LOGICA E TEORIA DELL'INFORMAZIONE. DISPENSE

ANTONIO LEDDA
25 SETTEMBRE 2018

UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

antonio.ledda@unica.it.

Indice

At night, when all the world's asleep,
The questions run so deep
For such a simple man.
Won't you please, please tell me what we've learned
I know it sounds absurd
But please tell me who I am.
(The Logical Song, Supertramp, 1979)

1. Nozioni preliminari

1.1. **Insiemi.** In quanto segue, useremo un'idea di insieme, sostanzialmente, intuitiva. Forse, questo è un po' ingenuo, ma sarà sufficiente per il nostro discorso. Un *insieme* è una collezione di oggetti, i cui elementi si collocano tra le parentesi graffe: $\{\_\}$. La nozione fondamentale è quella di appartenenza: "$\in$". Se S è un insieme, $a \in S$ si legge "a appartiene a (o è un elemento di) S". Un insieme A è *sottoinsieme* di un insieme B se e solo se ogni elemento di A è elemento di B; questo si denota con il simbolo "$\subseteq$". Due insiemi sono il medesimo quando possiedono esattamente gli stessi elementi. Osserviamo che l'ordine, così come il numero di occorrenze, degli elementi che compaiono all'interno di un insieme è indifferente; esempio $\{a, b, c\} = \{c, a, b\} = \{a, a, a, a, a, b, b, c\}$. Un insieme senza elementi si dice *vuoto*, e si indica con $\varnothing$. Notiamo che esiste un unico insieme vuoto. Osserviamo che possiamo definire delle operazioni estremamente naturali tra insiemi. Siano A, B insiemi:

- $A \cup B$ è la loro unione: consta di tutti gli elementi comuni e non comuni ad A e B;
- $A \cap B$ è la loro intersezione: consta di tutti gli elementi comuni ad A e B;

Ora, consideriamo fissato un insieme S, che chiamiamo *universo del discorso*. Questo può variare a seconda dei contesti: in geometria piana, sarà l'insieme dei punti sul piano; in teoria dei numeri, saranno i numeri interi; in sociologia, sarà l'insieme degli uomini etc.. Sia $A \subseteq I$.

- $I \setminus A$ è il complemento di A relativo ad I: consta di tutti gli elementi che appartengono ad I ma non ad A.

Un insieme A ha *cardinalità* $n \in N$ (ove N indica l'insieme dei numeri naturali: interi positivi e zero, mentre con N^+ indicheremo l'insieme degli interi positivi senza lo 0) se può essere messo in *corrispondenza biunivoca* con il sottinsieme dei numeri naturali $\{1, \ldots, n\}$: ad ogni $a \in A$ viene assegnato uno, e un solo, elemento in $\{1, \ldots, n\}$. Un insieme di cardinalità n è detto *finito*. Un insieme è *infinito* quando non è finito. Detto in altri termini, quando può essere messo in *corrispondenza biunivoca* con un suo sottinsieme proprio. Un insieme è *numerabile* quando esiste una corrispondenza biunivoca tra questo e i numeri naturali (o, eventualmente, con un loro sottinsieme). Un insieme non è numerabile allorché questa corrispondenza non possa esistere.

Esercizio 1.

(1) Perché esiste un unico insieme vuoto?
(2) Fornire un esempio di insieme infinito.
(3) L'insieme N può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottinsieme proprio?
(4) Fornire un esempio di insieme non numerabile.
(5) C'è qualche relazione tra infinità e numerabilità?

