Rappresentazione algebrica dei numeri complessi.

I **numeri complessi** sono un'estensione dei numeri reali nata inizialmente per consentire di trovare tutte le soluzioni delle equazioni polinomiali.

Ad esempio, l'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzioni reali, perché in questo insieme non esistono numeri il cui quadrato sia negativo.

Si definisce allora il valore *j*[1], chiamato anche unità immaginaria, il quale gode della seguente proprietà:

$$j^2 = -1$$

I numeri complessi sono formati da due parti, una parte reale ed una parte immaginaria, e sono rappresentati dalla seguente espressione:

$z=a+jb$ con *a,b*œÑ

dove:

a=Re{z} si chiama ***parte reale*** di *z*
b=Im{z} si chiama ***parte immaginaria*** di *z*

Un numero complesso z é quindi rappresentabile mediante una coppia ordinata di numeri reali:

$$z = \{ a , b \}$$

L'insieme dei complessi si denota Â. Il sottoinsieme dei complessi a parte immaginaria nulla si identifica con l'insieme dei numeri reali Ñ. I complessi a parte reale nulla si dicono numeri immaginari o numeri immaginari puri.

Nel campo complesso Â sono definite la usuali quattro **operazioni** + - · / le cui regole di calcolo sono una logica estensioni delle corrispondenti nel campo reale :

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

$$(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$$

$$(a + jb) \cdot (c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

$$(a + jb) / (c + jd) = (a + jb) \cdot (c - jd) / (c \cdot c + d \cdot d)$$

L'ultima relazione è particolarmente utile nel caso si voglia separare parte reale e parte immaginaria, moltiplicando numeratore e denominatore per *(c - jd)*, tale operazione è anche chiamata *razionalizzazione:*

$$\frac{(a+jb)}{(c+jd)} = \frac{(a+jb)}{(c+jd)}\frac{(c-jd)}{(c-jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{\left(c^2+d^2\right)} = \frac{(ac+bd)+j(bc-ad)}{\left(c^2+d^2\right)} = \frac{(ac+bd)}{\left(c^2+d^2\right)} + j\frac{(bc-ad)}{\left(c^2+d^2\right)}$$

---

1 In matematica la notazione usuale è $z = a + ib$, ma in Elettrotecnica *i* si usa per indicare la *corrente elettrica*

Due numeri complessi $z_1=a_1+jb_1$ e $z_2=a_2+jb_2$ sono uguali se: $a_1=a_2$ e $b_1=b_2$.

Il numero complesso :

$$z^*=a-jb$$

si chiama **complesso coniugato** di $z=a+jb$.

Valgono le seguenti relazioni:

(i) $z+z^*=2a$ da cui segue $Re\{z\}=(z+z^*)/2$

(ii) $z-z^*=2jb$ da cui segue $Im\{z\}=(z-z^*)/2$

(iii) $(z^*)^*=z$

(iv) $(z_1+z_2)^*=z_1^*+z_2^*$

(v) $(z_1 \cdot z_2)^*=z_1^* \cdot z_2^*$

(vi) $z=z^*$ $\leftrightarrow$ *z***æÑ**

Di un numero complesso $z=a+jb$ si definisce il **modulo** o **valore assoluto** |z| in modo che :

$$|z|=|a+jb|=\sqrt{a^2+b^2}$$

ovvero:

$$|z|^2=a^2+b^2=(a+jb)\cdot(a-jb)=z\cdot z^*$$

Se il numero è reale (parte immaginaria = 0) il modulo coincide ovviamente con quello definito nel campo reale.

Valgono le seguenti relazioni:

(i) $|z|=|z^*|$

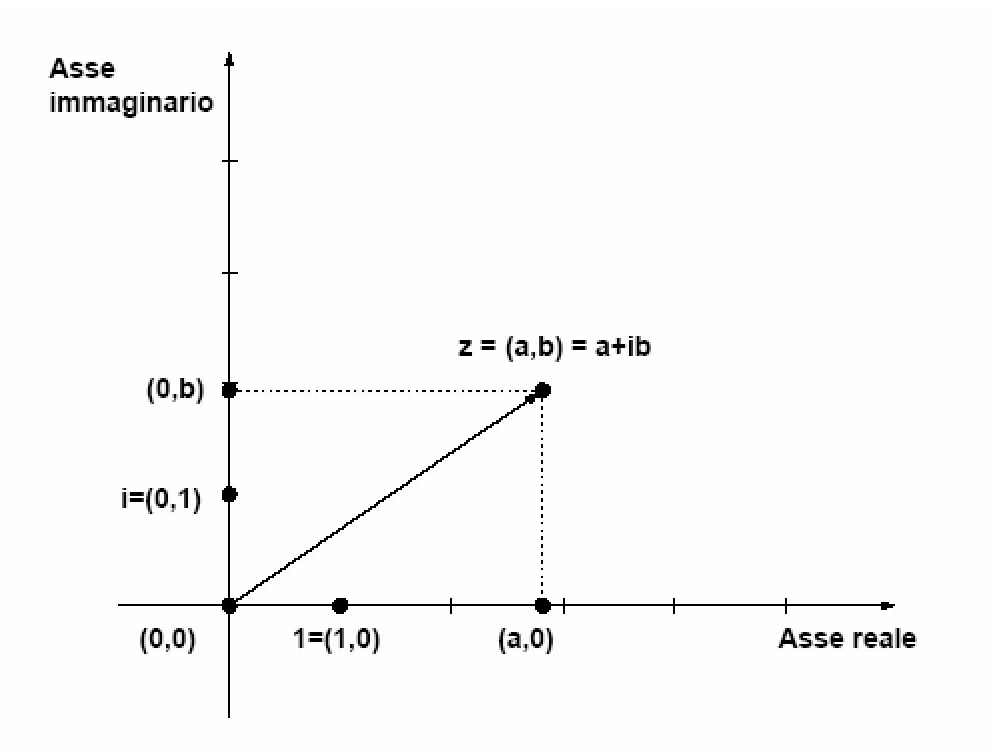
(ii) $|z|=0$ $\leftrightarrow$ $a^2+b^2=0$ $\leftrightarrow$ $a=0, b=0$ $\leftrightarrow$ $z=0$

(iii) $|z_1 \cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

(iv) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

Rappresentazione geometrica dei numeri complessi.

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con assi x e y, il numero complesso $z = a + jb$ può essere rappresentato come un vettore e i numeri reali *a* e *b* si possono interpretare rispettivamente come ascissa e ordinata del vertice del vettore.
Il piano in cui rappresentare i numeri complessi in forma algebrica è detto **piano di Gauss**.



Viene così stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e i numeri complessi. L'asse delle ascisse viene chiamato asse reale e quello delle ordinate asse immaginario. Dal punto di vista geometrico il modulo $|z|$ di un numero complesso rappresenta la distanza del punto *z* dall'origine, ovvero la lunghezza del vettore.

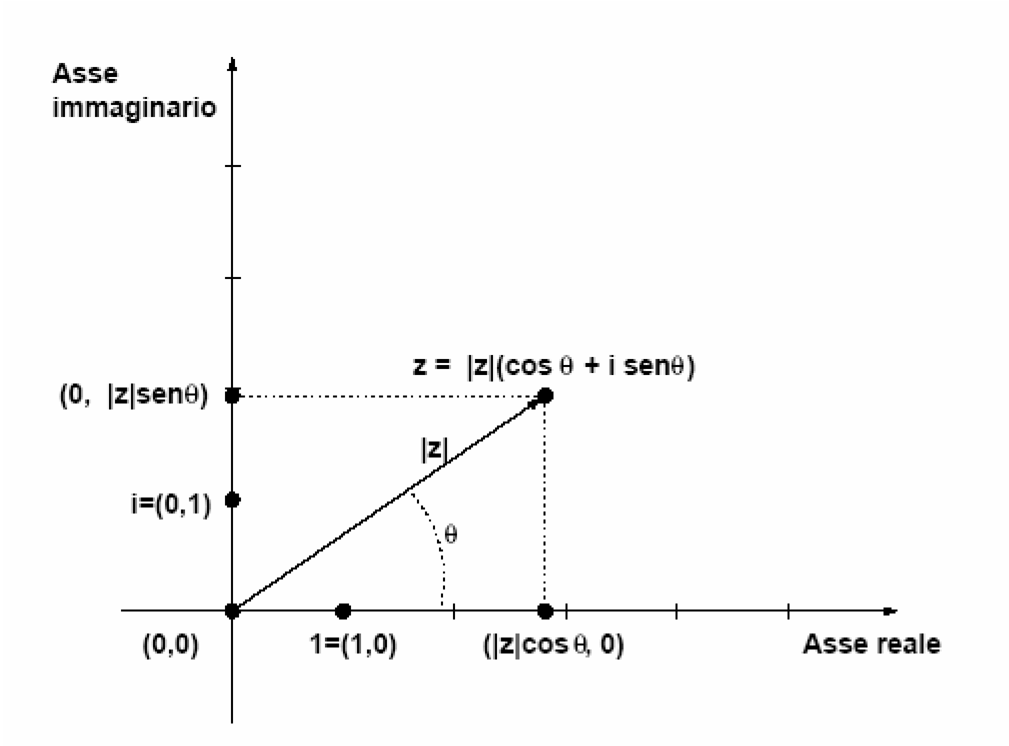
Se la parte immaginaria di un numero complesso è nulla, il numero è reale e si trova posizionato sull'asse delle ascisse. Se, invece, la parte reale è nulla, il numero è immaginario e si trova posizionato sull'asse delle ordinate.

