  $\tau$  dipende dalla inerzia dei costituenti microscopici del materiale rispetto alla polarizzazione, e quindi l'intervallo di frequenza in cui il materiale è dispersivo, dipende da tale inerzia. Nel caso dei dielettrici occorre distinguere tra quei dielettrici, come l'acqua, che si polarizzano soprattutto per orientazione e quelli che si polarizzano per deformazione. Nel primo caso è tutta la molecola che deve ruotare, e quindi il valore di  $\tau$  è notevolmente più grande che per la polarizzazione per deformazione, in cui è solo la nuvola atomica che si deforma. Valori tipici di  $\tau$  per l'acqua sono intorno ai 50–100 *psec*, per cui l'acqua può essere considerata non dispersiva solo fino alle decine di *MHz*. Invece materiali con molecole non polari, prive di dipoli permanenti che possano orientarsi, e che quindi si polarizzano solo per deformazione, hanno valori di  $\tau$  molto più piccoli e possono essere considerati non dispersivi anche per frequenze di decine di *GHz*.

Il modello del primo ordine (50) può essere applicato anche alla relazione tra  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{h}$  ed a quella tra  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{e}$ , con considerazioni simili. In particolare, la  $\mathbf{j}$  è dovuto in genere al moto di elettroni liberi, che sono molto leggeri. Quindi la relazione tra  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{e}$  è considerabile non dispersiva fino a frequenze molto elevate (centinaia di *GHz* e oltre).

Per quanto riguarda la relazione tra  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{h}$ , occorre preliminarmente distinguere i materiali *ferromagnetici* da tutti gli altri. Sono ferromagnetici i metalli ferrosi (ferro, nichel, cobalto) le loro leghe (acciaio, ghisa) e i loro minerali (magnetite). Sono anche ferromagnetici le *ferriti*, materiali costituiti da ceramiche e polvere di metalli.

Per tutti i materiali non ferromagnetici, la relazione tra  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{h}$  è semplicemente

$$\mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h}$$

ovvero si comportano come il vuoto ( $\mu_r \simeq 1$ ).

Per i materiali ferromagnetici, invece, i costituenti che rispondono al campo orientandosi sono i *domini magnetici*, costituiti da molti atomi insieme, e quindi hanno inerzia elevatissima. Pertanto i materiali ferromagnetici (escluse le ferriti) sono dispersivi anche a bassa frequenza, e con valori di  $\mu_r$  molto elevati (anche superiori a 10000). Tuttavia, già a frequenze di poche decine di *MHz* (dipendenti dal materiale) perdono del tutto le loro caratteristiche magnetiche, ovvero acquistano anch'esse la risposta magnetica del vuoto.

## 9 EQUAZIONI DI MAXWELL NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Se le correnti e i campi sono tutte sinusoidali con la stessa frequenza  $\omega$ , è possibile scrivere (e risolvere) le equazioni di Maxwell direttamente nel *DF*.

Ricordando le relazioni tra *DT* e *DF* (vedi App. 1) si trova

---

<sup>3</sup> La (54) implica anche che un materiale diventa equivalente al vuoto non appena  $\omega_0\tau \gg 1$ . In realtà, come vedremo più avanti, è vero che per  $\omega_0 \rightarrow \infty$  tutti i materiali diventano simili al vuoto, ma occorrono frequenze molto più grandi di quella minima che soddisfi  $\omega_0\tau \gg 1$

$$\begin{aligned}
\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -j\omega \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\
\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= -j\omega \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J}_{tot} \cdot d\mathbf{S} \\
\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \rho_{tot} dV \\
\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0
\end{aligned} \tag{56}$$

Nelle (56) si è usata la convenzione di indicare con la lettera maiuscola le grandezze vettoriali nel  $DF$ .

Abbiamo già detto che, per poter lavorare nel dominio della frequenza, occorre che le sorgenti siano tutte sinusoidali a frequenza  $\omega$  e i campi che queste producono siano anch'essi sinusoidali con la stessa frequenza. Per ottenere ciò è necessario che la risposta del materiale sia lineare e a coefficienti costanti.

L'utilizzo del  $DF$  consente di trattare in maniera formalmente simile al vuoto non solo i materiali non dispersivi, ma anche altre categorie di materiali, che includono buona parte dei materiali di interesse, ovvero i materiali in cui  $\mathbf{j} \neq 0$  (materiali con perdite) e quelli *dispersivi*.

Per i materiali dispersivi, la relazione tra  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{e}$  nel dominio del tempo è abbastanza complicata. Invece nel  $DF$  tale relazione diventa semplicemente la (54)

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}$$

dove  $\varepsilon(\omega)$  prende ancora il nome di costante dielettrica (complessa). Poichè nel  $DF$  la frequenza risulta fissata, la relazione precedente non crea alcun problema nella risoluzione delle equazioni di Maxwell. Va però notato che la funzione  $\varepsilon(\omega)$ , per il solo fatto di dipendere da  $\omega$ , deve necessariamente essere **complessa**.

Materiali con perdite sono quelli in cui è presente una conducibilità  $\sigma$  finita (e, per quanto detto prima, non dispersiva), e per cui

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

Per tali materiali le equazioni di Maxwell diventano

$$\begin{aligned}
\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -j\omega \int_S \mu\mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \\
\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= j\omega \int_S \varepsilon\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \sigma\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J}_0 \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned} \tag{57}$$

La seconda equazione può essere formalmente scritta in modo del tutto analogo a quella in assenza di conducibilità <sup>1</sup> mettendo in evidenza  $j\omega\mathbf{E}$ :

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S [j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E}] \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J}_0 \cdot d\mathbf{S} = j\omega \int_S \left[ \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right] \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J}_0 \cdot d\mathbf{S} \tag{58}$$

a patto di usare la *costante dielettrica efficace*

---

<sup>1</sup> Questa equivalenza formale non è invece possibile nel  $DT$ .

$$\varepsilon_e = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}$$

al posto di  $\varepsilon$ . Questo non modifica la soluzione formale delle equazioni di Maxwell, ma, come vedremo più avanti, altera il significato fisico di dette equazioni.

Si può concludere quindi che in presenza e in assenza di perdite, o di dispersione, le equazioni di Maxwell nel  $DF$  hanno sempre la forma<sup>2</sup>

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \int_S \mu \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = j\omega \int_S \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J}_0 \cdot d\mathbf{S}$$

a patto di considerare, se necessario,  $\varepsilon$  (ed eventualmente  $\mu$ ) complesso (e dipendente da  $\omega$ , che è però un parametro del problema), e di includere la conducibilità nella costante complessa  $\varepsilon$  (considerandola cioè costante dielettrica efficace).

## 10 TEOREMA DI POYNTING

Associata alla propagazione del campo elettromagnetico, c'è anche la propagazione di energia, o meglio di potenza. Naturalmente la potenza fluisce distribuita nello spazio, e quindi la sua rappresentazione va ridefinita adeguatamente.

Consideriamo la quantità

$$\mathbf{s} = \mathbf{e} \times \mathbf{h} \quad (59)$$

detta vettore di Poynting. L'unità di misura di  $\mathbf{s}$  risulta essere  $W/m^2$ , e quindi  $\mathbf{s}$  appare come una *densità* di potenza. Intuitivamente, quindi, il vettore di Poynting può avere un significato fisico collegato alla potenza. Occorre comunque vedere se tale interpretazione è valida.

Naturalmente, essendo interessati al dominio della frequenza, conviene considerare, al posto di  $\mathbf{s}$ , il suo equivalente

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (60)$$

detto vettore di Poynting nel  $DF$ . La connessione è la generalizzazione invalida per la potenza (vedi App. 1): la parte reale di  $\mathbf{S}$  risulta la media in un periodo di  $\mathbf{s}$ , nel caso di campi sinusoidali.

---

<sup>2</sup> Notiamo che, per esaltare la simmetria delle equazioni di Maxwell, si introduce talvolta una *corrente magnetica* impressa  $\mathbf{M}_0$  nella prima equazione:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \int_S \mu \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} - \int_S \mathbf{M}_0 \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = j\omega \int_S \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J}_0 \cdot d\mathbf{S}$$

A partire dalle equazioni di Maxwell (vedi App. 5) si può dimostrare che, per un qualunque campo elettromagnetico, questo vettore soddisfa a

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_n dS + \frac{1}{2} \omega \int_V \varepsilon_2 |\mathbf{E}|^2 dV = -j 2\omega \int_V \left[ \frac{1}{4} \mu |\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_1 |\mathbf{E}|^2 \right] dV + \frac{1}{2} \int_V [-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^*] dV \quad (61)$$

che viene detta *Teorema di Poynting*. Nella (61) il volume  $V$  è un volume qualunque, racchiuso da una superficie  $S$ , e si è posto  $\varepsilon = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2$ , separando parte reale ed immaginaria.

Dal punto di vista matematico, la (61) è una relazione valida per qualunque campo elettromagnetico, ovvero per qualunque soluzione delle equazioni di Maxwell. Una relazione come la (61) prende il nome di *integrale primo*, ed è analogo al *teorema delle forze vive* o, per forze conservative, alla conservazione della energia totale, che si ricavano dalla legge di Newton della dinamica.

Molto più interessante è invece il significato fisico della (61). Per identificarlo, partiamo dall'ultimo termine, che coinvolge le correnti impresse  $\mathbf{J}_0$ , dovute a cariche, densità  $\rho$ , in movimento con una velocità  $\mathbf{v}_0$  dovuta a cause esterne al campo. Su tali correnti impresse, comunque, si esercita anche la forza di Lorentz, di densità spaziale nel  $DT$  data da

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{e} + \rho \mathbf{v}_0 \times \mathbf{b} \quad (62)$$

La (densità spaziale di) potenza esercitata dal campo sulle correnti impresse vale

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_0 = (\rho \mathbf{e} + \rho \mathbf{v}_0 \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}_0 = \rho \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e} = \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{e} \quad (63)$$

in quanto il termine con  $\mathbf{b}$  non contribuisce, per le proprietà del prodotto misto. Integrando su  $V$  si ottiene la potenza istantanea totale che il campo fornisce alle correnti impresse. Il suo opposto è quindi la potenza istantanea totale che le correnti impresse forniscono al campo nel volume  $V$

$$p_C(t) = - \int_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_0 dV$$

A  $p_C(t)$  corrisponde, nel  $DF$ , una potenza complessa che le correnti impresse forniscono al campo:

$$P_C = - \int_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^* dV \quad (64)$$

la cui parte reale corrisponde, per campi sinusoidali, al valore medio di  $p_C(t)$ .

Ovviamente le correnti impresse prelevano la potenza che forniscono al campo dalle sorgenti primarie che le mettono in moto. Se  $p_G(t)$  è la potenza che le sorgenti primarie forniscono alle correnti impresse (vedi fig. 1) deve risultare

$$p_G(t) = p_C(t) + \frac{dW_C}{dt} \quad (65)$$

essendo  $W_C(t)$  la energia interna delle correnti impresse (tipicamente energia cinetica).

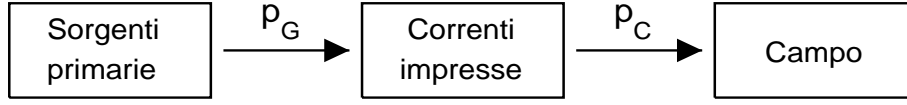


Fig. 1: Flussi di potenza coinvolti

Nel dominio della frequenza la (65) risulta molto più semplice. Infatti, per definizione di media su di un periodo

$$\left\langle \frac{dW_C}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{dW_C}{dt} dt = \frac{1}{T} [W_C(t+T) - W_C(t)] \quad (66)$$

essendo  $T$  il periodo e  $t$  un istante qualunque. Se tutte le grandezze sono sinusoidali, l'energia  $W_C$  è periodica e quindi l'ultimo termine della (66) è nullo. Pertanto il valor medio della derivata di qualunque grandezza è sempre nullo. Ne segue che nel  $DF$

$$P_G = P_C \quad (67)$$

L'integrale finale della (61) è il secondo membro della (64) e possiamo quindi sostituirlo con  $P_G$  (vedi (67)). Si ottiene quindi dalla (61), ponendo  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_r + j\mathbf{S}_i$  e separando parte reale e immaginaria

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{i}_n dS + \frac{1}{2} \omega \int_V \varepsilon_2 |\mathbf{E}|^2 dV &= + \text{Re}[P_G] \\ \oint_S \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{i}_n dS &= -2\omega \int_V \left[ \frac{1}{4} \mu |\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_1 |\mathbf{E}|^2 \right] dV + \text{Im}[P_G] \end{aligned} \quad (68)$$

Esaminiamo per prima la parte reale. Se il materiale ha  $\varepsilon_2 = 0$ , ad esempio il vuoto, risulterà

$$\oint_S \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{i}_n dS = \text{Re}[P_G] \quad (69)$$

ovvero tutta la potenza che le sorgenti forniscono al campo nel volume  $V$  diventerà flusso **uscente** del vettore  $\mathbf{S}_r$ . Fisicamente, non essendoci perdite nel volume  $V$ , tutta questa potenza dovrà uscire dalla superficie  $S$  per essere dissipata o compiere lavoro all'**esterno** del volume  $V$ . Possiamo quindi concludere che

$$\oint_S \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{i}_n dS$$

essendo un flusso di qualcosa che attraversa la superficie  $S$  verso l'esterno, può essere interpretata come la potenza che fuoriesce dal volume  $V$ .<sup>1</sup>

Il flusso di  $\mathbf{S}_r$  coinvolge i valori dei campi su  $S$ , e quindi è (logicamente) indipendente dal materiale che riempie  $V$ . Pertanto questa interpretazione è valida anche se  $\varepsilon_2 \neq 0$

---

<sup>1</sup> Da questa interpretazione se ne potrebbe dedurre anche che  $\mathbf{S}$  sia la densità di questo flusso di potenza. In realtà questo è vero in molti casi di interesse, ad es. le onde piane, ma non in generale, in quanto  $\mathbf{S}$  non è univocamente definito

In quest'ultimo caso, ovviamente, il bilancio di potenza coinvolgerà anche il secondo termine della parte reale della (68). La potenza fornita dalle sorgenti primarie in parte fluirà all'esterno di  $V$  e in parte verrà dissipata all'interno di  $V$ . Il termine di dissipazione è quindi

$$\frac{1}{2} \omega \int_V \varepsilon_2 |\mathbf{E}|^2 dV$$

Sappiamo che  $\varepsilon_2$  può derivare sia da fenomeni di *attrito* nella polarizzazione delle molecole, sia da conducibilità (metallica). Possiamo separare i due effetti, ponendo:  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2d} + \sigma/\omega$ . Il termine di dissipazione diventa allora:

$$\frac{1}{2} \omega \int_V \varepsilon_2 |\mathbf{E}|^2 dV = \frac{1}{2} \omega \int_V \varepsilon_{2d} |\mathbf{E}|^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma |\mathbf{E}|^2 dV \quad (70)$$

in cui l'ultimo integrale è la potenza attiva dissipata per effetto Joule.

Pertanto la prima delle (68) può essere interpretata come la conservazione della potenza attiva relativamente al campo elettromagnetico.

Di conseguenza, il valore di  $\varepsilon_2$  è indicativo delle perdite del materiale. Materiali con  $\varepsilon_2 = 0$  sono quindi privi di perdite. Notiamo esplicitamente che, a causa del principio di *causalità* (la causa **deve** precedere l'effetto) materiali dispersivi (ovvero con  $\varepsilon$  dipendente da  $\omega$ ) devono avere necessariamente  $\varepsilon_2 \neq 0$ , ovvero devono necessariamente avere perdite. Se tali perdite sono molto piccole, il materiale viene detto trasparente. Notiamo anche che, talvolta, si usano modelli di materiali dispersivi ma senza perdite. Questo è un utile artificio, in quanto consente di ottenere più semplicemente i valori dei campi. Naturalmente, da tali modelli non possono essere derivate proprietà fisiche generali, in quanto tali modelli violano il principio di causalità.

Per quanto riguarda la seconda delle (68), i termini con  $P_G$  e con  $\mathbf{S}_i$  sono le potenze reattive associate rispettivamente ai generatori ed al flusso di potenza attraverso  $S$ . Ne segue che la potenza reattiva totale che "entra" in  $V$  serve a compensare la differenza, moltiplicata per  $2\omega$  tra

$$\int_V \frac{1}{4} \mu |\mathbf{H}|^2 dV \quad \text{e} \quad \int_V \frac{1}{4} \varepsilon_1 |\mathbf{E}|^2 dV \quad (71)$$

Il primo termine è la energia magnetica media immagazinata in  $V$ . Analogamente, il secondo termine è la energia elettrica media immagazinata in  $V$ , ma solo per i materiali non dispersivi, in cui  $\varepsilon$  è indipendente da  $\omega$ . Altrimenti questo termine (che potrebbe essere anche negativo) viene detto pseudo-energia elettrica.

Quindi il teorema di Poynting nel  $DF$  non contiene (al contrario di tutte le equazioni di bilancio della potenza) un termine di energia elettromagnetica **totale** immagazzinata. Ciò perchè tale termine dovrebbe essere di variazione di energia immagazzinata, e per segnali sinusoidali, il valor medio delle variazioni è nullo.

Ricapitolando, il teorema di Poynting può essere interpretato come:

$$\oint_S \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{i}_n dS + \frac{\omega}{2} \int_V \varepsilon_{2d} |E|^2 dV + \int_V \frac{\sigma}{2} |E|^2 dV = -\frac{1}{2} \text{Re} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^* dV$$

$$\left( \begin{array}{c} \text{potenza attiva} \\ \text{uscente da } V \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{potenza dissipata} \\ \text{per attrito in } V \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{potenza dissipata} \\ \text{per effetto Joule} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{potenza attiva} \\ \text{delle sorgenti } \mathbf{J}_0 \end{array} \right) \quad (72)$$



$$\oint_S \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{i}_n dS + 2\omega \int_V \left( \frac{1}{4}\mu |H|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_1 |E|^2 \right) dV + = -\frac{1}{2} \text{Im} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^* dV$$

$$\left( \begin{array}{c} \text{potenza reattiva} \\ \text{uscente da } V \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{differenza tra le pseudo-energie} \\ \text{immagazzinate in } V \end{array} \right) + = \left( \begin{array}{c} \text{potenza reattiva} \\ \text{delle sorgenti } \mathbf{J}_0 \end{array} \right) \quad (73)$$

La (72) consente di caratterizzare un materiale ideale, il **conduttore perfetto**, che viene largamente usato in elettromagnetismo. Si definisce **conduttore elettrico perfetto** un materiale in cui la conducibilità  $\sigma = \infty$ . Poichè la potenza dissipata non può essere infinita in nessuna situazione, la (72) implica che, all'interno di un conduttore elettrico perfetto, il campo elettrico debba essere identicamente nullo:  $\mathbf{E} \equiv 0$ . Parlando delle equazioni di Maxwell, abbiamo accennato al fatto che queste possono essere poste in una forma (forma differenziale) nella quale il campo magnetico è proporzionale alla variazione spaziale del campo elettrico. All'interno di un conduttore elettrico perfetto, quindi, anche il campo magnetico deve essere identicamente nullo:  $\mathbf{H} \equiv 0$ .

