Massimizzazione di numeri complessi

I numeri complessi <u>non</u> sono ordinati, quindi non possono essere massimizzati.

A seconda dei casi (dipendente dal significato fisico della grandezza) si massimizza il modulo (ovvero il modulo quadro), la parte reale e talvolta altre quantità.

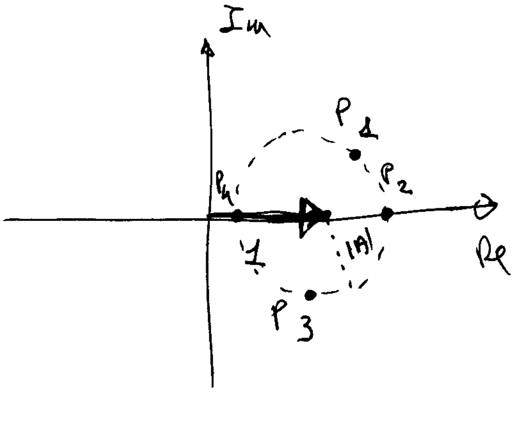
In alcuni casi è possibile semplificare la massimizzazione. Si consideri la funzione complessa $A(x, y\ldots)$ di parametri reali. Se $|A(x,y..)|$ è <u>costante</u> allora

$$|1 + A(x,y\ldots)| \quad \text{è massimo se} \quad \angle A = 0 + 2n\pi$$

$$\text{è minimo se} \quad \angle A = \pi + 2n\pi$$

purché quei valori di fase vengano raggiunti.

Dim. $1 + A$ può essere rappresentato nel piano complesso come somma di due vettori. In particolare l'estremo di A varia su una circonferenza (il modulo è costante)



La somma $1+A$ si trova in

$\angle A = 30° \Rightarrow P_1$

$\angle A = 0 \Rightarrow P_2$

$\angle A = -90° \Rightarrow P_3$

$\angle A = 180° \Rightarrow P_4$

e così via. Si vede subito che $|1+A|$ è massimo nel punto della circonferenza più lontano dall'origine, P_2, ovvero per $\angle A = 0$

Il punto di minima distanza dall'origine (ovvero di minimo modulo) è invece quello . . . P_4

Si vede che se il valore di fase nulla o pari a π viene raggiunto, allora $\max |1+A| = 1 + |A|$, $\min |1+A| = \big| 1 - |A| \big|$

Se occorre massimizzare $|A+B|$, e $|A|$ e $|B|$ sono costanti, allora

$$|A+B| \max \quad \text{se} \quad \angle A = \angle B + 2n\pi$$

$$|A+B| \min \quad \text{se} \quad \angle A = \angle B + \pi + 2n\pi$$

Infatti basta considerare che $|A+B| = |A| \cdot \left|1 + \frac{B}{A}\right|$ e basta massimizzare solo il secondo fattore ($|A|$ è costante). $\left|\frac{B}{A}\right| = \frac{|B|}{|A|}$ è anch'esso costante e vale quindi il caso precedente. Ad esempio

$\left|1 + \frac{B}{A}\right| \max$ se $\angle B/A = 0 + 2n\pi$. Ma $\angle B/A = \angle B - \angle A$

e segue la dimostrazione della condizione di massimo.

Analogamente per quella di minimo

EQUAZIONI COMPLESSE

Se Z e W sono funzioni complesse, l'equazione

$$Z = W$$

può essere risolta sia come equazione complessa, sia separandola in due equazioni reali:

$$|Z| = |W| \qquad\qquad Re(Z) = Re(W)$$

$$\angle Z = \angle W + 2n\pi \qquad\qquad Im(Z) = Im(W)$$

e viceversa.

Esempio 1. $Z = 1 + i \qquad W = e^{i\alpha} \cdot A \qquad (A, \alpha \text{ reali})$

$Z = W$ non è risolvibile direttamente. Invece i due sistemi

$$\begin{cases} \sqrt{2} = |A| \\ \pi/4 = \alpha + 2n\pi + \angle A \end{cases} \Rightarrow \quad A = \pm\sqrt{2}$$

se $A = \sqrt{2}$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$, se $A = -\sqrt{2}$ $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$

$$\begin{cases} 1 = A \cos\alpha \\ 1 = A \operatorname{sen}\alpha \end{cases} \Rightarrow \quad 1^2 + 1^2 = A^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) = A^2 \Rightarrow A = \mp\sqrt{2}$$

$\alpha = \dots$

Esempio 2 : Determinare Q complesso in modo che $(1+j)$ e $2Q\,e^{j\pi/4}$ abbiano lo stesso modulo e siano sfasati di $\pi/2$.

Le due condizioni separate forniscono il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{2} = 2\,|Q| \\ \pi/4 = \left[\angle Q + \pi/4\right] + \frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{cases} \Rightarrow |Q| = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \angle Q = -\frac{\pi}{2}$$

ovvero $Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-j)$

Ma il problema può essere anche risolto più semplicemente

$$\left[1+j\right] = j\left[2Q\,e^{j\pi/4}\right] \Rightarrow Q = \frac{1+j}{2j\,e^{j\pi/4}} = -j\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

essendo $e^{j\pi/4} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$