Rappresentazione polare dei numeri complessi.

Sia z un numero complesso scritto nella forma algebrica $z=a+jb$ con *a,b*œÑ . Indichiamo con ρ il modulo di z e con θ l'angolo che il segmento individuato dall'origine e dal punto di coordinate *(a,b)* forma con l'asse *x*. ρ e θ prendono il nome di coordinate polari:

$\rho = |z|$ ***modulo*** di z

$\theta = arg(z)$ ***argomento*** di z



Valgono le seguenti proprietà:

$a = \rho\cos\theta$

$b = \rho\sin\theta$

o analogamente:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(b/a) & a > 0 \\ +\dfrac{\pi}{2} & a = 0, b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & a = 0, b < 0 \\ \arctan(b/a) \pm \pi & a < 0 \end{cases}$$

da cui segue la rappresentazione polare di z:

$z = a + jb = \rho\cos\theta + j\,\rho\sin\theta$

ovvero:

$$z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$$

Il passaggio dalla rappresentazione cartesiana a quella polare richiede maggior attenzione. Mentre il modulo è univocamente determinato, *l'argomento è determinato a meno di multipli interi di 2π*. Tenendo costante ρ e aumentando θ di 2π si individua sempre lo stesso numero complesso, in quanto viene completato un giro sulla circonferenza di raggio ρ tornando al punto di partenza.

La moltiplicazione di due numeri complessi espressi in forma trigonometrica diventa particolarmente significativa:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 (\cos\theta_1 + j\sin\theta_1) \cdot \rho_2 (\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$$

che fornisce:

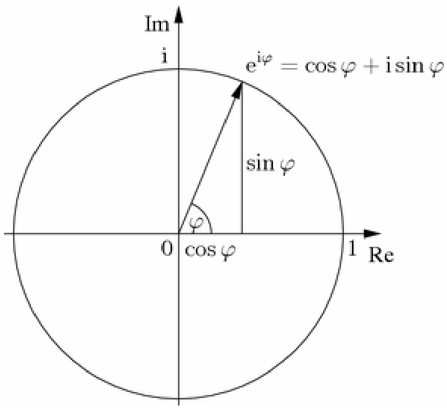
$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

quindi i moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano.

Analogamente il risultato della divisione tra due numeri complessi ($z_2 \neq 0$) espressi in forma trigonometrica sarà:

$$z_1 / z_2 = (\rho_1 / \rho_2)(\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

Rappresentazione esponenziale dei numeri complessi.



Facendo formalmente la serie di Taylor di $e^{j\theta}$ di $\cos\theta$ e $\sin\theta$, si ricava la *formula di Eulero*[2]:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

per cui vale, dalla periodicità di $\cos\theta$ e $\sin\theta$, $e^{j\theta} = e^{j(\theta + 2k\pi)}$.

La figura a lato mostra l'interpretazione geometrica della formula di Eulero sul piano complesso.

E per $\theta = \pi$ si ottiene l'equazione, trovata anch'essa da Eulero: $e^{j\pi} + 1 = 0$.

La rappresentazione polare di un numero complesso z può essere scritta nella seguente forma:

---

[2] da cui anche le relazioni: $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}; \quad \cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$

$$z = \rho\, e^{j\theta} = |z|\, e^{j\arg(z)}$$

dove θ è anche chiamata ***fase*** del numero complesso z.