Se ora consideriamo un punto alla superficie esterna di un conduttore elettrico perfetto, la continuità del campo elettrico tangente mi assicura che in tale punto la *componente tangente* del campo elettrico deve anch'essa essere nulla. Per quanto riguarda la componente tangente del campo magnetico, questa può essere anche diversa da zero, in quanto un conduttore perfetto, per definizione, contiene cariche libere, che possono quindi produrre una corrente superficiale alla superficie del conduttore. Vedremo nel seguito che è esattamente quello che avviene.

A questo punto, per dualità, si definisce anche un **conduttore magnetico perfetto**, caratterizzato da avere, al suo interno,  $\mathbf{H} \equiv 0$  e  $\mathbf{E} \equiv 0$ . Alla superficie del conduttore magnetico perfetto la componente tangente del campo magnetico è nulla (mentre non abbiamo informazioni su quella del campo elettrico).

## 11 PROPAGAZIONE NEI MATERIALI DISPERSIVI E CON PERDITE

La presenza di perdite (dovute sia a  $\sigma_d \neq 0$ , sia ad  $\varepsilon_2 \neq 0$ ) può essere tenuta in conto molto semplicemente nelle equazioni delle onde piane. Se infatti (limitandoci a segnali sinusoidali) utilizziamo la costante dielettrica complessa <sup>9</sup>  $\varepsilon(\omega)$ , le equazioni di Maxwell nel  $DF$  assumono esattamente la stessa forma che in assenza di perdite.

Tutti gli sviluppi che portano alle equazioni delle onde piane che si propagano in direzione  $z$  restano quindi validi. Le equazioni risultanti possono quindi essere risolte analogamente introducendo, al posto della costante di propagazione reale  $\beta$ , una costante di propagazione complessa  $k$  (vedi (38)) definita da

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon(\omega) \mu \quad (74)$$

e scrivendo la soluzione (39) nella forma

$$E_x(z) = E_x^+ e^{-jkz} + E_x^- e^{jkz} \quad (75)$$

Notiamo che, come nel caso ideale, le due radici di  $k^2$  sono entrambe incluse in (75), ma conviene scegliere una convenzione per determinare  $k$  in modo da assegnare un significato univoco ai due termini di (75), ed in particolare che il primo rappresenti ancora una onda progressiva. Posto

$$k = \beta - j\alpha \quad (76)$$

con  $\beta, \alpha$  reali, il primo termine di (75) diventa, nel  $DT$

$$|E_x^+| e^{-\alpha z} \cos(\beta z - \omega t + \varphi^+) \quad (77)$$

che è ancora una onda <sup>10</sup> che viaggia nella direzione positiva dell'asse  $z$  se  $\beta > 0$

Mentre l'onda viaggia, deve poi attenuarsi a causa delle perdite. Ciò richiede che anche  $\alpha > 0$ . Pertanto una costante  $k$  è la radice di  $k^2$  che si trova nel 4° quadrante del piano di Gauss.

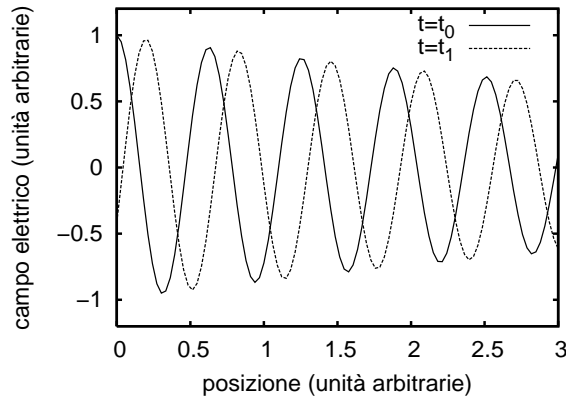


Fig. 1: Andamento del campo elettrico in un materiale con perdite ( $t_1 > t_0$ )

<sup>9</sup> Come detto precedentemente, da ora in poi  $\varepsilon(\omega)$  tiene conto sia della dispersione, sia delle perdite

<sup>10</sup> si ricordi che la definizione di onda non prevede che la configurazione viaggi mantenendosi identica ma solo *riconoscibile*

Poichè  $\varepsilon_2 > 0$  allora  $k^2$  si trova nel 3° o 4° quadrante, con fase compresa in  $(-\pi, 0)$ . Pertanto esisterà sempre una tale radice  $k$  con fase compresa tra  $-\pi/2$  e  $0$  ovvero nel 4° quadrante. I casi limite sono quelli corrispondenti a  $\varepsilon_2 = 0$  e si trattano come limite di  $\varepsilon_2 > 0$ :

$\varepsilon_1 > 0$  la radice  $k$  sarà sull'asse reale (caso ideale del paragrafo 3)

$\varepsilon_1 < 0$  la radice  $k$  sarà immaginaria pura, con parte immaginaria negativa.

Il campo magnetico corrispondente a (77), si scriverà ancora formalmente nello stesso modo, a patto di usare  $k$  (complesso) al posto di  $\beta$  e di prendere come impedenza il valore

$$\zeta = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{k}{\omega\varepsilon(\omega)} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(\omega)}} \quad (78)$$

complesso. Ciò che cambierà sarà invece l'interpretazione delle soluzioni così trovate (basta confrontare l'andamento del campo nella figura in questa pagina con quello relativo alla propagazione in assenza di perdite).

## 12 PROPAGAZIONE IN PRESENZA DI PICCOLE PERDITE

Le perdite in un materiale si assumono piccole se:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ll 1 \quad (79)$$

ovvero, utilizzando la conducibilità del materiale dielettrico  $\sigma_d$ ,

$$\frac{\sigma_d}{\omega\varepsilon_1} \ll 1 \quad (80)$$

In tal caso è possibile (se necessario) approssimare costante di propagazione e impedenza, e soprattutto calcolare in maniera perturbativa l'effetto delle perdite. Naturalmente va notato che, se  $\sigma_d$  è indipendente dalla frequenza, la condizione di piccole perdite è sempre meglio verificata quanto più aumenta la frequenza.

Per quanto riguarda la costante di propagazione, si ha, dalla (74):

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu} = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu}\sqrt{\left(1 - j\frac{\sigma_d}{\omega\varepsilon_1}\right)}$$

e utilizzando le condizioni di piccole perdite (79,80) è possibile espandere la radice stessa in serie di Taylor arrestandosi al primo termine. Si ottiene così

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu} \left[ 1 - j\frac{\sigma_d}{2\omega\varepsilon_1} \right] \quad (81)$$

La costante di propagazione  $\beta$  coincide quindi, in questa approssimazione, con quella in assenza di perdite, mentre ovviamente compare una attenuazione

$$\alpha = \beta \frac{\sigma_d}{2\omega\varepsilon_1}$$

Per quanto riguarda l'impedenza si ottiene, allo stesso ordine di approssimazione e con passaggi equivalenti partendo dalla (78)

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon(\omega)}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \left[ 1 - j \frac{\sigma_d}{2\omega\varepsilon_1} \right]^{-1/2} \simeq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \left[ 1 + j \frac{\sigma_d}{2\omega\varepsilon_1} \right] \quad (82)$$

Anche qui la parte reale di  $\zeta$  coincide con quella in assenza di perdite, mentre la parte immaginaria è positiva, così come  $\alpha$  che risulta, in presenza di perdite, sempre positiva. Tuttavia, mentre la presenza di una parte immaginaria di  $k$  diversa da zero produce una attenuazione, e quindi una differenza sostanziale nella fisica del fenomeno, una piccola parte immaginaria di  $\zeta$  ha solo l'effetto di produrre un piccolo sfasamento tra  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , e può quindi essere spesso trascurata.

### 13 MODELLO DI DEBYE

A valle della dimostrazione e interpretazione del teorema di Poynting, può essere utile tornare sul modello del primo ordine (50,54) per esaminarlo più in dettaglio.

La costante dielettrica complessa di tale modello, che nella letteratura è detto *modello di Debye*, o, più precisamente, modello di Debye del primo ordine, è data dalla (55), che qui riportiamo

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[ 1 + \frac{\chi}{1 + j\omega\tau} \right] \quad (55)$$

Separiamo parte reale e immaginaria della (55)

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\chi\varepsilon_0}{1 + \omega^2\tau^2} - j \frac{\chi\varepsilon_0\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (83)$$

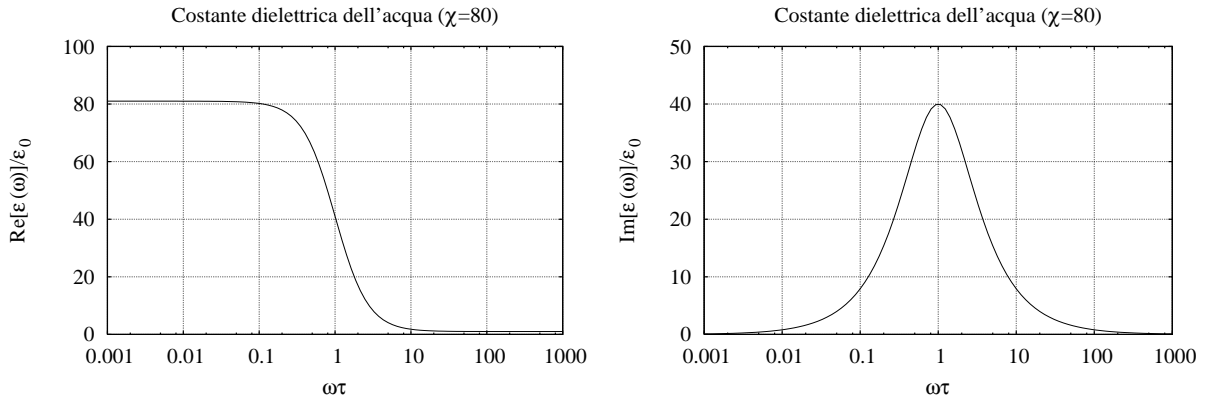


Fig. 1: Modello di Debye della costante dielettrica complessa (normalizzata a  $\varepsilon_0$ ) dell'acqua. A sinistra la parte reale, a destra quella immaginaria.

La parte immaginaria della (83) è il termine di dissipazione, ed è ovviamente negativa (vedi (68) ). Il suo valore assoluto ha un andamento, riportato in Fig. 1b, particolarmente interessante. Ha infatti un andamento a *campana*, essendo nullo per  $\omega = 0$  e per  $\omega = \infty$ , e presentando un unico massimo. Derivando e uguagliando a zero la parte immaginaria della (83) si ottiene la posizione del massimo

$$\frac{\chi \varepsilon_0 \tau [1 + \omega^2 \tau^2] - 2\omega \tau^2 \chi \varepsilon_0 \omega \tau}{[1 + \omega^2 \tau^2]^2} = 0$$

$$1 + \omega^2 \tau^2 = 2\omega^2 \tau^2$$

$$\omega = \frac{1}{\tau}$$

L'intervallo di frequenza in cui si ha dissipazione è quindi *risonante* con un picco di risonanza a  $1/\tau$ . Alla frequenza di risonanza  $\omega = 1/\tau$  si ha

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\tau}\right) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\chi}{2}\right) - j \frac{\chi \varepsilon_0}{2}$$

e quindi la parte immaginaria (dissipazione) è circa pari alla parte reale, ovvero pari alla metà della costante dielettrica statica  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 (1 + \chi)$

L'analisi della parte reale conferma poi che  $\tau$  misura effettivamente l'inerzia al moto dei costituenti microscopici. L'andamento della parte reale di (83) è riportato in Fig. 1a. Si vede che la polarizzazione, proporzionale a  $\text{Re}[\varepsilon(\omega)]/\varepsilon_0$ , segue  $\mathbf{e}(t)$  istantaneamente fino a frequenze dell'ordine di grandezza di  $0.1/\tau$ . Successivamente la risposta si riduce, e ritarda, mostrando che i costituenti elementari non riescono più a seguire il campo esterno in modo istantaneo, a causa della loro inerzia. Per frequenze superiori il ritardo aumenta molto, ovvero le particelle seguono solo con ritardo il campo applicato, finchè, a frequenze maggiori di  $10/\tau$  la risposta diventa sostanzialmente trascurabile, in quanto le particelle sono troppo pesanti per muoversi.

L'intervallo di frequenze in cui vi è dissipazione è molto largo, come si vede dalla Fig. 1b (che, ricordiamo, è in scala logaritmica). Si nota infatti che per frequenze  $\omega = 0.1/\tau$  e  $\omega = 10/\tau$ , la dissipazione è ancora il 20 % di quella massima.

L'andamento a campana della dissipazione può essere spiegato ricorrendo al teorema di Poynting.

Se scriviamo la legge di Ampère generalizzata introducendo la polarizzazione  $\mathbf{P}$  al posto del vettore  $\mathbf{D}$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon_0 \mathbf{E} + j\omega \mathbf{P} + \mathbf{J}$$

e la usiamo nel teorema di Poynting (\*) troviamo che nel bilancio della parte reale compare il termine

$$\mathcal{D}_d = \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot (j\omega \mathbf{P}^*) dV \right] = \text{Re} \left[ \frac{j\omega}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}^* dV \right] \quad (84)$$

che rappresenta la dissipazione dovuta al dielettrico.

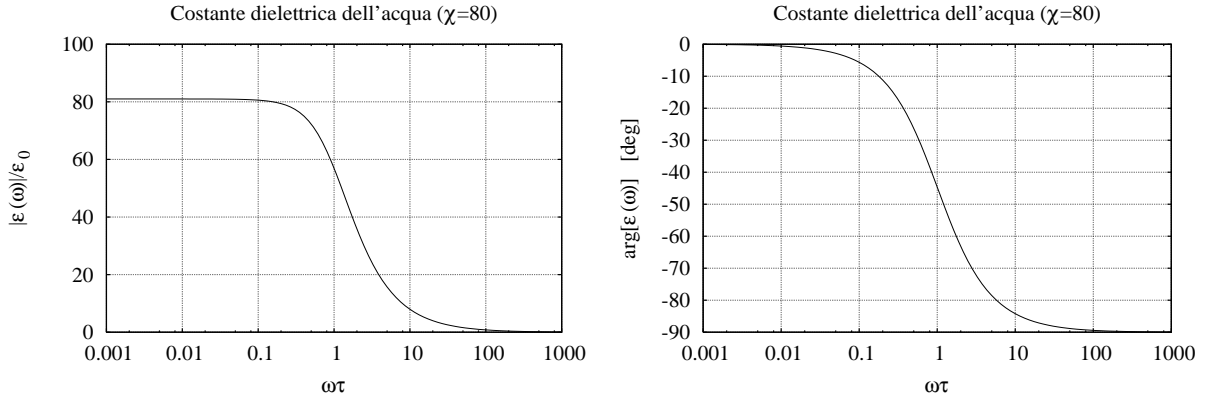


Fig. 2: Modello di Debye della costante dielettrica complessa (normalizzata a  $\varepsilon_0$ ) dell'acqua. A sinistra il modulo, a destra la fase.

In Fig. 2 è rappresentato il modulo e la fase della costante dielettrica, ovvero l'ampiezza delle oscillazioni di  $\mathbf{P}$ , fissato il campo impresso  $\mathbf{E}$ , e il suo ritardo di fase. Da esso si vede che, per frequenze piccole,  $\mathbf{P}$  è grande ma in fase con  $\mathbf{E}$ . Pertanto l'integrando della (84) è reale e  $\mathcal{D}_d$  si annulla.

Al crescere della frequenza, l'ampiezza della polarizzazione dapprima rimane costante, poi comincia a ridursi prima lentamente e poi molto rapidamente, finché non diventa praticamente zero. Viceversa, lo sfasamento tra  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{E}$  inizia a ridursi quasi subito. La fase dell'integrando in (84) inizia subito ad essere diversa da zero e quindi aumentano le perdite. Avvicinandosi a  $\omega = 1/\tau$ , le perdite aumentano in quanto la fase è ora molto diversa da 0, mentre l'ampiezza delle oscillazioni tende a restare costante. Superata, invece, questa frequenza, la riduzione molto rapida di  $|\varepsilon(\omega)|$ , e quindi della ampiezza della polarizzazione, fa diminuire la dissipazione, finché, per frequenze grandi, non si annulla in quanto si annulla la polarizzazione.

Concludiamo questo paragrafo notando che il modello di Debye è solo una prima approssimazione della risposta di un dielettrico. Considerando, ad esempio, l'acqua, le sue molecole si polarizzano per orientazione, e sono responsabili della elevata  $\varepsilon(0)$ , pari a circa 81. Tuttavia le molecole d'acqua hanno una inerzia notevole, e il picco di assorbimento si ha intorno a 1 GHz. Oltre la decina di GHz l'effetto della polarizzazione per orientazione si annulla. Tuttavia l'acqua ha una costante dielettrica diversa da 1 anche a frequenze ottiche ( $3 \cdot 10^5$  GHz). Ciò avviene perché le molecole d'acqua si polarizzano anche per deformazione. La polarizzazione per deformazione produce una costante dielettrica piccola, ma ha un valore di  $\tau$  molto più piccolo. Se la frequenza è molto più alta di quella a cui si ha il picco di assorbimento dell'acqua, la polarizzazione per orientazione scompare, ma rimane quella per deformazione.

Di questo fatto si può tener conto con un modello di Debye di ordine superiore:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[ 1 + \frac{\chi_1}{1 + j\omega\tau_1} + \frac{\chi_2}{1 + j\omega\tau_2} + \dots \right] \quad (85)$$

in cui ogni termine in parentesi corrisponde a un meccanismo di polarizzazione (e risulta  $\chi_1 \gg \chi_2 \gg \dots$  e  $\tau_1 \gg \tau_2 \gg \dots$ ).