1.2. **Relazioni e Funzioni.** Per quanto detto nella sottosezione precedente, osserviamo che l'insieme $\{a, b\}$ corrisponde a $\{b, a\}$: è una *coppia non ordinata*, così come $\{a, b, c\} = \{a, c, b\}$ è una terna non ordinata etc.. In caso l'ordine sia rilevante scriveremo (a, b), e chiameremo questo oggetto *coppia ordinata*, analogamente per una terna ordinata etc.. Nota che $(a, b) \neq (b, a)$. Infatti: $(a, b) = (c, d)$ sse $a = c$ e $b = d$. Una *relazione binaria* è un insieme di coppie ordinate. Talvolta, se R è una relazione binaria, scriveremo aRb, al posto di $(a, b) \in R$, per indicare che a è nella relazione R con b. Un simile ragionamento può essere esteso a relazioni n-arie, $n \in N^+$. Una *funzione in un argomento*, o *unaria*, $f : P \to Q$ dall'insieme P all'insieme Q è una regola che assegna ad ogni elemento di P *al più* un elemento di Q. Una funzione $f : P \to Q$ tale che, per $a \neq b$ in P, $f(a) \neq f(b)$ è detta *iniettiva*. Se invece, per ogni $p \in P$, esiste un $a \in A$ tale che $f(a) = p$, f è detta *suriettiva*. Infine, una funzione $f : P \to Q$, che ad ogni $a \in P$ assegni un $b \in Q$ è detta *totale*. Ora che possediamo questi concetti, possiamo vedere che una corrispondenza biunivoca (o una *biezione*) non è altro che una funzione totale che è sia iniettiva, sia suriettiva.

Esercizio 2. (1) Tutte le funzioni sono relazioni?

(2) Tutte le relazioni sono funzioni?

(3) Se non tutte le relazioni sono funzioni, fornire un esempio di una relazione che non sia una funzione.

(4) Trovare un esempio di funzione iniettiva e non suriettiva.

(5) Trovare un esempio di funzione suriettiva e non iniettiva.

(6) Trovare un esempio di funzione totale che non sia né iniettiva né suriettiva.

1.3. **Principio di Induzione Matematica.** Prima di introdurre il principio di induzione, permettiamoci un breve racconto.

Una certa persona era, a tutti i costi, alla ricerca dell'immortalità. Però, seppure avesse consultato tanti libri occulti, mai era stato vicino a realizzare il suo desiderio. Un giorno, arrivò all'orecchio di quest'uomo la notizia che vi era un vecchio eremita in un'alta montagna in grado di rendere le persone immortali. Il nostro, allora, fece in modo di organizzare una spedizione e, dopo 12 mesi di viaggio per lande ostili e impervie, giunse alla capanna dell'eremita. Appena lo vide, senza attendere neppure un istante, domandò: "È davvero possibile vivere per sempre?". "Facilissimo", rispose il saggio, "a patto che tu faccia due cose." "Quali sono?" replicò il visitatore con visibile brama. "La prima è che in futuro dovrai dire solamente cose vere. Mai, e ripeto mai, potrai pronunciare una frase falsa. Mi sembra un prezzo equo per l'immortalità!". "Certo che sì!" replicò, rinvigorito, l'uomo, "e la seconda condizione?", aggiunse ansiosamente. "La seconda", disse il saggio, "consiste nel pronunciare in questo preciso istante 'Io ripeterò questa frase domani'. Se farai queste due semplici cose, hai la mia parola che vivrai in eterno!". A quel punto il visitatore, con manifesto disappunto, rivolse all'eremita queste parole: "Certo che se farò queste due cose vivrò per sempre! Se ora dico veritieramente 'Io ripeterò questa frase domani', e in futuro pronuncerò solo frasi vere, allora ripeterò questa frase ogni giorno, per l'eternità! Ma come posso essere sicuro di ripetere la frase domani, se non so se sarò *vivo* domani? No, la tua soluzione non è pratica!". "Oh" disse il saggio "tu cercavi una soluzione *pratica*! Mi spiace, ma hai sbagliato persona, allora. Non son dedito alla pratica, ma bensì alla teoria."

Il *principio d'induzione matematica* (*PI*) è il seguente:

Se una proprietà P vale per il numero 0, e, se P vale per $n \in N$, allora P vale per $n+1$, allora P vale per ogni numero naturale.