E per il coniugato si ottiene:

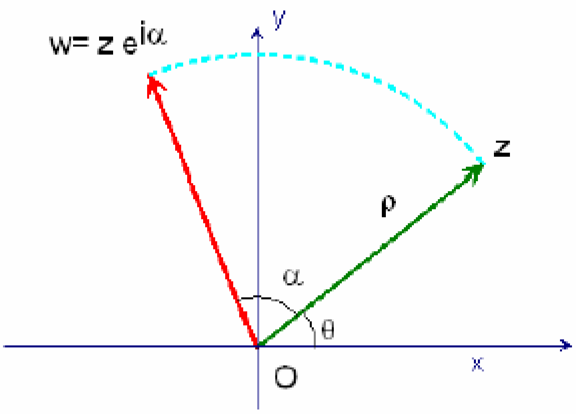
$$z^* = a - jb = \rho(\cos\theta - j\sin\theta) = \rho\, e^{-j\theta} = |z|\, e^{-j\arg(z)}$$

Il prodotto e la divisione tra due numeri complessi si calcolano molto agevolmente usando la rappresentazione polare:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\, e^{j(\arg(z_1) + \arg(z_2))}$$

$$z_1 / z_2 = (|z_1| / |z_2|)\, e^{j(\arg(z_1) - \arg(z_2))}$$

Dato un numero complesso $z = \rho\, e^{j\theta}$, possiamo dare una interpretazione geometrica al prodotto $ze^{j\alpha}$. Si ottiene: $ze^{j\alpha} = \rho\, e^{j\theta} e^{j\alpha} = \rho\, e^{j(\theta+\alpha)}$. Tale moltiplicazione, come si vede dalla figura seguente, determina una rotazione del vettore che rappresenta il numero complesso z, di un angolo α in senso antiorario (se >0).



Si può dunque pensare al numero complesso $e^{j\alpha}$ come un operatore che determina una rotazione attorno all'origine di un angolo α . Questo significato della moltiplicazione per un numero complesso di modulo unitario è particolarmente utile nelle applicazioni dei numeri complessi. È facile allora spiegare l'equazione $e^{j\pi}+1=0$. Il numero complesso $e^{j\pi}$ rappresenta la rotazione del vettore 1 di un angolo π. Si ottiene dunque il numero complesso -1.

Generalizzando la rappresentazione esponenziale si definisce, con $z=a+jb$ numero complesso:

$$e^z = e^{a+jb} = e^a\, e^{jb} = e^a(\cos b + j\sin b)$$

dove e^{jb} è un numero complesso a modulo unitario e fase b, pertanto la fase del numero complesso e^z è data dalla parte immaginaria di z, mentre il modulo è dato da e^a , con a parte reale di z.

Potenze e radici intere di numeri complessi (Formula di de Moivre):

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos(n\,\theta) + j\sin(n\,\theta)$$

Sia $z = \cos\theta + j\sin\theta$, con $|z|=1$, assumendo valide le proprietà della funzione esponenziale per l'elevamento a potenza anche nel campo complesso otteniamo la proposizione in maniera semplice:

$$z^n = (e^{j\theta})^n = e^{j\theta n} = \cos(n\,\theta) + j\sin(n\,\theta)$$

In generale per $z = \rho\, e^{j\theta}$ si ha: $z^n = (\rho\, e^{j\theta})^n = \rho^n\, e^{j\theta n} = \rho^n\,(\cos(n\,\theta) + j\sin(n\,\theta))$

Viceversa, la radice n-esima di z è data da:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n} + j\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

La radice così ottenuta è la radice principale. Va però osservato che, per la periodicità di seno e coseno, qualunque fase

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} \qquad \{k = 0,1,2,\ldots,n-1\}$$

genera una radice, in quanto moltiplicando per n tali valori si ottengono argomenti che producono uguali valori per il seno e il coseno.

In definitiva

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \qquad \{k = 0,1,2,\ldots,n-1\}$$

o in forma esponenziale:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{j\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \qquad \{k = 0,1,2,\ldots,n-1\}$$

Relazioni tra funzioni trigonometriche e iperboliche.

Definizione di funzioni trigonometriche:

$$\sin a = \frac{e^{ja} - e^{-ja}}{2j}; \quad \cosh a = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2}$$

Definizione di funzioni iperboliche:

$$\sinh a = \frac{e^{a} - e^{-a}}{2}; \quad \cosh a = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2}$$