I grafici delle parti reali e immaginarie sono riportati in Fig. 3, per  $\chi_1 = 80$ ,  $\chi_2 = 1$  e  $\tau_1 = 1000\tau_2$ . Si noti che, al contrario di Fig. 1, anche la scala verticale è logaritmica, e la scala orizzontale è pari a  $\omega\tau_1$ . Si spiegano così la seconda transizione (prossima a  $\omega\tau_1 = 1000$ ) tra parti costanti, corrispondente al secondo picco, molto poco pronunciato (essendo  $\chi_2$  relativamente

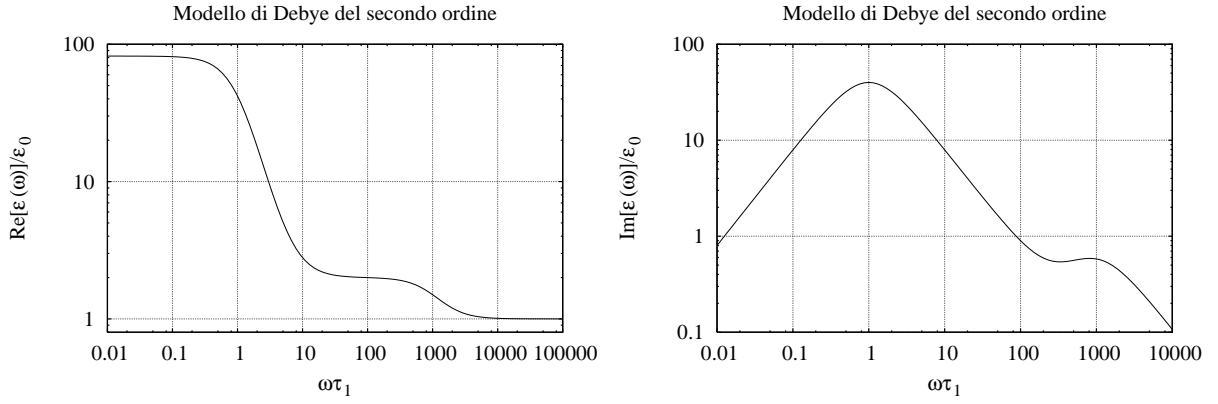


Fig. 3: Andamento della costante dielettrica complessa (normalizzata a  $\varepsilon_0$ ) per un modello di Debye del secondo ordine. A sinistra la parte reale, a destra quella immaginaria.

piccolo), della parte immaginaria.

Più semplicemente, se interessa solo il comportamento per  $\omega\tau_2 \ll 1$  (per l'acqua, questo copre tutto l'intervallo delle microonde), si può usare un modello del primo ordine modificato

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \frac{\chi}{1 + j\omega\tau} + \varepsilon_\infty \quad (86)$$

in cui  $\varepsilon_\infty > \varepsilon_0$  è il valore <sup>1</sup> della costante dielettrica per valori di frequenza molto più grandi di  $1/\tau$ .

Nel caso della Fig. 3, la (86) vale circa fino a  $\omega\tau = 100$

---

<sup>1</sup> Se riscriviamo la (86) nella forma

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[ 1 + \frac{\chi}{1 + j\omega\tau} \right] + [\varepsilon_\infty - \varepsilon_0]$$

ne risulta più chiaro il significato. In particolare  $\varepsilon_\infty - \varepsilon_0$  è il contributo, a bassa frequenza, di tutti i termini della (85) escluso i primi due.

## 14 DISCONTINUITA'

Le onde piane che abbiamo determinato possono esistere solo se la geometria è uniforme, non solo trasversalmente, ma anche rispetto a  $z$ . Tuttavia capita molto spesso che tale ipotesi non sia soddisfatta. Ciò può avvenire per due motivi:

- le proprietà geometriche o elettromagnetiche dello spazio variano con continuità rispetto a  $z$ ;
- la struttura in esame è costituita da più zone omogenee, ciascuna con parametri diversi da quelli delle altre.

Per semplicità, non considereremo il caso di regioni con proprietà variabili con continuità, e ci concentreremo sul caso di zone omogenee separate da discontinuità. In particolare considereremo per ora solo discontinuità piane, e parallele tra loro.

Questo problema si può risolvere, in linea di principio, scrivendo la soluzione generale delle onde piane in ogni zona omogenea, e poi collegandole attraverso le superfici di discontinuità. In tal modo si perviene a un sistema lineare nelle ampiezze incognite delle soluzioni, che va risolto con una delle numerosissime tecniche disponibili. Tuttavia la complessità computazionale di tale procedura cresce rapidamente col numero di tratti omogenei diversi, e contemporaneamente si riduce altrettanto rapidamente la comprensione fisica del fenomeno. Nel caso più semplice di una sola discontinuità, invece, è possibile ottenere la soluzione in maniera semplice e fisicamente significativa.

Supponiamo allora che i parametri della regione di sinistra, estesa fino a  $z = 0$ , siano  $\mu_1, \epsilon_1$  e quelli della regione di destra siano  $\mu_2, \epsilon_2$ .

La struttura viene alimentata con sorgenti poste in  $z = -\infty$  che quindi, in una zona omogenea, produrrebbero una onda progressiva di campo elettrico (vedi (39) )

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_i e^{-j\beta_1 z} \quad (87)$$

in cui indichiamo col pedice 1 tutte le costanti (primarie e secondarie) della zona per  $z < 0$  e col pedice 2 quelle della zona per  $z > 0$ . Ovviamente la ampiezza  $\mathbf{E}_i$  dipende dalla ampiezza della sorgente utilizzata, mentre la *forma* (87) di  $\mathbf{E}(z)$ , ne è indipendente e dipende solo dal fatto che la zona è omogenea e uniforme.

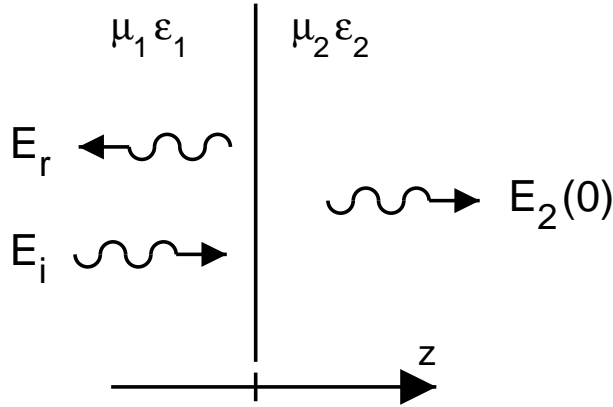


Fig. 1: Campi ad una discontinuità



L'onda progressiva (87) sarà presente, ma non da sola, anche nella struttura attuale (vedi Fig. 1) e anzi deve essere considerata la causa prima dei campi che troveremo in essa. In tal modo si divide lo studio della discontinuità da quello della interazione tra sorgenti e zona omogenea (che serve a determinare l'ampiezza della onda che viaggia verso la discontinuità). Il campo (87) prende il nome di campo (onda) *incidente* ed è definito come quel campo che esisterebbe nella struttura se questa fosse priva di discontinuità e con costanti uguali a quelle della zona 1. Quando l'onda (87) incide sulla discontinuità, produce una onda riflessa nella zona 1 e una onda trasmessa nella zona 2. In altri termini il campo totale nella struttura sarà

$$\mathbf{E}(z) = \begin{cases} \mathbf{E}_1(z) & \text{se } z \leq 0 \\ \mathbf{E}_2(z) & \text{se } z \geq 0 \end{cases} \quad (88)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(z) &= \mathbf{E}_i e^{-j\beta_1 z} + \mathbf{E}_r e^{j\beta_1 z} \\ \mathbf{E}_2(z) &= \mathbf{E}_2(0) e^{-j\beta_2 z} \end{aligned} \quad (89)$$

Naturalmente le (89) sono anche la soluzione generale delle equazioni di Maxwell nella ipotesi di onde piane in direzione  $z$ , separatamente per le zone 1 e 2. Vi è solo una modifica: è stata posta a zero la ampiezza dell'onda riflessa nella zona 2 in quanto, essendo tale zona illimitata, non vi sono cause per  $z > 0$  che possano produrre una tale onda.

Se il campo elettrico incidente è rivolto lungo  $x$ , anche quello riflesso e trasmesso lo sono per simmetria (vedi anche (23)). Assumendo quindi un campo incidente solo lungo  $x$ , le (89) possono essere scritte in soli termini scalari:

$$\begin{aligned} E_1(z) &= E_i e^{-j\beta_1 z} + E_r e^{j\beta_1 z} \\ E_2(z) &= E_2(0) e^{-j\beta_2 z} \end{aligned} \quad (90)$$

in cui le ampiezze dei campi  $E_i$ ,  $E_r$ ,  $E_2(0)$  sono le componenti  $x$  dei relativi campi.

Se il campo elettrico ha solo componente  $x$ , allora il campo magnetico ha solo componente  $y$  (vedi (23)), ed ha la stessa forma di (88,90)

$$H(z) = \begin{cases} H_1(z) & \text{se } z \leq 0 \\ H_2(z) & \text{se } z \geq 0 \end{cases} \quad (91)$$

con

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{\zeta_1} (E_i e^{-j\beta_1 z} - E_r e^{j\beta_1 z}) \\ H_2(z) &= \frac{1}{\zeta_2} (E_2(0) e^{-j\beta_2 z}) \end{aligned} \quad (92)$$

dove le ampiezze del campo magnetico  $H_1$ ,  $H_2$  sono le componenti  $y$  dei relativi campi.

Per poter determinare le costanti complesse  $E_r$  e  $E_2(0)$  e così completare la soluzione del nostro problema, occorre ricordare che alla sezione  $z = 0$  della zona devono essere continui i

componenti del campo elettrico  $\mathbf{E}_t$  e del campo magnetico  $\mathbf{H}_t$  tangenti alla superficie di discontinuità, e quindi trasversi rispetto a  $z$ . Nel nostro caso i campi sono tutti tangenti, e quindi ne consegue:

$$\begin{aligned} E_1(0^-) &= E_2(0^+) \\ H_1(0^-) &= H_2(0^+) \end{aligned} \quad (93)$$

Imponendo le (93) alle soluzioni (90,92) segue

$$\begin{aligned} E_i + E_r &= E_2(0) \\ \frac{1}{\zeta_1} (E_i - E_r) &= \frac{1}{\zeta_2} E_2(0) \end{aligned} \quad (94)$$

Le (94) sono un sistema lineare non omogeneo che consente di determinare le ampiezze incognite  $E_r$  e  $E_2(0)$  Poichè queste ultime devono essere proporzionali a  $E_i$  per la linearità del problema, conviene introdurre il coefficiente di riflessione alla interfaccia

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_i} \quad (95)$$

Dalla prima delle (94) segue allora

$$\frac{E_2(0)}{E_i} = 1 + \Gamma \quad (96)$$

e sostituendo nella seconda delle (94) si ha

$$\frac{1 - \Gamma}{\zeta_1} = \frac{1 + \Gamma}{\zeta_2}$$

da cui segue, risolvendo,

$$\Gamma = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} \quad (97)$$

e anche

$$\frac{E_2(0)}{E_i} = 1 + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} = \frac{2\zeta_2}{\zeta_2 + \zeta_1} \quad (98)$$

La (97) esprime il fatto che il coefficiente di riflessione  $\Gamma$  (o meglio, il suo modulo  $|\Gamma|$ ) è tanto più grande quanto più le impedenze caratteristiche dei due mezzi sono *percentualmente* diverse. La (97) può essere riscritta come

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\left(\frac{\zeta_2 + \zeta_1}{2}\right)}$$

ovvero in funzione del rapporto tra la *differenza* delle impedenze e la loro *media*. Dividere per la media è un modo di *normalizzare* la differenza, ovvero di ottenere la differenza **relativa**.

Il coefficiente di riflessione dipende dalle impedenze in quanto queste sono usate nelle condizioni di continuità (94) per esprimere la componente tangente del campo magnetico in funzione di quella del campo elettrico.

Le relazioni (97,98) possono anche essere espresse in termini dell'inversa  $Y_i$  della impedenza caratteristica, parametro che viene detto *ammettenza caratteristica*. In particolare la (98) diventa

$$\Gamma = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} = - \frac{Y_2 - Y_1}{Y_2 + Y_1} \quad (99)$$

Le relazioni (97,98) sono applicabili anche in altri casi, oltre a quello di discontinuità dei parametri per il quale sono state ricavate. La generalizzazione più immediata si ha quando un semispazio, di costanti  $\mu_1, \epsilon_1$  termina ad  $z = 0$  con una superficie sulla quale vale una *condizione di impedenza* ovvero una relazione del tipo

$$\mathbf{E}_t = Z_C \mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_t \quad (100)$$

Nella (100)  $\underline{E}_t$  e  $\underline{H}_t$  sono i componenti del campo elettrico e del campo magnetico tangenti alla superficie di discontinuità, e  $Z_C$  è un parametro caratteristico della superficie, detta impedenza superficiale. Nel nostro caso campo elettrico e magnetico sono ortogonali tra loro e a  $z$  e quindi la (100) diventa

$$E(0^+) = Z_C H(0^+) \quad (101)$$

In presenza di una onda incidente (87), il campo elettrico e quello magnetico nel semispazio sono date ancora da  $E_1(z)$ ,  $H_1(z)$  di (90,92). Dalla (93) segue allora

$$\begin{aligned} E_i + E_r &= E(0^+) \\ \frac{1}{\zeta_1} (E_i - E_r) &= \frac{1}{Z_C} E(0^+) \end{aligned} \quad (102)$$

che hanno per soluzione ancora le (97,98). Quindi nel semispazio 1 vi sarà una onda riflessa di ampiezza

$$E_r = \Gamma E_i \quad \text{con} \quad \Gamma = \frac{Z_C - \zeta_1}{Z_C + \zeta_1} \quad (103)$$

e in  $z = 0^+$  il campo elettrico sarà

$$E(0^+) = (1 + \Gamma) E_i \quad (104)$$

campo che coincide con quello al termine del semispazio 1 medesimo.

La (100) può essere usata anche per il caso in cui in  $z = 0$  vi è un *C.E.P.* o un *C.M.P.*. Nel primo caso  $\underline{E}_t$  è nullo e quindi  $E(0^+) = 0$ . La (101) può essere usata con  $Z_C = 0$  e segue allora  $\Gamma = -1$ . Se invece vi è un *C.M.P.*, allora sarà nullo  $\underline{H}_t$  nonchè  $H(0^+)$ . Nella (101) il parametro  $Z_C$  dovrà andare all'infinito. Conviene in tal caso passare alle ammettenze, definendo  $Y_C = 1/Z_C$  e usando la (99).  $H(0^+) = 0$  implica  $Y_C = 0$  e segue allora da (99) che  $\Gamma = 1$ .

La situazione descritta dalla (100), e che conduce alla espressione (103) per  $\Gamma$ , può essere schematizzata come in Fig. 2a. Analogamente in Fig. 2b è schematizzato il caso di Fig. 1.

Gli schemi equivalenti al *C.E.P.* e al *C.M.P.* sono invece riportati in Fig. 3.

Vedremo più avanti che questi schemi equivalenti possono essere usati in situazioni più complesse di quelle trattate in quaasto paragrafo.

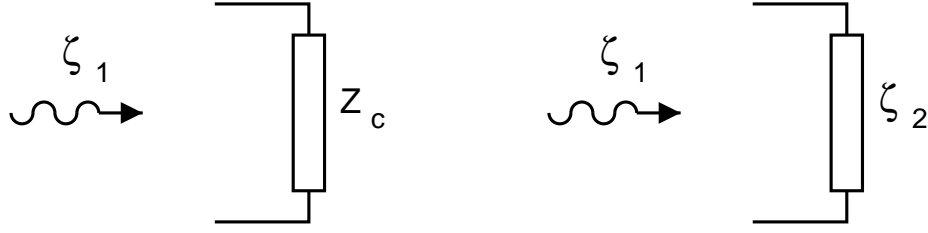


Fig. 2: (a): Schema equivalente per il calcolo di  $\Gamma$  per la situazione descritta dalla (100).  
(b): Schema equivalente della discontinuità di Fig. 1.



Fig. 3: Schemi equivalenti a un C.E.P. e a un C.M.P. per il calcolo di  $\Gamma$

## 15 FORMA GENERALE DELLE ONDE PIANE

Quando abbiamo ricavato le equazioni delle onde piane, abbiamo scelto il sistema di riferimento in direzione  $z$ , e questo ha condotto, per una onda che si propaga in direzione  $z$ , alle seguenti espressioni per i campi (nel caso sinusoidale e nel  $DF$ )

$$\begin{aligned}
 E_x(\mathbf{r}) &= E_x^+ \exp(-jkz) \\
 H_y(\mathbf{r}) &= \frac{k}{\omega\mu} E_x^+ \exp(-jkz) = \frac{1}{\zeta} E_x^+ \exp(-jkz) \\
 E_y(\mathbf{r}) &= E_y^+ \exp(-jkz) \\
 -H_x(\mathbf{r}) &= \frac{\omega\varepsilon}{k} E_y^+ \exp(-jkz) = \frac{1}{\zeta} E_y^+ \exp(-jkz) \\
 E_z(\mathbf{r}) &= 0 \\
 H_z(\mathbf{r}) &= 0
 \end{aligned} \tag{105}$$

Si è evidenziato che i campi dipendono da  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , anche se, nelle espressioni precedenti, i campi risultano essere **costanti** rispetto a  $x$  ed  $y$ .

Dalle espressioni precedenti segue anche che i vettori  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  sono ortogonali tra loro, e ortogonali alla direzione di propagazione.

Ovviamente, in uno spazio omogeneo sono possibili onde piane in tutte le direzioni <sup>2</sup> Per determinare la forma dei campi in tali condizioni, conviene trasformare le (105) in forma vettoriale. Ricordiamo infatti che una espressione vettoriale vale indipendentemente dal sistema di riferimento, e quindi può essere specializzata nel sistema di riferimento che, nel caso in esame, risulta più utile.

La prima cosa da modificare nelle (105) è la dipendenza spaziale dei campi, che non deve contenere le coordinate  $(x, y, z)$  del punto in cui si vuole il campo, ma solo il vettore posizione  $\mathbf{r}$  <sup>1</sup> Ciò si ottiene notando che  $z = \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{r}$ , per cui

$$\exp(-jkz) \longrightarrow \exp(-j k \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{r})$$

Posiamo poi introdurre un *vettore di propagazione*  $\mathbf{k} = k \mathbf{i}_z$ , che ha la direzione della propagazione, in modo che

$$\exp(-jkz) \longrightarrow \exp(-j k \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{r}) = \exp(-j \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

che completa la descrizione vettoriale della dipendenza spaziale. Se siamo interessati ad una onda piana che viaggia in una direzione generica, basterà prendere un vettore di propagazione con la direzione e il verso di propagazione, mentre la sua ampiezza sarà sempre data dalla relazione

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (k \mathbf{i}_z) \cdot (k \mathbf{i}_z) = k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \quad (106)$$

dove l'ultima relazione segue dalla (38).