Osserviamo che il principio d'induzione matematica è equivalente al *principio d'induzione matematica completo* (PIC): se una proprietà P vale per il numero 0, e, se P vale per ogni $n \leq n+1$, allora P vale per $n+1$, allora P vale per ogni numero naturale.

Dimostriamo l'equivalenza dei due principi. Da un lato, è banale il fatto che, se una proprietà viene dimostrata attraverso il principio d'induzione matematica (PI), allora la medesima proprietà si dimostra attraverso il principio d'induzione completa (PIC), la prova di questa banalità è lasciata come esercizio. Vediamo che anche il viceversa è vero.

Teorema 3. Se una proprietà viene dimostrata attraverso il principio d'induzione matematica completa, allora la medesima proprietà è dimostrabile attraverso il principio d'induzione matematica.

Dimostrazione. Supponiamo che una proprietà R sia dimostrabile attraverso PIC. Mostreremo che R è dimostrabile attraverso PI. Definiamo la proprietà $S(n)$ così: "la proprietà R vale per ogni numero naturale minore o eguale a n ". Dimostriamo S per induzione matematica.

(Base) $n = 0$. La proprietà $S(0)$ recita così: "la proprietà R vale per ogni numero naturale minore o eguale a 0", i.e. "la proprietà R vale per lo 0". Ora, per ipotesi, R è dimostrabile attraverso PIC. Perciò, per la base del PIC, è vero che la proprietà R vale per lo 0.

(Passo induttivo) Supponiamo che la proprietà $S(n)$ sia soddisfatta, mostreremo che ciò avviene anche per $S(n+1)$. Dal fatto che la proprietà $S(n)$ sia soddisfatta, traducendo, abbiamo che la proprietà R vale per ogni numero naturale minore o eguale a n. Ma questo, per PIC, implica che la proprietà R valga per $n+1$. *Quod erat demonstrandum*! $\square$

Vediamo, brevemente, alcune notevoli e assai famose applicazioni dei principi di induzione. Infatti il Teorema 4 e il Teorema 5 sono chiarissime applicazioni del principio d'induzione e del principio d'induzione completa, rispettivamente.

Teorema 4 (Gauss)**.** Per ogni $n \in N$, la somma $1 + \cdots + n$ è eguale a $\frac{n(n+1)}{2}$.

Dimostrazione. Dimostreremo l'enunciato per induzione su N.
(Base dell'induzione) Sia $n = 1$. Allora, la somma di tutti i numeri naturali che precedono 1 sarà, ovviamente, 1, così come $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

(Passo dell'induzione) Supponiamo che $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Il nostro obbiettivo è dimostrare che la formula è valida anche per $n + 1$. Per ipotesi d'induzione abbiamo detto che $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Perciò, possiamo sommare $n+1$ ad entrambi i membri della precedente equazione. Otteniamo così

$$1 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1).$$

Notiamo che, mettendo in evidenza nel secondo membro della precedente equazione,

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = (\frac{n}{2} + 1)(n + 1).$$

Svolgendo la somma tra frazioni: $(\frac{n}{2}+1)(n+1) = (\frac{n+2}{2})(n+1)$. Svolgendo la moltiplicazione tra frazioni, e commutando, otteniamo:

$$(\frac{n+2}{2})(n + 1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Perciò,

$$1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

Il Teorema 5 è di un'importanza cruciale. Difatti, è noto come il Teorema fondamentale dell'Aritmetica.[1] La sua dimostrazione è da accreditarsi storicamente ad Euclide, seppure la prova che forniremo sia quella proposta da Gauss.

Teorema 5 (Euclide)**.** Ogni numero naturale ammette una fattorizzazione prima.

Dimostrazione. Dimostreremo l'enunciato per induzione completa su N.
(Base dell'induzione) Consideriamo il primo naturale maggiore dell'unità: il 2. Questo è un numero primo. Quindi non abbiamo nulla da dimostrare.