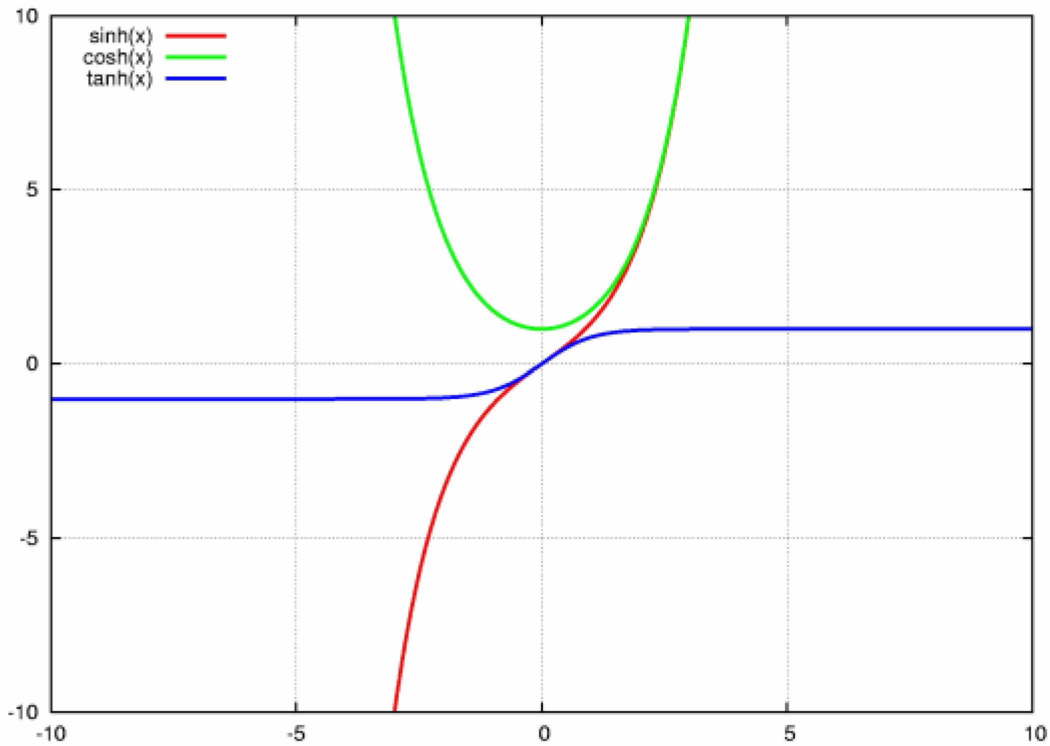
Valgono le seguenti relazioni:

(i) $$\sin ja = \frac{e^{j(ja)} - e^{-j(ja)}}{2j} = \frac{e^{-a} - e^{a}}{2j} = j \sinh a$$

(ii) $$\cos a = \frac{e^{j(ja)} + e^{-j(ja)}}{2} = \frac{e^{-a} + e^{a}}{2} = \cosh a$$

(iii) $$\sinh ja = \frac{e^{ja} - e^{-ja}}{2} = j\frac{e^{ja} - e^{-ja}}{2j} = j \sin a$$

(iv) $$\cosh ja = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2} = \cos a$$



Rappresentazioni equivalenti dei segnali sinusoidali.

Il segnale sinusoidale generale è la funzione:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Il segnate *x(t)* ammette altre due rappresentazioni equivalenti:

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

$$x(t) = Ce^{j\omega t} + C^{*}e^{-j\omega t}$$

Nelle applicazioni è spesso necessario passare da una all'altra di queste rappresentazioni.
Mentre ω rimane invariante gli altri coefficienti sono soggetti a vincoli: $(A,\ \phi)$œÑ×(π,- π] nella prima, (a,b) œÑ^2 nella seconda e CœÂ nell'ultima.

Impiego dei numeri complessi in Fisica e Ingegneria.

Every ***electric circuit*** that runs on an AC current (read: practically everything plugged in at home) relies on this kind of math. The capacitors, resistors, and inductors of an electric circuit each have a particular phase associated with them, and imaginary numbers make them *far* easier to sort out.

Quantum mechanics is a mathematical discussion of waves and wave functions, and all of the calculus used in QM makes imaginary numbers essential.

Lasers also depend on imaginary numbers, since laser beams are just lots of wave packets of light, all locked in the same phase.

In ***electronics***, the state of a circuit element is described by two real numbers (the voltage V across it and the current I flowing through it). A circuit element also may possess a capacitance C and an inductance L that (in simplistic terms) describe its tendency to resist changes in voltage and current respectively.
These are much better described by complex numbers. Rather than the circuit element's state having to be described by two different real numbers V and I, it can be described by a single complex number $z = V + i\,I$. Similarly, inductance and capacitance can be thought of as the real and imaginary parts of another single complex number $w = C + i\,L$.
The laws of electricity can be expressed using complex addition and multiplication.

Another example is ***electromagnetism***. Rather than trying to describe an electromagnetic field by two real quantities (electric field strength and magnetic field strength), it is best described as a single complex number, of which the electric and magnetic components are simply the real and imaginary parts.

So there's nothing physical about imaginary numbers, and there's no reason we *have* to use them. We can describe waves in many other ways. But imaginary numbers make the mathematics of waves come out so much more simply that they are indispensable in our modern research.