Occorre poi trasformare in termini vettoriali le relazioni tra i campi. Le ultime due delle (105) diventano semplicemente

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (107)$$

mentre per le altre componenti dei campi occorre partire dal fatto che  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , e la direzione di propagazione, ovvero  $\mathbf{k}$ , formano una terna di vettori ortogonali tra loro e *levogira*, per cui  $\mathbf{H}$  deve essere proporzionale ad  $\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ .

Dalla seconda delle (105) segue allora

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega \mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (108)$$

che può essere risolta per  $\mathbf{E}$ , usando le (106,107), ottenendo

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\omega \varepsilon} \mathbf{H} \times \mathbf{k}$$

Ricapitolando, onde piane in una direzione generica si ottengono prendendo un vettore  $\mathbf{k}$  in quella direzione, che soddisfi la (106), e usando come campi

---

<sup>2</sup> Se lo spazio non é omogeneo, non sono possibili campi costanti su piani. Ci troveremmo infatti ad avere, nelle equazioni di Maxwell, campi costanti e induzioni variabili.

<sup>1</sup> Ovviamente il vettore  $\mathbf{r}$  ha per componenti le coordinate  $(x, y, z)$  del punto che rappresenta. Quello che si richiede é che l'espressione del campo non contenga esplicitamente le coordinate  $(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_0 \exp(-j \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\omega \mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \exp(-j \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\end{aligned}\tag{109}$$

dove  $\mathbf{E}_0$  è un vettore qualunque, ma col vincolo  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ .

I campi dati dalle (109), con le relative precisazioni, sono ovviamente soluzione delle equazioni di Maxwell (\*), in assenza di sorgenti, e per materiali spazialmente omogenei. E questo avviene qualunque sia il vettore  $\mathbf{k}$ , reale o complesso, purchè soddisfi la (106).

Tutte queste soluzioni prendono ancora il nome di onde piane. Tuttavia il loro comportamento fisico, e anche alcune proprietà matematiche, dipendono dal vettore  $\mathbf{k}$ . Distinguiamo quindi tra

- Onde piane **proprie** o **omogenee** quando il vettore  $\mathbf{k}$  ha una direzione reale, ovvero può essere scritto nella forma  $\mathbf{k} = k \mathbf{i}_k$ , essendo  $\mathbf{i}_k$  un versore **reale**, e ovviamente  $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$  reale o complesso (ma non immaginario puro);
- Onde piane in *cut-off* se  $\text{Re}[\mathbf{k}] = 0$ . In tal caso il campo non si propaga, ma semplicemente si attenua in direzione ortogonale a  $\mathbf{k}$ , che risulta essere immaginario puro.
- Onde piane **improprie** o **inomogenee** o **evanescenti** in tutti gli altri casi.

Se separiamo il vettore complesso  $\mathbf{k}$  in parte reale e parte immaginaria

$$\mathbf{k} = \boldsymbol{\beta} - j \boldsymbol{\alpha}\tag{110}$$

si trova che l'onda è omogenea se  $\boldsymbol{\beta}$  e  $\boldsymbol{\alpha}$  sono paralleli oppure  $\boldsymbol{\alpha} = 0$ . In tutti gli altri casi l'onda è inomogenea.

Per le proprietà del prodotto scalare, la (106) diventa

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (\boldsymbol{\beta} - j \boldsymbol{\alpha}) \cdot (\boldsymbol{\beta} - j \boldsymbol{\alpha}) = |\boldsymbol{\beta}|^2 - |\boldsymbol{\alpha}|^2 - 2j \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \omega^2 \varepsilon \mu$$

Possiamo riscrivere la relazione precedente, separando parte reale e immaginaria, nella forma

$$|\boldsymbol{\beta}|^2 - |\boldsymbol{\alpha}|^2 = \omega^2 \text{Re}[\varepsilon \mu]\tag{111}$$

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{2} \omega^2 \text{Im}[\varepsilon \mu]\tag{112}$$

Se il mezzo è privo di perdite,  $\varepsilon$  e  $\mu$  reali e positivi, allora il secondo membro della (112) è nullo, e segue che, se i vettori  $\boldsymbol{\beta}$  e  $\boldsymbol{\alpha}$  sono entrambi diversi da zero, allora devono essere ortogonali. Questo implica che

$$\begin{aligned}\text{Onda omogenea} &\longrightarrow \boldsymbol{\alpha} = 0 \\ \text{Onda inomogenea} &\longrightarrow \boldsymbol{\beta} \text{ e } \boldsymbol{\alpha} \text{ ortogonali}\end{aligned}$$

Invece, avere  $\boldsymbol{\beta} = \text{Re}[\mathbf{k}] = 0$  richiede, in base alle (111,112), che il prodotto  $\varepsilon \mu$  sia reale ma **negativo**.

Concludiamo notando che dalla (108)

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega \mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

segue, passando ai moduli,

$$|\mathbf{H}(\mathbf{r})| = \frac{1}{\omega|\mu|} |\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})| = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega|\mu|} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|$$

in quanto la (107) implica che  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{E}$  sono ortogonali.

Per una onda omogenea

$$|\mathbf{k}| = \omega\sqrt{|\varepsilon\mu|} \implies \frac{|\mathbf{k}|}{\omega|\mu|} = \frac{\omega\sqrt{|\varepsilon\mu|}}{\omega|\mu|} = \left| \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \right| = \frac{1}{|\zeta|}$$

ovvero il rapporto tra il modulo di  $\mathbf{E}$  e quello di  $\mathbf{H}$  è pari a  $|\zeta|$ .

Per una onda inhomogena, invece, i risultati sono diversi. Infatti

$$|\mathbf{k}|^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}^* = |k_x|^2 + |k_y|^2 + |k_z|^2 \neq \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

in quanto almeno una delle componenti di  $\mathbf{k}$  è complessa. Pertanto  $|\mathbf{k}| \neq \omega\sqrt{|\varepsilon\mu|}$  e il rapporto tra il modulo di  $\mathbf{E}$  e quello di  $\mathbf{H}$  è **diverso** da  $|\zeta|$ .

## 16 VETTORE DI POYNTING DI UNA ONDA PIANA

La forma generale di una onda piana che si propaga nella direzione del vettore  $\mathbf{k}$  è data dalle (109)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

con  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ . L'espressione (109) vale anche per onde piane inhomogenee, con  $\mathbf{k}$  dato dalla (110).

A partire dalla (18), possiamo calcolare il vettore di Poynting per una onda piana

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2\omega\mu} \mathbf{E}_0 \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0]^* \left| e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right|^2 = \frac{\left| e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right|^2}{2\omega\mu} [|\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{k}^* - (\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{E}_0^*] \quad (113)$$

Se l'onda è omogenea,  $\mathbf{k}$  è un vettore reale o proporzionale ad un vettore reale, ovvero può essere espresso come

$$\mathbf{k} = \hat{k} \mathbf{i}_k$$

con  $\mathbf{i}_k$  versore reale, e  $\hat{k} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ , eventualmente complesso  $\hat{k} = \hat{\beta} - j\hat{\alpha}$ , allora

$$\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{E}_0 = \hat{k}^* \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{\hat{k}^*}{\hat{k}} \hat{k} \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{\hat{k}^*}{\hat{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$$

e quindi

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\omega\mu} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{k}^* e^{-2\hat{\alpha}\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{2\omega\mu} |\mathbf{E}_0|^2 \frac{\hat{k}^*}{\hat{k}} \mathbf{k} e^{-2\hat{\alpha}\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{r}} = \frac{\hat{k}^*}{2\omega\mu} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{i}_k e^{-2\hat{\alpha}\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{r}} \quad (114)$$

Ricordando che  $\zeta = \omega\mu/\hat{k}$  segue infine

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{\zeta^*} \mathbf{i}_k e^{-2\hat{\alpha}\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{r}} \quad (115)$$

ovvero  $\mathbf{S}$  è orientato nella direzione di propagazione. In assenza di perdite,  $\zeta^*$  è reale, e di conseguenza anche  $\mathbf{S}$  è reale:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{\zeta} \mathbf{i}_k \quad (116)$$

Se  $\beta = 0$ , ovvero se  $\mathbf{k} = -j\alpha$ , allora ancora  $\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{E}_0 = 0$  e dalla (113) segue

$$\mathbf{S} = j \frac{1}{2\omega\mu} |\mathbf{E}_0|^2 \alpha e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}}$$

Il vettore di Poynting è quindi immaginario puro, con la direzione di  $\alpha$ , ovvero di  $\mathbf{k}$ . Pertanto una tale onda non trasporta potenza attiva, ma solo reattiva, nella direzione di attenuazione.

Consideriamo infine il caso di una onda evanescente, ma, per semplicità, limitatamente al caso di assenza di perdite. In tal caso  $\beta$  e  $\alpha$  sono ortogonali, e possiamo scegliere il riferimento in modo che  $\beta$  sia orientato lungo l'asse  $x$  e  $\alpha$  lungo quello  $z$ . Si ha allora

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{i}_x - j|k_z| \mathbf{i}_z \quad (117)$$

Risulta, in tal caso,  $\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{E}_0 \neq 0$ , a meno che il campo non abbia la sola componente  $y$ . Se quindi  $\mathbf{E} = E_{0y} \mathbf{i}_y$ , segue

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\omega\mu} |E_{0y}|^2 \mathbf{k}^* e^{-2|k_z|z} = \frac{1}{2\omega\mu} |E_{0y}|^2 [k_x \mathbf{i}_x + j|k_z| \mathbf{i}_z] e^{-2|k_z|z} \quad (118)$$

Pertanto la componente  $x$  del vettore di Poynting è reale, mentre quella  $z$  risulta immaginaria pura.

Questa ultima considerazione (ma, ovviamente, non la equazione (118)), vale anche nel caso generale. Pertanto, per una onda evanescente in un mezzo privo di perdite, col riferimento scelto in modo che  $\mathbf{k}$  sia dato dalla (117), si ha flusso di potenza reale solo in direzione  $x$  (ovvero in direzione di  $\beta$ ), e di potenza reattiva solo in direzione  $z$  (ovvero in direzione di  $\alpha$ ).

## 17 LEGGE DI SNELL

In un paragrafo precedente, abbiamo studiato l'incidenza ortogonale di una onda piana su di una interfaccia dielettrica. Consideriamo ora il caso (Fig. 1) in cui l'onda incida obliquamente, con un angolo  $\theta_i$  rispetto alla normale all'interfaccia. Si produrranno ancora onde piane riflesse e trasmesse, ma la loro direzione va determinata <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Nel caso di incidenza ortogonale, anche le onde piane riflesse e trasmesse hanno direzione ortogonale all'interfaccia per motivi di *simmetria*



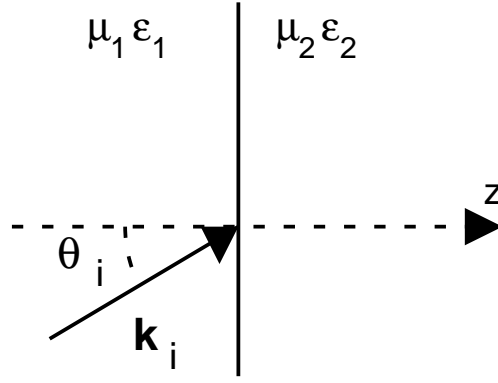


Fig.1: Geometria del campo incidente

I campi elettrici coinvolti sono:

- una onda piana incidente *omogenea*, di ampiezza  $\mathbf{E}_{i0}$  nota, con vettore di propagazione noto  $\mathbf{k}_i$ :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_{i0} \exp(-j \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$$

- una onda piana riflessa, di ampiezza  $\mathbf{E}_{r0}$  e vettore di propagazione  $\mathbf{k}_r$  da determinare:

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_{r0} \exp(-j \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})$$

- una onda piana trasmessa, di ampiezza  $\mathbf{E}_{t0}$  e vettore di propagazione  $\mathbf{k}_t$  da determinare:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_{t0} \exp(-j \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})$$

Naturalmente, per le proprietà delle onde piane (106,107), deve valere  $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{E}_{i0} = 0$ ,  $\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{E}_{r0} = 0$ ,  $\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{E}_{t0} = 0$  e soprattutto

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_i = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{k}_r = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 \quad \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{k}_t = \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 \quad (119)$$

Per ricavare i vettori incogniti  $\mathbf{k}_r$  e  $\mathbf{k}_t$  imporreemo la continuità del campo elettrico totale alla interfaccia.

Scegliamo un sistema di riferimento con l'asse  $z$  ortogonale all'interfaccia, e con l'origine sulla interfaccia stessa, in modo che quest'ultima sia il piano  $z = 0$ . Scegliamo poi l'asse  $x$  in modo che il vettore (noto)  $\mathbf{k}_i$  sia nel piano  $(x, z)$ :

$$\mathbf{k}_i = (k_{ix}, 0, k_{iz}) = (k_1 \sin \theta_i, 0, k_1 \cos \theta_i)$$

essendo  $k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ .

Cominciamo a scrivere la continuità della componente tangente del campo elettrico all'interfaccia. Poichè la normale all'interfaccia coincide con  $\mathbf{i}_z$ , la (21) fornisce

$$\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{i0} \exp(-j \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_T) + \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{r0} \exp(-j \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_T) = \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{t0} \exp(-j \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_T) \quad \forall x, y$$

essendo  $\mathbf{r}_T = (x, y, 0)$  il valore di  $\mathbf{r}$  in un punto generico dell'interfaccia. La moltiplicazione vettoriale per  $\mathbf{i}_z$  serve a prendere solo la componente del campo tangente al piano di interfaccia.

Sviluppando i prodotti scalari, e portando tutto a primo membro, segue

$$\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{i0} \exp[-j(k_{ix}x)] + \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{r0} \exp[-j(k_{rx}x + k_{ry}y)] - \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{t0} \exp[-j(k_{tx}x + k_{ty}y)] = 0 \quad (120)$$

sempre da imporre  $\forall x, y$ .

La (120) impone che una combinazione lineare di funzioni esponenziali, in cui il primo coefficiente è diverso da zero, sia identicamente nulla. Ora, le funzioni esponenziali sono *linearmente indipendenti*, ovvero una combinazione lineare (tipo la (120)) di funzioni esponenziali **diverse** può essere identicamente nulla solo se tutti i coefficienti sono nulli. Pertanto, l'unico modo in cui la (120) possa essere valida è che le funzioni esponenziali, ovvero i loro esponenti, siano identiche. Pertanto

$$\begin{aligned} \exp[-j(k_{ix}x)] &= \exp[-j(k_{rx}x + k_{ry}y)] = \exp[-j(k_{tx}x + k_{ty}y)] = 0 & \forall x, y \\ k_{ix}x &= k_{rx}x + k_{ry}y = k_{tx}x + k_{ty}y & \forall x, y \end{aligned} \quad (121)$$

Scegliendo nella (121)  $x = 0, y \neq 0$ , oppure  $x \neq 0, y = 0$ , segue la forma generale della **Legge di Snell**

$$\begin{aligned} k_{ix} &= k_{rx} = k_{tx} \\ 0 &= k_{ry} = k_{ty} \end{aligned} \quad (122)$$

Conseguenza immediata della (122) è che i tre vettori di propagazione giacciono tutti nello stesso piano  $(x, z)$ , che viene detto *piano di incidenza*.

A partire dalle (122) e (119), è possibile ricavare poi anche le componenti  $z$  dei vettori di propagazione

$$\begin{aligned} k_{rz}^2 &= k_1^2 - [k_{rx}^2 + k_{ry}^2] = k_1^2 - k_{ix}^2 = k_{iz}^2 \\ k_{tz}^2 &= k_t^2 - [k_{tx}^2 + k_{ty}^2] = k_2^2 - k_{ix}^2 \end{aligned} \quad (123)$$

essendo (analogamente a  $k_1$ )  $k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ .

Per quanto riguarda l'onda riflessa, questa si allontana dall'interfaccia (mentre quella incidente si avvicina), e quindi la prima delle (123) implica che  $k_{rz} = -k_{iz}$ .

Pertanto anche l'onda riflessa è omogenea, e forma un angolo di riflessione  $\theta_r$  con la normale pari a  $\theta_i$ .

Diverso, e più variegato, è il discorso relativo all'onda trasmessa. Supponiamo per semplicità che il mezzo 1 sia privo di perdite, in modo che  $\varepsilon_1, \mu_1$  e di conseguenza  $\mathbf{k}_i$  siano tutti reali.

Sviluppando l'espressione di  $k_{tz}^2$  segue

$$k_{tz}^2 = k_2^2 - k_{ix}^2 = k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_i = \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 - \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_i \quad (124)$$

Se anche il secondo mezzo è privo di perdite, il secondo membro di (124) è reale, ma il suo segno dipende dalle costanti del materiale, e dall'angolo di incidenza.

- Se  $\varepsilon_2 \mu_2 \geq \varepsilon_1 \mu_1$ , il secondo membro della (124) è sempre positivo, quindi  $k_{tz}$  è reale (positivo, in quanto l'onda si allontana dall'interfaccia). Ne segue che anche l'onda trasmessa è **omogenea** e si può definire un angolo di trasmissione  $\theta_t$ , angolo tra il vettore reale  $\mathbf{k}_t$  e l'asse  $z$ . Risulta allora

$$k_{tx} = k_2 \sin \theta_t \implies \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta_i = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin \theta_t \quad (125)$$

(forma della legge di Snell vista nei corsi di fisica), e  $\theta_t < \theta_i$ .

- Se  $\varepsilon_2\mu_2 < \varepsilon_1\mu_1$ , il segno del secondo membro della (124), e quindi quello di  $k_{tz}^2$  dipende dall'angolo di incidenza.

a) se  $\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \sin \theta_i < \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$  allora  $k_{tz}^2 > 0$ ;

b) se  $\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \sin \theta_i > \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$  allora  $k_{tz}^2 < 0$ .

Nel caso a)  $k_{tz}$  è reale positivo, l'onda trasmessa è ancora **omogenea** e si può definire l'angolo di trasmissione  $\theta_t$ , che si calcola dalla (125). Ora però risulta  $\theta_t > \theta_i$ .