(Passo dell'induzione) Supponiamo che, per ogni numero naturale m strettamente minore di n, m ammetta una fattorizzazione prima. Osserviamo che n può essere o non essere un numero primo. In caso n sia un numero primo non abbiamo nulla da dimostrare: la sua fattorizzazione prima consta solamente di sé stesso. Invece, qualora n non fosse un numero primo, esiste un $h < n$ tale che $\frac{n}{h} = k$. Ovvero, $n = hk$. Notiamo anche che $k < n$: n è un multiplo di k. Ora per l'ipotesi d'induzione completa h, k ammettono una fattorizzazione prima. Abbiamo quindi che $h = a_1 \cdot \ldots \cdot a_i$ e $k = b_1 \cdot \ldots \cdot b_j$. Ma allora

$$n = hk = a_1 \cdot \ldots \cdot a_i \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_j,$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

[1] Per essere precisi, quello che proveremo è solo la parte concernente l'esistenza della fattorizzazione, non l'unicità.

2. Alberi

Un primo concetto, fondamentale per quanto seguirà, è quello di albero

Definizione 6. Un *albero non ordinato* $\mathcal{T}$ è una collezione S di elementi (o punti dell'albero) che soddisfano le seguenti:

(1) a ciascun $x \in S$ può essere assegnato un numero naturale $l(x)$, detto il *livello di* x;

(2) su S è definita la relazione di *successore* (o di *predecessore*, come preferite!) R, ove xRy si legge x *precede* y (o y *succede a* x) che soddisfa le seguenti:

   (a) esiste un unico punto x_1 di livello uno che non ha predecessori. Questo punto si chiama *origine*;

   (b) ogni punto, eccetto l'origine, ha un unico predecessore;

   (c) dati due punti x, y di S, se xRy allora $l(y) = l(x) + 1$.

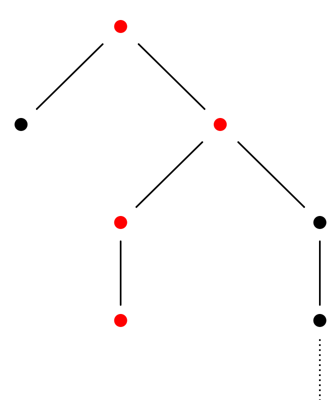
Un *punto* è detto

- *finale* se non possiede alcun successore;
- *semplice* se possiede uno ed un solo successore;
- *di giunzione* se possiede almeno due successori.

Inoltre:

- Un *cammino* è una sequenza numerabile di punti che contiene l'origine, non contiene punti distinti che abbiano il medesimo livello ed è tale che ogni punto della sequenza è il predecessore del seguente (a parte, eventualmente, l'ultimo).
- Un *cammino massimale* è un cammino che contiene un punto finale oppure un cammino infinito.

Esempio 7. Un albero ed un suo cammino:



Esercizio 8. Il cammino in rosso è massimale? Quali sono i cammini non massimali di questo albero?

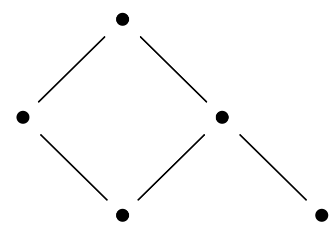
Esercizio 9. Dimostrare, attraverso le condizioni della relazione di successore, che, per ogni $x \in S$, esiste un unico cammino P_x il cui ultimo punto è x. (*Suggerimento*: dimostrare questo fatto per induzione sul livello di x.)

Diremo che un punto y che giace in P_x *domina* x. Se y è distinto da x diremo che *giace sopra* x (o che x *giace sotto* y).[2]

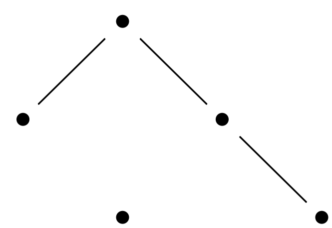
Esercizio 10. Gli alberi hanno la gradevole proprietà di poter essere disegnati! Un esercizio piacevole è provare a inventarne alcuni.