Nel caso b), invece,  $k_{tz}$  è immaginario puro, e conviene scriverlo come  $k_{tz} = -j|k_{tz}|$ . L'onda trasmessa è allora **inomogenea**, e non esiste un angolo (reale) di trasmissione.

Ricapitolando, in assenza di perdite si ha una onda trasmessa omogenea, a meno che  $\varepsilon_2\mu_2 < \varepsilon_1\mu_1$  e l'angolo di incidenza non sia superiore al cosiddetto *angolo limite*  $\theta_L$ , definito come l'angolo che separa i casi a) e b), pari a

$$\sin \theta_L = \frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} \quad (126)$$

Il secondo membro della (126) prende il nome di indice di rifrazione relativo del secondo mezzo rispetto al primo, e viene spesso indicato con  $n$ .

Si noti che il vettore di propagazione dell'onda inomogenea prodotta a seguito di incidenza oltre l'angolo limite ha la forma (117). Ne segue che, nella onda prodotta per incidenza oltre l'angolo limite, non si ha passaggio di potenza attiva oltre l'interfaccia, ma solo di potenza reattiva. Questo spiega la attenuazione (senza propagazione) del campo oltre l'interfaccia. Si ha invece una propagazione di potenza attiva in direzione  $x$ , ovvero lungo l'interfaccia (onda *superficiale*).

## 18 FORMULE DI FRESNEL – ANGOLO DI BREWSTER

La legge di Snell consente di determinare la forma delle onde riflessa e trasmessa ad una interfaccia piana, in caso di incidenza obliqua, ma non la relativa ampiezza. Come visto nel caso di incidenza ortogonale, per determinare il coefficiente di riflessione, e quindi tali ampiezze, occorre anche imporre la continuità della componente tangente del campo magnetico.

Poichè gli esponenziali, per la legge di Snell, sono uguali, le due continuità forniscono delle equazioni sulle ampiezze dei campi. Ricordiamo che i campi coinvolti sono:

- una onda piana incidente *omogenea*, di ampiezza  $\mathbf{E}_{i0}$  nota, e vettore di propagazione  $\mathbf{k}_i$  noto:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_{i0} \exp(-j \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$$

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{R}) = \frac{1}{\omega\mu_1} \mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_{i0} \exp(-j \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$$

- una onda piana riflessa, di ampiezza  $\mathbf{E}_{r0}$ , da determinare, e vettore di propagazione  $\mathbf{k}_r$  noto:

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_{r0} \exp(-j \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})$$

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{R}) = \frac{1}{\omega\mu_1} \mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_{r0} \exp(-j \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})$$

- una onda piana trasmessa, di ampiezza  $\mathbf{E}_{t0}$ , da determinare, e vettore di propagazione  $\mathbf{k}_t$  noto:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_{t0} \exp(-j \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})$$

$$\mathbf{H}_t(\mathbf{R}) = \frac{1}{\omega \mu_2} \mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_{t0} \exp(-j \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})$$

Imponendo la continuità delle componenti tangenti all'interfaccia si ottiene (vedi (120) per il campo elettrico, con gli esponenziali che si semplificano essendo uguali, e analogamente per il campo magnetico da (22) )

$$\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{i0} + \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{r0} - \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{t0} = 0$$

$$\frac{1}{\omega \mu_1} \mathbf{i}_z \times [\mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_{i0}] + \frac{1}{\omega \mu_1} \mathbf{i}_z \times [\mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_{r0}] - \frac{1}{\omega \mu_1} \mathbf{i}_z \times [\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_{t0}] = 0 \quad (127)$$

A questo punto occorre tener conto che, al contrario del caso di incidenza ortogonale, l'orientazione del campo elettrico incidente gioca un ruolo fondamentale. Se consideriamo la Fig. 1, si vede che un campo elettrico  $\mathbf{E}_s$  ortogonale al piano di incidenza ( $x, z$ ), detto campo in orientazione  $s$  (oppure campo  $TE$ ), e un campo elettrico  $\mathbf{E}_p$  parallelo al piano di incidenza, detto campo in orientazione  $p$  (oppure campo  $TM$ ), sono fisicamente diversi, e quindi produrranno coefficienti di riflessione  $\Gamma$  differenti.

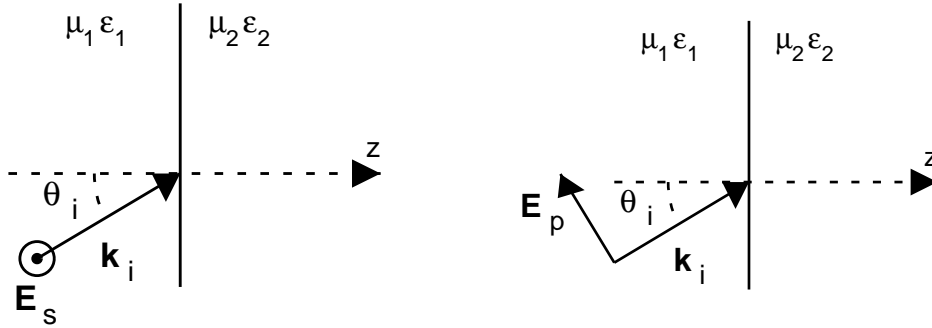


Fig.1: Orientazioni ortogonale  $s$  e parallela  $p$  di  $\mathbf{E}$

Poichè un campo generico è sempre ortogonale al suo vettore di propagazione, può essere sempre decomposto in un campo orientato come  $\mathbf{E}_s$  e uno orientato come  $\mathbf{E}_p$ . Introducendo i versori  $\mathbf{i}_s$  ed  $\mathbf{i}_p$  si ha, per un campo  $\mathbf{E}$  generico

$$\mathbf{E} = E_s \mathbf{i}_s + E_p \mathbf{i}_p$$

dove le ampiezze  $E_s$  ed  $E_p$  sono ovviamente complesse.

Poichè, per simmetria, un campo incidente in orientazione  $s$  produce campi riflesso e trasmesso nella stessa orientazione, e lo stesso vale per l'orientazione  $p$ , questa scelta consente di semplificare il problema del calcolo di  $\Gamma$ .

In Fig. 2 sono riportati le distribuzioni dei campi da considerare per le due orientazioni  $s$  e  $p$ .

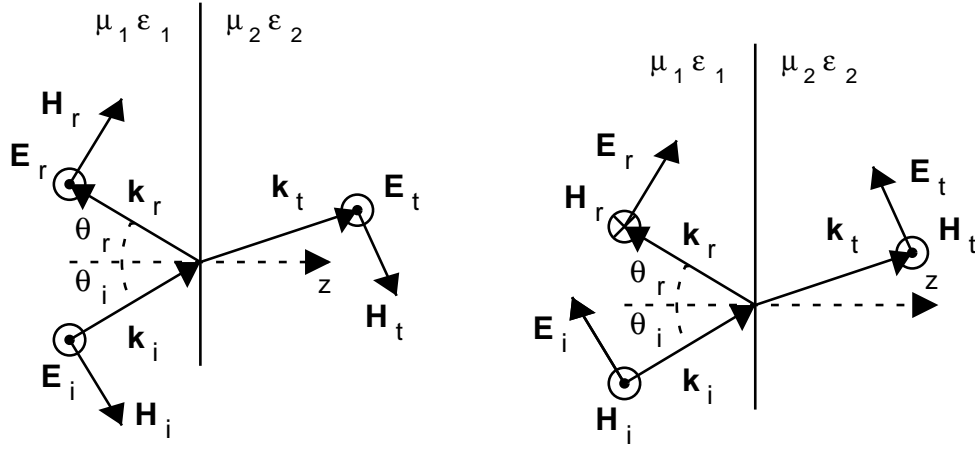


Fig.2: Componenti dei campi da considerare nelle orientazioni *s* e *p*  
(Si suppone l'onda trasmessa omogenea).

Il calcolo di  $\Gamma$  procede sostanzialmente come nel caso di incidenza ortogonale. Il coefficiente di riflessione nel caso ortogonale è legato alle impedenze caratteristiche del mezzo, che non sono altro che il rapporto tra le componenti tangenti del campo elettrico e magnetico.

Nel nostro caso queste impedenze sono diverse da  $\zeta_1$  e da  $\zeta_2$  rispettivamente, e sono diverse per le due orientazioni. In particolare, nel mezzo 1,

$$\begin{aligned} Z_{1s} &= \frac{E_s}{H_s \cos \theta_1} = \frac{\zeta_1}{\cos \theta_1} \\ Z_{1p} &= \frac{E_p \cos \theta_1}{H_s} = \zeta_1 \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (128)$$

Nel mezzo 2 occorre distinguere il caso in cui l'onda trasmessa sia omogenea, da quello in cui non lo è. Nel primo caso esiste un angolo di trasmissione, e le impedenze sono date dalle (128), ovviamente usando  $\zeta_2$  e  $\cos \theta_t$ . Se invece l'onda trasmessa è inhomogenea, la (128) non è più utilizzabile. Tuttavia è possibile ottenere da essa una relazione generale.

Se l'onda è omogenea, allora

$$\cos \theta_2 = \frac{k_{z2}}{k_2} = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_{x2}^2}}{k_2} = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_{x1}^2}}{k_2}$$

dove  $k_{x2} = k_{x1}$  per la legge di Snell. Ricordando che  $k_{x1} = k_1 \sin \theta_1$  si ha

$$\begin{aligned} Z_{2s} &= \frac{\zeta_2 k_2}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}} = \frac{\zeta_2 n}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} \\ Z_{2p} &= \frac{Z_2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}}{k_2} = \frac{\zeta_2}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} \end{aligned} \quad (129)$$

essendo  $n$ , definito da

$$n^2 = \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}$$

l'indice di rifrazione (del secondo mezzo rispetto al primo). Le (129) contengono solo i parametri dei mezzi, e le caratteristiche del campo incidente. Pertanto sono indipendenti dalla natura dell'onda trasmessa, e quindi valgono in generale.

Occorre solo ricordare che, se  $n^2 - \sin^2 \theta_1$  **non** è reale positivo (mezzi con perdite, oppure onda trasmessa inhomogenea), allora la sua radice quadrata  $\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}$  deve avere parte reale non negativa e parte immaginaria non positiva. In particolare, nel caso di onda inhomogenea in un mezzo privo di perdite, tale radice è immaginaria pura, e così sono le due impedenze. Poiché  $\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}$  è immaginaria negativa, allora  $Z_p$  è immaginaria negativa:  $Z_p = -j |Z_p|$ , mentre  $Z_s$  è immaginaria positiva:  $Z_s = j |Z_s|$ .

Gli schemi del paragrafo sulle discontinuità possono ancora essere utilizzati per ottenere il coefficiente di riflessione.

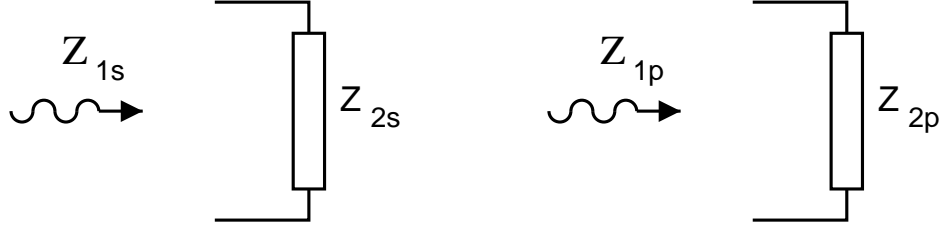


Fig. 3: Schemi equivalenti per il calcolo di  $\Gamma$  per le due orientazioni  $s$  e  $p$

Nel caso in esame essi sono quelli di Fig. 3, e utilizzandoli, si ottengono i coefficienti di riflessione

$$\Gamma_s = \frac{Z_{2s} - Z_{1s}}{Z_{2s} + Z_{1s}} \quad \Gamma_p = \frac{Z_{2p} - Z_{1p}}{Z_{2p} + Z_{1p}} \quad (130)$$

Le (130) sono dette formule di *Fresnel*.

Conseguenza delle formule di Fresnel è che, se i mezzi sono entrambi senza perdite, esiste un'angolo di incidenza, detto angolo di Brewster, per cui uno dei due coefficienti di riflessione (130) è nullo.

Se le permeabilità magnetiche sono uguali  $\mu_1 = \mu_2$ , ad annullarsi è  $\Gamma_p$ .

Per determinare, in tali condizioni, l'angolo di Brewster, basta imporre, dalle (130), che

$$Z_{2p} = Z_{1p} \quad \implies \quad \frac{\zeta_2}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} = \zeta_1 \cos \theta_1 \quad (131)$$

L'ipotesi  $\mu_1 = \mu_2$  consente di ottenere  $\varepsilon_2 = n^2 \varepsilon_1$  e quindi

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{n^2 \varepsilon_1}} = \frac{1}{n} \zeta_1$$

Sostituendo nella (131) ed elevando al quadrato segue

$$\left( \frac{\zeta_1}{n^2} \right)^2 (n^2 - \sin^2 \theta_1) = \zeta_1^2 \cos^2 \theta_1$$

Dividiamo per  $\zeta_1^2 \cos^2 \theta_1$ , e ricordiamo che  $[\cos^2 \theta_1]^{-1} = 1 + \tan^2 \theta_1$ , ottenendo

$$\frac{1}{n^4} [n^2(1 + \tan^2 \theta_1) - \tan^2 \theta_1] = 1$$

che può essere risolta per  $\tan^2 \theta_1$ ,

$$(n^2 - 1) \tan^2 \theta_1 = n^4 - n^2 = n^2 (n^2 - 1)$$

da cui, semplificando, segue il valore dell'angolo di Brewster  $\theta_B$ :

$$\tan^2 \theta_B = n^2 \quad \Rightarrow \quad \tan \theta_B = n = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad (132)$$

In Fig. 4,5 sono riportati gli andamenti delle formule di Fresnel quando il mezzo 1 è il vuoto, mentre il mezzo 2 ha  $\mu_2 = \mu_0$  e costante dielettrica pari a  $4\varepsilon_0$  e  $\varepsilon_0/4$  rispettivamente.

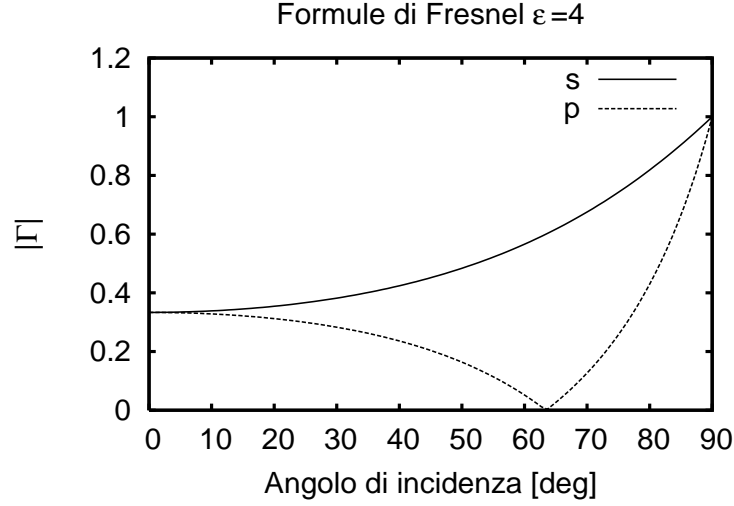


Fig. 4: Andamento di  $|\Gamma|$  per  $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$

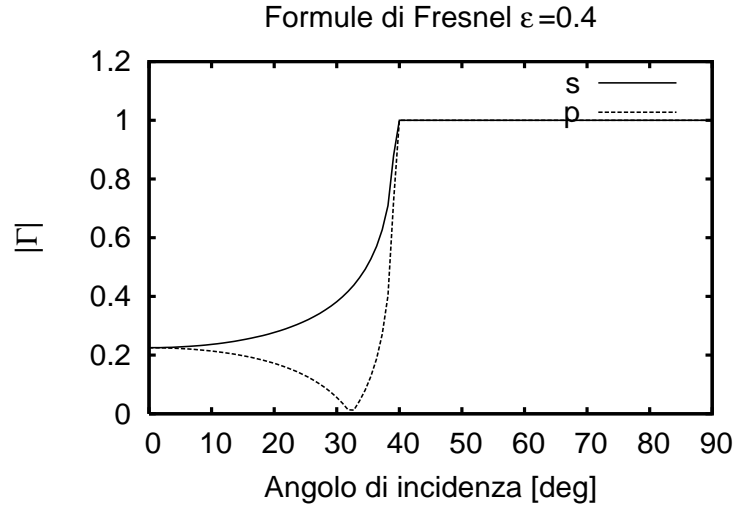


Fig. 5: Andamento di  $|\Gamma|$  per  $\varepsilon_2 = \varepsilon_0/4$

Si nota la presenza del nullo per  $\Gamma_p$  all'angolo di Brewster, sia per  $\varepsilon_2 > \varepsilon_0$ , sia per  $\varepsilon_2 < \varepsilon_0$ . Come segue anche dalla (132), nel primo caso  $\theta_B > \pi/4$ , nel secondo  $\theta_B < \pi/4$ . Ovviamente il modulo di  $\Gamma_p$  è significativamente più piccolo di  $|\Gamma_s|$  in tutto un intervallo intorno a  $\theta_B$ : pertanto in tale intervallo il campo riflesso sarà quasi completamente orientato  $s$ , indipendentemente dalla orientazione del campo incidente (a meno che questa non sia esattamente  $p$ ).

Nella Fig. 5 si nota anche la presenza dell'angolo limite. Oltre l'angolo limite  $\sin \theta_1 > n$ , l'onda trasmessa è inhomogenea, e quindi, dalle (129), entrambe le impedenze  $Z_{2p}$  e  $Z_{2s}$  sono immaginarie pure:  $Z_2 = \pm j|Z_2|$  in cui il segno positivo . Ne segue che (sia per orientazione  $s$ , sia  $p$ )<sup>1</sup>

$$|\Gamma|^2 = \left| \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right|^2 = \left| \frac{\pm j|Z_2| - Z_1}{\pm j|Z_2| + Z_1} \right|^2 = \frac{|Z_2|^2 + Z_1^2}{|Z_2|^2 + Z_1^2} = 1$$

per le proprietà del modulo quadro.

## 19 BUON CONDUTTORE

Un materiale si definisce un buon conduttore se la sua conducibilità  $\sigma$  soddisfa a

$$\sigma \gg \omega \varepsilon \quad (133)$$

Mentre in un materiale con conducibilità infinita il campo deve essere nullo, la presenza di una conducibilità grande ma finita non preclude la presenza di campi. Se il materiale è spazialmente omogeneo, sono quindi possibili onde piane, con costante di propagazione:

$$k^2 = \omega^2 \mu \left[ \epsilon - \frac{j\sigma}{\omega} \right] \quad (134)$$

Utilizzando la (133) possiamo approssimare  $k^2$  con

$$k^2 \simeq \omega^2 \mu \left[ -\frac{j\sigma}{\omega} \right] \quad \Rightarrow \quad k \simeq \omega \sqrt{\mu \frac{\sigma}{\omega}} \sqrt{-j} \quad (135)$$

Poichè

$$\sqrt{-j} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$$

segue

$$k \simeq (1-j) \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \quad (136)$$

Il secondo fattore di  $k$  nella (136) si misura in  $m^{-1}$ . Il suo inverso è quindi una lunghezza e prende il nome di profondità di penetrazione o *skin depth* in inglese) e si indica con

---

<sup>1</sup> Il doppio segno tiene conto del segno di  $Z_2$ , per onda evanescente, si veda la discussione dopo la (129).



$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad \Rightarrow \quad k \simeq \frac{1-j}{\delta} \quad (137)$$

L'impedenza caratteristica corrispondente si ottiene analogamente e vale

$$Z_m \simeq \frac{1+j}{\sigma\delta} \quad (138)$$

L'andamento del campo di una onda progressiva in un buon conduttore è quindi del tipo

$$e(z, t) = E_0 \exp\left[-\frac{z}{\delta}\right] \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)$$

e presenta una attenuazione molto forte: dopo una distanza pari a 6–8 volte la profondità di penetrazione, il campo risulta attenuato di 300–3000 volte, e quindi considerabile scomparso. Il campo presenta anche una oscillazione, ma con una lunghezza d'onda pari alla profondità di penetrazione: non è quindi più facilmente riconoscibile l'andamento sinusoidale.

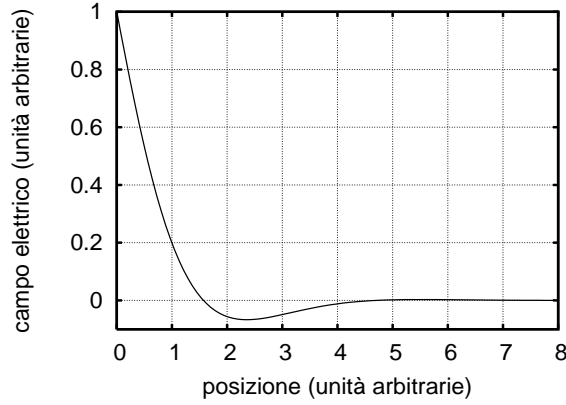


Fig. 1: Andamento del campo elettrico in un buon conduttore

La condizione di buon conduttore dipende, per ogni materiale, dalla frequenza. Se  $\sigma$  è costante con  $\omega$ , un materiale è un buon conduttore solo fino ad una certa frequenza. Sono buoni conduttori i metalli, fino a frequenze ottiche, o dell'ultravioletto, ma anche molti altri materiali, se la frequenza è sufficientemente bassa.

Se consideriamo ad esempio il rame,  $\sigma = 5.8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$  a  $1 \text{ GHz}$ , risulta  $\delta = 2 \mu\text{m}$  e  $Z_m = (1+j) 8 \text{ m}\Omega$ . A “bassa” frequenza anche l'acqua di mare,  $\sigma = 5 \text{ S/m}$ , è un buon conduttore a  $10 \text{ kHz}$ . Per esso risulta  $\delta = 2.2 \text{ m}$  e  $Z_m = (1+j) 100 \text{ m}\Omega$ . Un tale valore di  $\delta$  sembra grande, ma in realtà implica che oltre i 10–15 metri di profondità il campo non riesce ad arrivare, neanche usando frequenze così basse. Questo impedisce, ad esempio, le comunicazioni radio con sottomarini, o altri corpi immersi.

Per valutare da un punto di vista quantitativo la condizione di buon conduttore  $\sigma \gg \omega\epsilon$ , possiamo riscrivere la (134) nella forma

$$k^2 = \omega^2 \mu \left[ \epsilon - \frac{j\sigma}{\omega} \right] = \omega^2 \mu \left[ -\frac{j\sigma}{\omega} \right] \left[ 1 + j \frac{\omega\epsilon}{\sigma} \right] \quad (139)$$

e usando la (135) si trova che  $k$  dato dalla (137) è la radice del prodotto dei primi due termini. Si ha cioè

$$k = \sqrt{\omega^2 \mu \left[ -\frac{j\sigma}{\omega} \right]} \left[ 1 + j \frac{\omega\epsilon}{\sigma} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1-j}{\delta} \left[ 1 + j \frac{\omega\epsilon}{\sigma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (140)$$

Possiamo approssimare l'ultimo termine con il suo sviluppo di Taylor ottenendo

$$k \simeq \frac{1-j}{\delta} \left[ 1 + \frac{j}{2} \frac{\omega\epsilon}{\sigma} \right] = \frac{1}{\delta} \left[ 1 + \frac{\omega\epsilon}{2\sigma} \right] - j \frac{1}{\delta} \left[ 1 - \frac{\omega\epsilon}{2\sigma} \right] \quad (141)$$

L'errore percentuale, tanto sulla parte reale quanto su quella immaginaria di  $k$  è quindi  $\omega\epsilon/2\sigma$ . Se tale errore fosse non accettabile (ma  $\sigma$  è comunque abbastanza grande rispetto a  $\omega\epsilon$ ), allora si può usare la (141), che equivale semplicemente a modificare il valore della profondità di penetrazione.

## 20 INCIDENZA SU DI UN BUON CONDUTTORE

Consideriamo ora l'incidenza di una onda piana su di un buon conduttore. Consideriamo inizialmente il caso di incidenza ortogonale.

All'interno del conduttore è presente una onda piana attenuata, con impedenza caratteristica  $Z_m$  data dalla (138). Il coefficiente di riflessione alla interfaccia è quindi

$$\Gamma = \frac{Z_m - \zeta}{Z_m + \zeta} \quad (142)$$

Poichè  $|Z_m| \ll \zeta$  risulta  $\Gamma \simeq -1$ , ovvero la potenza incidente viene sostanzialmente riflessa tutta. Tuttavia il campo penetra anche all'interno del buon conduttore, e l'ampiezza all'interfaccia del campo trasmesso vale  $E_2 = (1 + \Gamma)E_{inc}$ . Per valutare  $E_2$ , quindi, non è possibile utilizzare l'approssimazione  $\Gamma \simeq -1$ , che conduce a campo trasmesso nullo. Occorre quindi, alternativamente, 0 calcolare  $\Gamma$  con una approssimazione più elevata, oppure calcolare, e approssimare, direttamente,  $1 + \Gamma$ . Risulta

$$1 + \Gamma = 1 + \frac{Z_m - \zeta}{Z_m + \zeta} = \frac{(Z_m + \zeta) + (Z_m - \zeta)}{Z_m + \zeta} = \frac{2Z_m}{Z_m + \zeta} \quad (143)$$

A questo punto possiamo trascurare, a denominatore,  $Z_m$  rispetto a  $\zeta$  ottenendo

$$1 + \Gamma \simeq \frac{2Z_m}{\zeta} = \frac{2(1+j)}{\sigma\delta\zeta} \quad (144)$$

usando la (138) per l'impedenza caratteristica del buon conduttore. Di conseguenza il campo trasmesso all'interfaccia vale

$$E_2 = \frac{2(1+j)}{\sigma\delta\zeta} E_{inc} \quad (145)$$

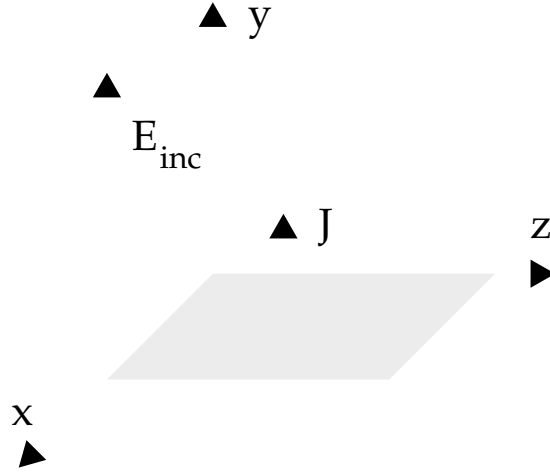


Fig. 2: Geometria per il calcolo della corrente indotta

All'interno del materiale ci sarà anche una corrente elettrica, di densità (vedi figura)  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ . Sostituendo il valore di  $\mathbf{E}$  si trova

$$\mathbf{J} = \sigma E_2 e^{-jk_2 z} \mathbf{i}_y$$

dove  $k_2 = (1 - j)/\delta$  è la costante di propagazione nel buon conduttore.

La corrente corrispondente (in direzione  $y$ ) si ottiene calcolando il flusso di  $\mathbf{J}$ . Poichè il campo è costante con  $x$ , possiamo calcolare la corrente per unità di lunghezza lungo  $x$ , che vale

$$I = \int_0^\infty \mathbf{J} \cdot \mathbf{i}_y dz = \int_0^\infty \sigma E_2 e^{-jk_2 z} dz = \sigma E_2 \int_0^\infty e^{-jk_2 z} dz \quad (146)$$

Integrando si trova

$$\int_0^\infty e^{-jk_2 z} dz = \frac{1}{-jk_2} \left[ e^{-jk_2 z} \Big|_{z=\infty} - 1 \right]$$

e poichè l'integrale è nullo, segue (sostituendo)

$$I = \sigma E_2 \frac{1}{jk_2} = \sigma \frac{2(1+j)}{\sigma \delta \zeta} E_{inc} \frac{\delta}{j(1-j)}$$

Semplificando, e ricordando che  $j(1-j) = 1+j$  segue

$$I = \frac{2E_{inc}}{\zeta} \quad (147)$$

indipendentemente dal valore di  $\sigma$ , purchè grande. Se passiamo al limite per  $\sigma \rightarrow \infty$  troviamo che la corrente si concentra tutta all'interfaccia, diventando quindi una corrente superficiale, ma il suo valore è comunque dato dalla (147). Si vede che la corrente  $I$  data dalla (147) coincide col doppio del campo magnetico incidente, ovvero col campo magnetico totale alla sinistra della interfaccia. La discontinuità di  $\mathbf{H}$  è quindi sostenuta dalla corretta corrente superficiale.

## 21 INCIDENZA OBLIQUA – CONDIZIONE DI LEONTOVICH

Passiamo ora a considerare il caso di incidenza obliqua.

La prima cosa da vedere è la direzione della onda piana nel conduttore, data dalla legge di Snell. Se  $\theta$  è l'angolo di incidenza, il valore di  $k_x$  in entrambi i mezzi risulta pari a  $k_x = k_1 \cos \theta$ , essendo  $k_1$  la costante di propagazione nel primo mezzo.

Nel secondo mezzo si ha quindi

$$k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_x^2} = \sqrt{\left(\frac{1-j}{\delta}\right)^2 - k_1^2 \cos^2 \theta} \quad (148)$$

Risulta

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \ll \frac{1}{\delta}$$

e quindi

$$k_{z2} \simeq \sqrt{\left(\frac{1-j}{\delta}\right)^2} = k_2 \quad \Rightarrow \quad |k_{z2}| \gg |k_{x2}| \quad (149)$$

Pertanto la propagazione nel buon conduttore avviene in direzione  $z$  indipendentemente da  $\theta$ . Tutto quanto visto nel paragrafo precedente continua quindi a valere, a patto di sostituire l'impedenza  $\zeta$ , con l'impedenza d'onda relativa all'angolo di incidenza e orientazione del campo incidente.

Di conseguenza, immediatamente a destra della interfaccia, ci sarà sempre una onda piana in direzione  $z$ , per la quale vale

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu} (k_2 \mathbf{i}_n) \times \mathbf{E} \quad (150)$$

essendo  $\mathbf{i}_n$  il versore normale alla superficie che punta in direzione del buon conduttore. I campi nella (150) sono tutti trasversi, e quindi continui attraverso l'interfaccia. Pertanto tra i campi **trasversi** a sinistra della interfaccia vale la condizione di *Leontovich*

$$\mathbf{H}_t = \frac{1}{Z_m} \mathbf{i}_n \times \mathbf{E} \quad (151)$$

essendo

$$Z_m = \frac{k_2}{\omega\mu} = \frac{(1+j)}{\sigma\delta}$$

l'impedenza caratteristica del buon conduttore.

La condizione di Leontovich (151) è stata dimostrata per i conduttori piani. Tuttavia è una ottima approssimazione, e viene largamente utilizzata, anche in altri casi. I suoi limiti sono quelli dell'utilizzo della descrizione di una onda mediante raggi: raggi di curvatura della superficie e del fronte d'onda grandi rispetto alla lunghezza d'onda.

## 22 INCIDENZA SU STRATI SOTTILI (NON MAGNETICI)

Consideriamo uno strato (disposto ortogonalmente all'asse  $z$ ) di materiale di spessore  $t$  e sua costante dielettrica  $\varepsilon_1$ <sup>1</sup>, posto in un materiale infinito di costante dielettrica  $\varepsilon_a$  (Fig. 1a), oppure appoggiato su di un semispazio di costante dielettrica  $\varepsilon_T$  (fig. 1b). I materiali coinvolti hanno tutti la stessa permeabilità magnetica  $\mu_0$ .

Sullo strato incide ortogonalmente una onda piana di ampiezza  $E_i$  (vedi Fig. 1).

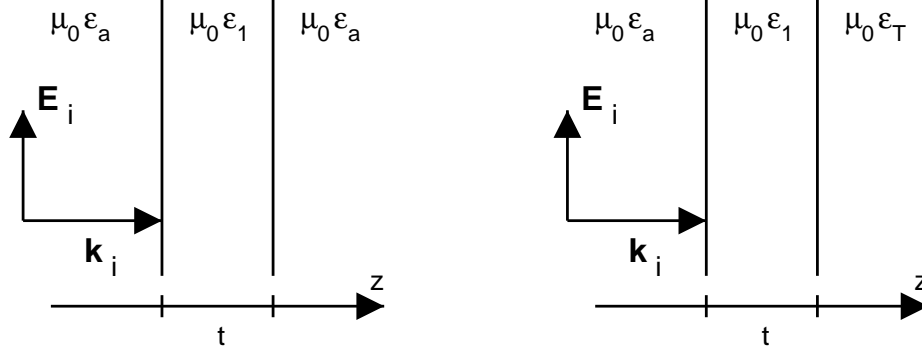


Fig. 1: Geometria dello strato sottile.

Supponiamo in particolare che questo strato sia sottile, sia rispetto alla lunghezza d'onda nelle regioni esterne, sia rispetto alla lunghezza d'onda interna

$$\left| \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0}} \right| \beta_0 t \ll 1 \quad \forall i \quad (152)$$

essendo  $\beta_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  la costante di propagazione del vuoto.

Per ricavare i campi trasmessi e riflessi possiamo utilizzare, con le opportune modifiche, quello che abbiamo fatto nella sezione sulle discontinuità. Conviene considerare direttamente il caso di Fig. 1b, in quanto il caso di Fig. 1a si ottiene da questo ponendo  $\varepsilon_T = \varepsilon_a$ .

La presenza dello strato sottile equivale ad una corrente elettrica superficiale proporzionale al campo elettrico trasverso  $\mathbf{E}_t$ , e quindi si ottiene una condizione di continuità (o meglio, di discontinuità) dei campi in  $z = 0$ :

$$\mathbf{i}_z \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = Y_c \mathbf{E}_t \quad (153)$$

essendo

$$Y_c = j \frac{Y_1^2 - Y_T^2}{Y_1} \beta_1 t$$

con  $Y_1$ ,  $Y_T$  le ammettenze caratteristiche dello strato e del semispazio a destra, e  $\beta_1$  la costante di propagazione dello strato. Nel caso non magnetico si ha

$$Y_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\zeta} \quad Y_T = \sqrt{\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\zeta} \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_0}} \beta_0$$

---

<sup>1</sup> Se lo strato centrale ha perdite,  $\varepsilon_1$  è la costante dielettrica equivalente (complessa).

per cui, sostituendo

$$\begin{aligned}
Y_c &= j \frac{Y_1^2 - Y_T^2}{Y_1} \beta_1 t \\
&= j \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0 \zeta^2} - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_0 \zeta^2}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\zeta}} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \beta_0 t = j \frac{1}{\zeta} \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_T}{\varepsilon_0} \right) \beta_0 t
\end{aligned} \tag{154}$$

dove  $\zeta$  è l'impedenza caratteristica del vuoto.

La equazione (153) sostituisce la seconda delle (93). Procedendo come nella sezione sulle discontinuità si ottiene, al posto delle (94), le

$$E_i + E_r = E(0^+)$$

$$\frac{E_i}{\zeta_a} - \frac{E_r}{\zeta_a} = Y_c E(0^+) + \frac{E(0^+)}{\zeta_3}$$

che possiamo riscrivere nella stessa forma delle (102) del paragrafo sulle discontinuità:

$$E_i + E_r = E(0^+)$$

$$\frac{1}{\zeta_1} (E_i - E_r) = \left[ Y_c + \frac{1}{\zeta_3} \right] E(0^+) = \frac{1}{Z_C} E(0^+) \tag{155}$$

avendo posto

$$Z_C = \left[ Y_c + \frac{1}{\zeta_T} \right]^{(-1)} \tag{156}$$

ovvero l'impedenza che si ottiene facendo il *parallelo* della ammettenza caratteristica del mezzo a destra  $1/\zeta_T$ , e della ammettenza  $Y_c$  con cui possiamo modellare lo strato.

La soluzione della (156) è la stessa della (102), ovvero le (103,104), che riscriviamo

$$E_r = \Gamma E_i \quad \text{con} \quad \Gamma = \frac{Z_C - \zeta_a}{Z_C + \zeta_a} \tag{157}$$

$$E(0^+) = (1 + \Gamma) E_i$$

Per valutare la precisione della (157), in Fig. 2 è riportato, in vari casi, l'errore causato dall'approssimare lo strato (che ha lunghezza finita) con una ammettenza (154) di lunghezza infinitesima.

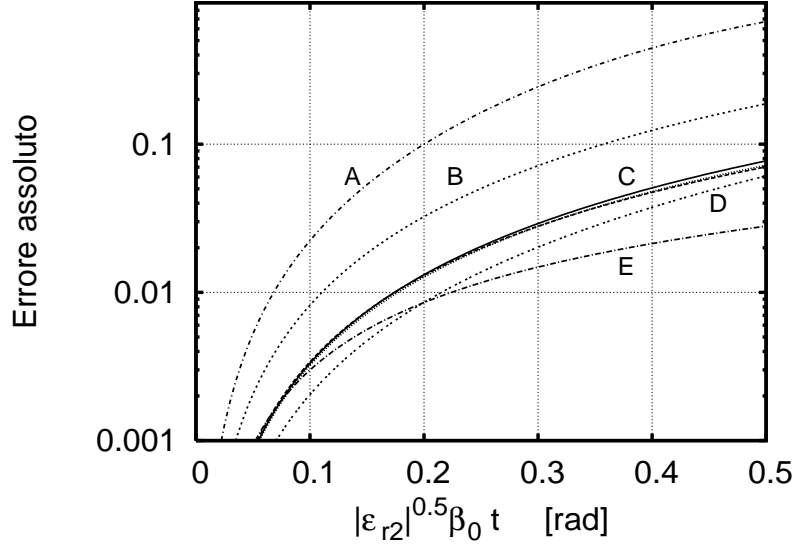


Fig. 2: Errore di approssimazione su  $\Gamma$  data dalla (157) al variare della lunghezza elettrica dello strato  $|\varepsilon_{r1}|\beta_0 t$  (per i valori di  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_T$  delle curve vedi tabella seguente).

curva	A	B	C	C	C	D	E
$\varepsilon_{r1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$	2	2	3	$3 - j1$	6	16	$6 - j100$
$\varepsilon_{rT} = \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_0}$	$6 - j10$	6	1	1	2	2	$20 - j10$

Legenda della Fig. 2

Dall'analisi di Fig. 2 si conclude che, per strati senza perdite, o con perdite moderate, e con costante dielettrica maggiore di quella delle zone esterne, l'approssimazione è ottima (errore inferiore a 1%) fino a  $|\varepsilon_{r1}|\beta_0 t$  pari a 0.15–0.2, e rimane comunque decisamente accettabile (errore inferiore al 5%) fino a valori di  $|\varepsilon_{r1}|\beta_0 t$  di 0.4 e oltre. Se invece la costante dielettrica del semispazio a destra è maggiore (in modulo) di quella dello stato, l'approssimazione è usabile solo per valori minori della lunghezza elettrica, e tanto più piccoli, quanto più  $|\varepsilon_{rT}|$  è grande (curve A e B di Fig. 2). Infine, se le perdite nello strato sono grandi (curva E di Fig.2), allora l'approssimazione è ottima fino a  $|\varepsilon_{r1}|\beta_0 t$  pari a 0.25–0.3, e rimane comunque decisamente accettabile fino a valori di  $|\varepsilon_{r1}|\beta_0 t$  di 0.5 e oltre. Naturalmente, in quest'ultimo caso, occorre considerare che la lunghezza fisica dello strato è molto più piccola a causa della elevata  $|\varepsilon_{r1}|$ .

Allo stesso risultato (157) si arriva utilizzando lo schema di Fig. 3, che si ottiene da quelli usati precedentemente, per l'analisi di una discontinuità singola, inserendo l'ammettenza che caratterizza lo strato.

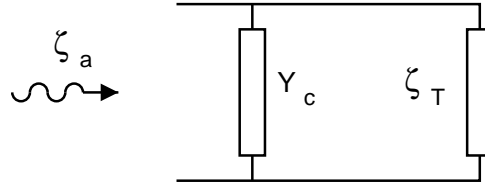


Fig. 3: Schema equivalente per il calcolo di  $\Gamma$  per gli strati di Fig. 1.

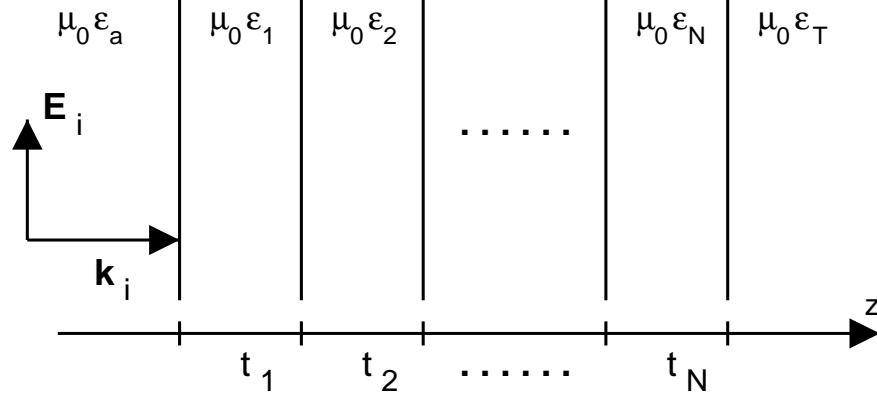


Fig. 4: Geometria di  $N - 1$  strati sottili in cascata.

Possiamo generalizzare questi risultati al caso di più strati sottili in cascata, come in Fig. 4. Basta utilizzare il circuito equivalente di Fig. 4, in cui a ogni strato corrisponde una ammettenza

$$\begin{aligned}
 Y_{cn} &= j \frac{Y_n^2 - Y_T^2}{Y_n} \beta_n t_n \\
 &= j \frac{1}{\zeta} \left( \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_T}{\varepsilon_0} \right) \beta_0 t_n
 \end{aligned}
 \quad n = 1, \dots, N \quad (158)$$

che va sempre calcolata utilizzando i parametri dello strato considerato, e del semispazio terminale. La precisione di questa approssimazione dipende ancora dalla lunghezza elettrica **totale** degli strati intermedi, e in parte dalle varie costanti dielettriche, secondo le stesse indicazioni sulla precisione date dopo la Fig. 2.

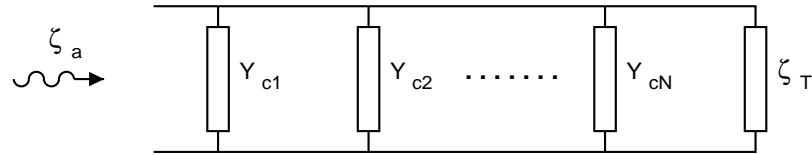


Fig. 5: Circuito equivalente per la configurazione di Fig. 4.

L'approssimazione descritta in questo paragrafo si applica anche al caso di incidenza obliqua. Occorre solo utilizzare le impedenze  $Z_p$  o  $Z_s$  al posto di  $\zeta$ , a seconda della orientazione



del campo incidente, per tutti gli strati. In particolare, quindi, restano valide per  $Y_c$  le espressioni date dal primo rigo di (154) e (158), ma non il resto di queste due espressioni.

Nel caso in cui lo strato centrale sia di buon conduttore, comunque, si ottiene una semplificazione nel caso di incidenza obliqua. Infatti, all'interno di un buon conduttore (vedi (150)) l'onda viaggia sempre in direzione ortogonale all'interfaccia, e quindi la sua impedenza caratteristica e costante di propagazione sono sempre

$$Z_m = \frac{1+j}{\sigma\delta} \quad k_m = \frac{1-j}{\delta}$$

Pertanto la (154) fornisce, se  $Y_T$  è l'impedenza dello strato terminale (dipendente dalla orientazione del campo)

$$Y_c = j \frac{Y_m^2 - Y_T^2}{Y_m} k_m t$$

Se  $|Y_m| \gg |Y_T|$ , allora l'ammettenza equivalente allo strato vale

$$Y_c = j Y_m k_m t$$

e risulta quindi indipendente dalla orientazione dell'onda incidente. (Nel circuito equivalente, comunque, le altre impedenze vi dipendono).

## 23 INCIDENZA ORTOGONALE SU STRATI $\lambda/4$

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato l'incidenza su di uno strato sottile (ripetto alla lunghezza d'onda). Naturalmente, non sempre gli strati che occorre considerare sono sottili ripetto a  $\lambda$ , tuttavia una trattazione generale di strati non sottili va oltre le necessità di questo corso. Considereremo solo un caso particolare, ma di largo uso, ovvero quello di uno strato, privo di perdite, largo un quarto di lunghezza d'onda, e con onda incidente ortogonale. La geometria è mostrata in Fig. 1. Si noti che l'origine dell'asse  $z$  è posta nella seconda discontinuità.

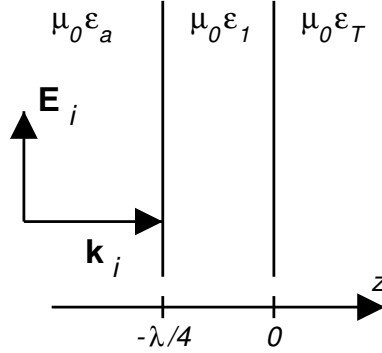


Fig. 1: Geometria di uno strato  $\lambda/4$ .

Indichiamo con  $\beta_1 = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_1 \mu_0}$  e  $\zeta_1 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_1}$  le costanti dell'onda piana nello strato intermedio. La lunghezza dello strato è pari a  $\lambda/4$ , dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda in tale strato, data quindi da  $\lambda = 2\pi/\beta_1$ . Il campo in questo strato può essere espresso come in (89) o (90):

$$\begin{aligned} E_1(z) &= E_1^+ e^{-j\beta_1 z} + E_1^- e^{j\beta_1 z} \\ H_1(z) &= \frac{1}{\zeta_1} [E_1^+ e^{-j\beta_1 z} - E_1^- e^{j\beta_1 z}] \end{aligned} \quad (159)$$

Sulla interfaccia a  $z = 0$  è presente una onda incidente  $E_1^+ e^{-j\beta_1 z}$  e quindi risulterà, da (103),

$$E_1^- = \Gamma_B E_1^+ \quad \text{con} \quad \Gamma_B = \frac{\zeta_T - \zeta_1}{\zeta_T + \zeta_1} \quad (160)$$

essendo  $\zeta_T = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_T}$  l'impedenza caratteristica dello strato terminale.

Calcoliamo i campi, nello strato centrale, alla prima discontinuità, ovvero in  $z = -\lambda/4$ . Essendo  $\beta_1 \lambda/4 = \pi/2$ , segue

$$\begin{aligned} E_1\left(-\frac{\lambda}{4}\right) &= E_1^+ e^{-j(-\pi/2)} + \Gamma_B E_1^+ e^{j(-\pi/2)} = E_1^+ (j - j\Gamma_B) \\ H_1\left(-\frac{\lambda}{4}\right) &= \frac{1}{\zeta_1} [E_1^+ e^{-j(-\pi/2)} - \Gamma_B E_1^+ e^{j(-\pi/2)}] = \frac{1}{\zeta_1} E_1^+ (j + j\Gamma_B) \end{aligned} \quad (161)$$

Il coefficiente di riflessione  $\Gamma_A$  alla prima interfaccia dipende dalla impedenza caratteristica  $\zeta_a = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_a}$  del primo mezzo, e dal rapporto tra campo elettrico e magnetico immediatamente dopo la prima interfaccia (confronta (93,94)). Tale rapporto vale

$$Z_A = \frac{E_1 \left(-\frac{\lambda}{4}\right)}{H_1 \left(-\frac{\lambda}{4}\right)} = \zeta_1 \frac{1 - \Gamma_B}{1 + \Gamma_B} = \zeta_1 \frac{\frac{2\zeta_1}{\zeta_1 + \zeta_T}}{\frac{2\zeta_T}{\zeta_1 + \zeta_T}} = \frac{\zeta_1^2}{\zeta_T} \quad (162)$$

Pertanto

$$\Gamma_A = \frac{Z_A - \zeta_a}{Z_A + \zeta_a} \quad (163)$$

Se, come in Fig. 1, il campo incidente sulla prima interfaccia vale  $E_i$ , il campo subito dopo l'interfaccia (98) vale

$$E_1 \left(-\frac{\lambda}{4}\right) = (1 + \Gamma_A) E_i$$

e ricavando il secondo membro da (161) segue il campo incidente alla seconda interfaccia, e il campo totale dopo la seconda interfaccia

$$\begin{aligned} E_1^+ &= \frac{E_1 \left(-\frac{\lambda}{4}\right)}{j - j\Gamma_B} = \frac{1 + \Gamma_A}{j(1 - \Gamma_B)} E_i \\ E_T = E_1(0) &= E_1^+ + E_1^- = (1 + \Gamma_B)E_1^+ = \frac{1 + \Gamma_B}{1 - \Gamma_B} \frac{1 + \Gamma_A}{j} E_i = \frac{\zeta_T}{j\zeta_1} (1 + \Gamma_A) E_i \end{aligned} \quad (164)$$

avendo usato la (162).

## APPENDICE 1: DOMINIO DELLA FREQUENZA

Il caso più interessante di propagazione di onde elettromagnetiche è quando queste variano sinusoidalmente nel tempo in ogni punto con la stessa pulsazione  $\omega$  (ovvero con la stessa frequenza  $f = \omega/2\pi$ ). Ciò è possibile ad esempio se tutte le sorgenti dell'onda sono sinusoidali con la stessa pulsazione  $\omega$ <sup>1</sup>.

Sappiamo che una grandezza sinusoidale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi) \quad (165)$$

può essere rappresentata da un numero complesso<sup>2</sup>

$$v(t) \longrightarrow V_M e^{j\varphi} \quad (166)$$

nel senso che

- (a) la corrispondenza è biunivoca: noto il numero complesso  $A$  associato alla grandezza  $a(t)$ , quest'ultima vale

$$a(t) = \text{Re}[A e^{j\omega t}] \quad (167)$$

- (b) tutte le operazioni lineari (somma, moltiplicazione per un numero reale, derivazione, integrazione) possono essere fatte indifferentemente sulle due rappresentazioni. In particolare

$$\frac{dv}{dt} \longrightarrow j\omega [V_M e^{j\varphi}] \quad (168)$$

Le considerazioni precedenti si applicano anche a grandezze sinusoidali che però variano anche con le coordinate spaziali. In tal caso, in ogni punto la grandezza sarà sinusoidale, e quindi rappresentabile mediante un numero complesso. Tale numero però varia con le coordinate spaziali, e quindi in realtà quella grandezza viene rappresentata mediante una funzione complessa delle coordinate spaziali. Se consideriamo ad esempio il campo elettrico  $e_x(z, t)$  di una onda piana sinusoidale che si propaga in direzione  $z$ , usando la rappresentazione complessa, questo diventa una funzione complessa  $E_x(z)$  di  $z$ , nel senso che  $E_x(z_0)$  è il numero complesso che corrisponde alla funzione sinusoidale del tempo  $e_x(z_0, t)$ .

Per distinguere il caso in cui si utilizza la rappresentazione come funzione di  $(z, t)$  da quella in cui si utilizzano i numeri (o le funzioni) complessi corrispondenti, si parla di dominio del tempo ( $DT$ ) nel primo caso e di dominio della frequenza ( $DF$ ) nel secondo (si dirà quindi tensione, o campo elettrico nel  $DT$  o nel  $DF$ , equazioni nel  $DT$  o nel  $DF$  e così via).

---

<sup>1</sup> A rigori, questo è vero in quanto  $\mu, \varepsilon$  sono costanti (ovvero non dipendono né dal tempo né dalla ampiezza dei campi). Le equazioni che regolano il fenomeno (nel nostro caso le equazioni di Maxwell) devono cioè essere *lineari* e a *coefficienti costanti*, come ad esempio vale nel vuoto affinché a una sorgente sinusoidale corrisponda un effetto sinusoidale con la stessa frequenza.

<sup>2</sup> Si noti che, al contrario di quanto si conviene nella teoria dei circuiti, il modulo del numero complesso è pari al valore massimo del corrispondente segnale sinusoidale

Occorre comunque notare che tutte le operazioni differenziali, e integrali, che coinvolgono le coordinate spaziali, restano inalterate nel  $DF$ . Ad esempio, se  $E_x(z)$  corrisponde a  $e_x(z, t)$ , allora

$$\frac{d}{dz} e_x(z, t) \longrightarrow \frac{d}{dz} E_x(z)$$

Oltre alle operazioni lineari, è importante considerare la potenza, che richiede una operazione non-lineare (quadrato di una grandezza sinusoidale o prodotto tra due grandezze sinusoidali). Tali operazioni non sono immediatamente trasferibili sui numeri complessi, ma comunque la rappresentazione nel  $DF$  è utilizzabile per ottenere le grandezze energetiche di interesse.

Consideriamo ad esempio il calcolo di una potenza *istantanea* (ma queste considerazioni si applicano a qualunque prodotto di grandezze sinusoidali, e quindi anche a quadrati di queste grandezze)

$$p(t) = v(t) i(t) \quad (169)$$

Nel caso sinusoidale tale potenza vale (usando la (166))

$$p(t) = |V| \cos(\omega t + \phi_V) |I| \cos(\omega t + \phi_I) = \frac{1}{2} |V| |I| \cos(\phi_V - \phi_I) + \frac{1}{2} |V| |I| \cos(2\omega t + \phi_V + \phi_I) \quad (170)$$

dove  $|V| \exp(j\phi_V)$ ,  $|I| \exp(j\phi_I)$  sono i numeri complessi corrispondenti a  $v(t)$ ,  $i(t)$ , e sono state usate le formule trigonometriche di Werner.

Se calcoliamo il valore medio su di un periodo di  $p(t)$

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (171)$$

essendo  $T$  il periodo dell'onda sinusoidale, si ottiene la potenza *attiva* (o media)

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} |V| |I| \cos(\phi_V - \phi_I) = \text{Re} \left[ \frac{1}{2} V I^* \right] \quad (172)$$

Pertanto nel  $DF$  non è possibile determinare la potenza istantanea ma è possibile calcolare facilmente la potenza media, ovvero quella che ha effetti energetici. <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Ribadiamo che espressioni come la (172) non sono specifiche della potenza media. Ogni qualvolta una grandezza è il prodotto di due fattori sinusoidali (uguali o diversi) il suo valore medio è dato da una espressione come la (172). Ad esempio la potenza istantanea dissipata in una resistenza  $R$  percorsa da una corrente  $i(t)$  è

$$p_R(t) = R i^2(t) = R \left[ i(t) \cdot i(t) \right]$$

Se  $i(t)$  è sinusoidale il suo valore medio vale

$$\langle p_R(t) \rangle = R \text{Re} \left[ \frac{1}{2} I I^* \right] = \frac{1}{2} R |I|^2$$

essendo  $I$  il numero complesso corrispondente a  $i(t)$ .

Benchè la conoscenza della potenza attiva sia in genere quella di interesse, può essere utile anche valutare la parte oscillante della potenza istantanea. Infatti, quanto più il suo valore massimo

$$P_{VM} = \frac{1}{2}|V| |I|$$

è grande, fissata la potenza attiva, tanto più grandi saranno le ampiezze di tensione e corrente necessarie a fornire quella data potenza attiva.

Per valutare  $P_{VM}$  possiamo notare che

$$P_{VM}^2 = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} V I^* \right]^2 + \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{2} V I^* \right]^2$$

e quindi basta considerare insieme la potenza attiva e la cosiddetta *potenza reattiva*, definita da

$$P_R = \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{2} V I^* \right]$$

Fissata la potenza attiva, al crescere della potenza reattiva aumenta anche la parte oscillante della potenza istantanea  $P_{VM}$

Si definisce allora una *potenza complessa*

$$P = \left[ \frac{1}{2} V I^* \right] \tag{173}$$

in modo che la potenza attiva è la parte reale di tale potenza complessa, la potenza reattiva quella immaginaria e

$$P_{VM} = |P|$$

## APPENDICE 2: EQUAZIONI DI MAXWELL IN FORMA DIFFERENZIALE

Le equazioni di Maxwell (6) considerate finora sono dette *equazioni in forma integrale* e costituiscono la forma più generale di queste equazioni. Tuttavia il loro utilizzo è in genere poco diretto. Si usano al loro posto le *equazioni in forma differenziale*, che collegano direttamente le variazioni dei campi punto per punto, ma che sono valide solo al di fuori di superfici di discontinuità.

Per ricavarle consideriamo ad esempio la legge di Faraday. Per il teorema di Stokes, l'integrale di linea del campo  $\mathbf{e}$  può essere espresso come flusso del rotore di  $\mathbf{e}$  esteso alla stessa superficie  $\mathcal{S}$  su cui calcoliamo il flusso di  $\mathbf{b}$ :

$$\int_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{e} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (174)$$

Possiamo portare tutti i termini a primo membro

$$\int_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{e} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{S}} \left[ \nabla \times \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (175)$$

e ottenere quindi un integrale che è nullo **qualunque sia** la superficie di integrazione  $\mathcal{S}$ . Questa condizione implica che l'integrando è nullo. Allo stesso modo si opera sulla legge di Ampère, ottenendo

$$\int_{\mathcal{S}} \left[ \nabla \times \mathbf{h} - \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} - \mathbf{j}_{tot} \right] \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (176)$$

Per la legge di Gauss (e la analoga magnetica) si procede in maniera simile, ma utilizzando il teorema della divergenza:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{d} dV = \int_V \rho_{tot} dV \quad \Rightarrow \quad \int_V [\nabla \cdot \mathbf{d} - \rho_{tot}] dV = 0 \quad (177)$$

In definitiva si ottiene

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{h} &= \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j}_{tot} \\ \nabla \cdot \mathbf{d} &= \rho_{tot} \\ \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0 \end{aligned} \quad (178)$$

### APPENDICE 3: EQUAZIONI DELLE ONDE PIANE – FORMA INTEGRALE

Le equazioni di Maxwell dipendono da tre variabili spaziali e dal tempo. Conviene pertanto cominciare a determinare delle soluzioni particolari di tali equazioni, ovvero soluzioni che godano di particolari proprietà, piuttosto che porsi il problema della soluzione completa di tali equazioni.

Le soluzioni più semplici sono quelle ottenute nel vuoto in assenza di sorgenti, e che dipendono solo da una coordinata spaziale. Tali soluzioni sono quindi campi elettromagnetici costanti su tutti i piani ortogonali a tale direzione, e prendono il nome di *onde piane*.

Scegliamo allora un sistema di riferimento con l'asse  $z$  nella direzione in cui i campi variano, e applichiamo le equazioni di Maxwell in forma integrale <sup>1</sup> a tale campo.

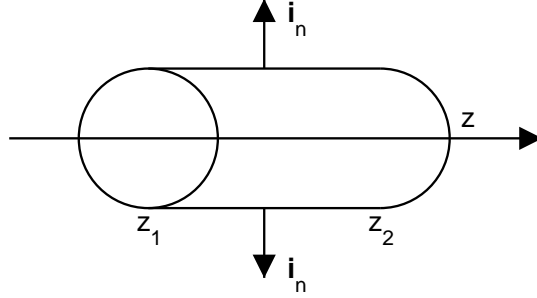


Fig. 1: Volume su cui applicare la legge di Gauss.

Partiamo dalla legge di Gauss<sup>2</sup>, che nel nostro caso diventa

$$\oint_S \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dS = 0 \quad (179)$$

e appliciamola ad una superficie cilindrica con asse parallelo all'asse  $z$ . L'integrale diventa la somma di tre termini

$$\int_{S_1} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dS + \int_{S_2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dS + \int_{S_L} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dS = 0$$

dove  $S_1$  ed  $S_2$  sono le due basi, di area  $S_b$ , e poste a  $z = z_1$  e  $z = z_2$  rispettivamente, e  $S_L$  è la superficie laterale.

Per quanto riguarda quest'ultimo integrale, questo può essere scritto come integrale doppio

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{\Gamma} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n d\ell dz$$

<sup>1</sup> Una derivazione delle equazioni delle onde piane a partire dalle equazioni in forma differenziale (ricavate nella App. 2) é riportata nella App. 4.

<sup>2</sup> Abbiamo visto che le informazioni contenute nella legge di Gauss sono contenute anche in altre equazioni, e infatti non le abbiamo inserite nelle (13). Tuttavia in alcuni casi, come questo, risulta più comodo usarle direttamente.



dove  $\Gamma$  è la circonferenza che delimita la base del cilindro. Rispetto a un diametro il campo elettrico è simmetrico (essendo costante sul piano ortogonale a  $z$ ), mentre il versore normale  $\mathbf{i}_n$  è antisimmetrico. L'integrale su  $S_L$  è quindi nullo. Resta allora, visto sempre la costanza di  $\mathbf{e}$ , e la direzione della normale alle basi del cilindro,

$$S_b \mathbf{e}(z_1) \cdot [-\mathbf{i}_z] + S_b \mathbf{e}(z_2) \cdot \mathbf{i}_z = 0 \quad (180)$$

Da cui segue

$$e_z(z_2) = e_z(z_1) \quad \forall z_1, z_2$$

ovvero la costanza della componente  $z$  del campo elettrico  $\mathbf{e}$ . Poichè siamo interessati a soluzioni che variano con  $z$ , poniamo direttamente a zero tale componente.

Identici ragionamenti si possono fare per  $h_z$ , data la simmetria delle equazioni di Maxwell, e quindi porremo anche  $h_z = 0$ . Ne segue che in una onda piana campo elettrico e campo magnetico sono ortogonali alla direzione  $z$  in cui l'onda varia.

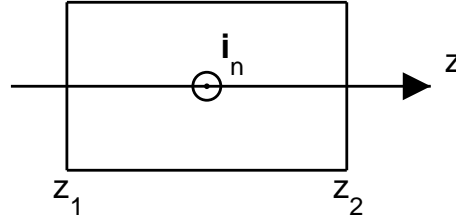


Fig. 2: Superficie  $S$  su cui applicare la legge di Ampere.

Passiamo ora alla legge di Ampere:

$$\oint_C \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_l d\ell = \frac{d}{dt} \epsilon \int_S \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dS \quad (181)$$

e applichiamo a una superficie  $S$  rettangolare, parallela all'asse  $z$ , che vada da  $z_1$  a  $z_2$ . La direzione  $\mathbf{i}_n$  della normale alla superficie è generica (purchè ortogonale a  $\mathbf{i}_z$ ). Il flusso del campo elettrico diventa

$$\int_S \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dS = D \int_{z_1}^{z_2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dz = D(z_2 - z_1) \mathbf{e}(\xi) \cdot \mathbf{i}_n \quad (182)$$

essendo  $D$  la dimensione trasversa di  $S$ , e  $\xi$  un punto compreso tra  $z_1$  e  $z_2$  (teorema della media).

Per quanto riguarda la circuitazione del campo magnetico, questa si decompone nella somma di quattro integrali, due sui lati paralleli a  $z$  e due sui lati ortogonali a  $z$ . Sui primi due il campo magnetico è uguale, mentre  $\mathbf{i}_l$  è opposto. pertanto questi due integrali sono nulli. Quindi

$$\oint_C \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_l d\ell = D\mathbf{h}(z_2) \cdot \mathbf{i}_t + D\mathbf{h}(z_1) \cdot [-\mathbf{i}_t] = D[\mathbf{h}(z_2) - \mathbf{h}(z_1)] \cdot \mathbf{i}_t \quad (183)$$

Sostituendo (182) e (183) in (181) segue allora

$$[\mathbf{h}(z_2) - \mathbf{h}(z_1)] \cdot \mathbf{i}_t = \epsilon(z_2 - z_1) \frac{d}{dt} \mathbf{e}(\xi) \cdot \mathbf{i}_n$$

Dividendo per  $z_2 - z_1$  e passando al limite per  $z_2 - z_1 \rightarrow 0$  si ha infine

$$-\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_t = -\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n \quad (184)$$

Poichè  $\mathbf{i}_n$  è qualunque, dalla (184) si ottengono due equazioni scegliendo prima  $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_x$  (col che  $\mathbf{i}_t = -\mathbf{i}_y$ ) e poi  $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_y$  (col che  $\mathbf{i}_t = \mathbf{i}_x$ ):

$$-\frac{\partial}{\partial z} h_y = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} e_x \quad \frac{\partial}{\partial z} h_x = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} e_y \quad (185)$$

Partendo dalla legge di Faraday si ottengono equazioni analoghe alla (185), a patto di scambiare  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{h}$ , di sostituire  $\mu$  ad  $\epsilon$  e di cambiare un segno. Il risultato è

$$\frac{\partial}{\partial z} e_y = \mu \frac{\partial}{\partial t} h_x \quad -\frac{\partial}{\partial z} e_x = \mu \frac{\partial}{\partial t} h_y \quad (186)$$

Le (185,186) si dividono in due coppie di equazioni tra loro disaccoppiate. Ne segue che sono possibili onde piane in cui le uniche componenti diverse da zero sono  $e_x$  ed  $h_y$  e onde piane in cui sono diverse da zero solo  $e_y$  ed  $h_x$ . Per tali onde, evidentemente,  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{h}$  sono ortogonali anche tra loro. La soluzione generale è la somma di queste due soluzioni, e quindi per una onda piana  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{i}_z$  sono sempre *ortogonali*.

Possiamo allora risolvere le sole equazioni con  $e_x$  e  $h_y$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z} h_y &= \epsilon \frac{\partial}{\partial t} e_x \\ -\frac{\partial}{\partial z} e_x &= \mu \frac{\partial}{\partial t} h_y \end{aligned} \quad (187)$$

in quanto basta sostituire  $e_x \rightarrow e_y$  e  $h_y \rightarrow -h_x$  per avere la soluzione delle altre due equazioni.

## APPENDICE 4: EQUAZIONI DELLE ONDE PIANE – FORMA DIFFERENZIALE

Le soluzioni più semplici delle equazioni di Maxwell sono quelle ottenute nel vuoto in assenza di sorgenti, e che dipendono solo da una coordinata spaziale. Tali soluzioni sono quindi campi elettromagnetici costanti su tutti i piani ortogonali a tale direzione, e prendono il nome di *onde piane*.

Scegliamo allora un sistema di riferimento con l'asse  $z$  nella direzione in cui i campi variano, e cerchiamo un campo **variabile** solo con  $z$ .

Questo consente di sostituire, nelle equazioni di Maxwell (178), scritte nel vuoto e in assenza di sorgenti:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{e} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{h} &= \epsilon \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \\ \epsilon \nabla \cdot \mathbf{e} &= 0 \\ \mu \nabla \cdot \mathbf{h} &= 0 \end{aligned} \quad (188)$$

l'operatore di derivazione spaziale

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{i}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z \quad (189)$$

con il solo terzo termine, essendo le due derivate rispetto a  $x$  e  $y$  pari a zero. Quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z \times \mathbf{e} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z \times \mathbf{h} &= \epsilon \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial z} e_z &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} h_z &= 0 \end{aligned} \quad (190)$$

Le ultime due equazioni (190) ci dicono che  $e_z$  ed  $h_z$  sono costanti. Poichè siamo interessati a soluzioni variabili possiamo porre

$$e_z = 0 \quad h_z = 0$$

ottenendo che i campi sono ortogonali alla direzione in cui il campo varia.

Resta quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z \times (e_x \mathbf{i}_x + e_y \mathbf{i}_y) &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (h_x \mathbf{i}_x + h_y \mathbf{i}_y) \\ \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z \times (h_x \mathbf{i}_x + h_y \mathbf{i}_y) &= \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (e_x \mathbf{i}_x + e_y \mathbf{i}_y) \end{aligned} \quad (191)$$

Sviluppando i prodotto vettoriali, separando le equazioni in componenti e riordinandole opportunamente segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_x}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial h_y}{\partial t} & \frac{\partial e_y}{\partial z} &= -\epsilon \frac{\partial (-h_x)}{\partial t} \\ \frac{\partial h_y}{\partial z} &= -\epsilon \frac{\partial e_x}{\partial t} & \frac{\partial (-h_x)}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial e_y}{\partial t} \end{aligned} \quad (192)$$

Le equazioni precedenti si dividono in due coppie di equazioni (quelle di destra e quelle di sinistra) tra loro disaccoppiate. Ne segue che sono possibili onde piane in cui le uniche componenti diverse da zero sono  $e_x$  ed  $h_y$  e onde piane in cui sono diverse da zero solo  $e_y$  ed  $h_x$ . Per tali onde, evidentemente,  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{h}$  sono ortogonali anche tra loro. La soluzione generale è la somma di queste due soluzioni, e quindi per una onda piana  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{i}_z$  sono sempre *ortogonali*.

Possiamo allora risolvere le sole equazioni con  $e_x$  e  $h_y$ , che riscriviamo come

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z} e_x &= \mu \frac{\partial}{\partial t} h_y \\ -\frac{\partial}{\partial z} h_y &= \epsilon \frac{\partial}{\partial t} e_x \end{aligned}$$

in quanto basta sostituire  $e_x \rightarrow e_y$  e  $h_y \rightarrow -h_x$  per avere la soluzione delle altre due equazioni.

Prima di risolvere le (23), notiamo esplicitamente che queste equazioni descrivono campi variabili solo rispetto a una direzione. Che questa sia la direzione  $z$  è solo una conseguenza del sistema di riferimento scelto.

## APPENDICE 5: DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI POYNTING

Consideriamo il vettore

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$$

detto vettore di Poynting nel  $DF$ .

Calcoliamo la divergenza di  $\mathbf{S}$ , utilizzando le equazioni di Maxwell nella forma (vedi App. 2)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}_0 \end{aligned} \quad (193)$$

dove  $\varepsilon = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2$ , separando parte reale ed immaginaria.

Risulta

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= \frac{1}{2} [\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^*] = \frac{1}{2} [\mathbf{H}^* \cdot (-j\omega\mu\mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot (j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}_0)^*] \\ &= \frac{1}{2} [-j\omega\mu|\mathbf{H}|^2 + j\omega\varepsilon^*|\mathbf{E}|^2 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^*] = \frac{1}{2} [-j\omega\mu|\mathbf{H}|^2 + j\omega\varepsilon_1|\mathbf{E}|^2 - \omega\varepsilon_2|\mathbf{E}|^2 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^*] \end{aligned} \quad (194)$$

Possiamo integrare su di un volume  $V$  qualunque, racchiuso da una superficie  $S$ , ottenendo

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = -\frac{1}{2}\omega \int_V \varepsilon_2 |\mathbf{E}|^2 dV - j\omega \int_V \left[ \frac{1}{2}\mu|\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 |\mathbf{E}|^2 \right] dV + \frac{1}{2} \int_V [-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^*] dV \quad (195)$$

L'integrale di  $\nabla \cdot \mathbf{S}$  può essere trasformato nel flusso attraverso  $S$ , di normale uscente  $\mathbf{i}_n$ , col teorema della divergenza, ottenendo infine, con qualche riarrangiamento, il *Teorema di Poynting*:

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_n dS + \frac{1}{2}\omega \int_V \varepsilon_2 |\mathbf{E}|^2 dV = -j2\omega \int_V \left[ \frac{1}{4}\mu|\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_1 |\mathbf{E}|^2 \right] dV + \frac{1}{2} \int_V [-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^*] dV$$

# INDICE

1. EQUAZIONI DI MAXWELL . . . . .	1
2. FORZA DI LORENTZ . . . . .	4
3. EQUAZIONI DI MAXWELL E MATERIALI . . . . .	5
4. CONTINUITÀ DEI CAMPI . . . . .	7
5. ONDE PIANE . . . . .	10
6. PROPAGAZIONE PER ONDE . . . . .	10
7. ONDE SINUSOIDALI . . . . .	13
8. MEZZI DISPERSIVI . . . . .	16
9. EQUAZIONI DI MAXWELL NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA . . . . .	19
10. TEOREMA DI POYNTING . . . . .	21
11. PROPAGAZIONE NEI MATERIALI DISPERSIVI E CON PERDITE . . . . .	26
12. PROPAGAZIONE IN PRESENZA DI PICCOLE PERDITE . . . . .	27
13. MODELLO DI DEBYE . . . . .	28
14. DISCONTINUITA' . . . . .	32
15. FORMA GENERALE DELLE ONDE PIANE . . . . .	35
16. VETTORE DI POYNTING DI UNA ONDA PIANA . . . . .	39
17. LEGGE DI SNELL . . . . .	40
18. FORMULE DI FRESNEL – ANGOLO DI BREWSTER . . . . .	43
19. BUON CONDUTTORE . . . . .	48
20. INCIDENZA SU DI UN BUON CONDUTTORE . . . . .	50
21. INCIDENZA OBLIQUA – CONDIZIONE DI LEONTOVICH . . . . .	51
22. INCIDENZA SU STRATI SOTTILI (NON MAGNETICI) . . . . .	52
23. INCIDENZA ORTOGONALE SU STRATI $\lambda/4$ . . . . .	58
App. 1. DOMINIO DELLA FREQUENZA . . . . .	60
App. 2. EQUAZIONI DI MAXWELL IN FORMA DIFFERENZIALE . . . . .	63
App. 3. EQUAZIONI DELLE ONDE PIANE – FORMA INTEGRALE . . . . .	63
App. 4. EQUAZIONI DELLE ONDE PIANE – FORMA DIFFERENZIALE . . . . .	66
App. 5. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI POYNTING . . . . .	67