Esercizio 11. Quale dei seguenti è un albero?

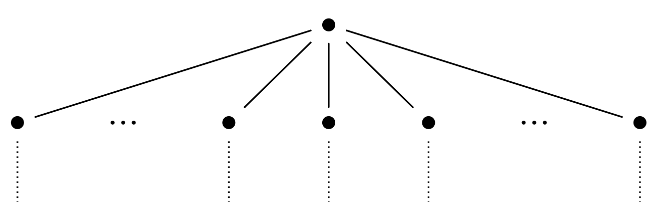
(1)



(2)

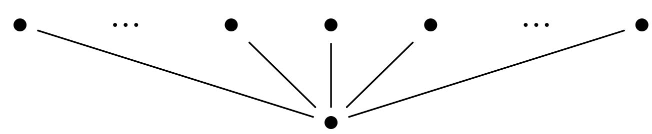


(3)

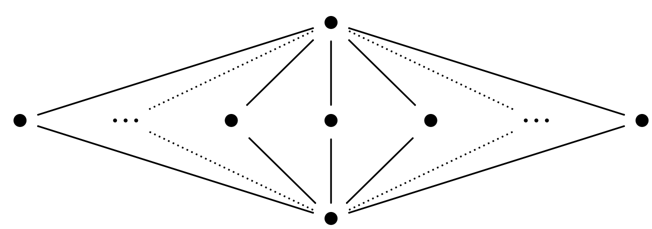


[2]Saremo piuttosto elastici nell'uso del linguaggio. Per brevità, talvolta, diremo che y *precede* x o che x *segue* y, etc..

(4)

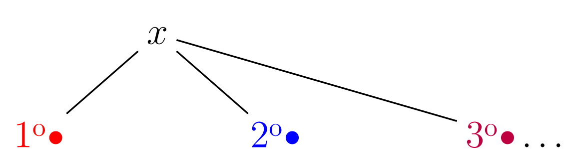


(5)



Definizione 12. Un *albero ordinato* è un albero non ordinato, tale che esiste una funzione φ che assegna ad ogni punto di giunzione x una sequenza che non contiene ripetizioni e che contiene tutti e soli i successori di x. Intuitivamente, φ numera *tutti e soli i successori di* x. Avrà quindi senso parlare del primo, secondo etc. successore di x.

Esemplificando:



Talvolta, avremo modo di "aggiungere nuovi punti" ad un punto finale di un albero. Questo non significa altro che estendere l'insieme dei punti dell'albero con nuovi elementi $y_1, ..., y_n, ...$ tali che, dato un qualche punto finale x, xRy_1, e, y_iRy_{i+1}.

Esercizio 13. Graficamente, cosa vuole dire aggiungere nuovi punti ad un punto finale di un albero?

Un albero è *finitamente generato* nel caso in cui ogni punto possieda un numero finito di successori.

Esercizio 14.
(1) Abbiamo incontrato esempi di alberi *non finitamente* generati?
(2) Fornire un esempio di albero finitamente generato.
(3) Fornire un esempio di albero non finitamente generato.
(4) Fornire un esempio di albero infinito finitamente generato.
(5) Possiamo trovare un esempio di albero non finitamente generato finito?

Enunciamo adesso, e dimostriamo, un risultato che ci sarà utile in futuro.

Lemma 15. **[Konig]** *Un albero finitamente generato $\mathcal{T}$, che contiene un numero infinito di punti, contiene necessariamente un cammino infinito.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{T}$ un albero finitamente generato, che contiene un numero infinito di punti. Chiamiamo *alto* un punto di $\mathcal{T}$ che giacia sopra un numero infinito di punti, e *basso* altrimenti. Poiché $\mathcal{T}$ è infinito e l'origine x_0 giace sopra ogni punto, allora il punto origine è alto. Notiamo che se un punto x è alto, allora ha un successore alto. Infatti, se tutti i suoi successori fossero bassi, allora dominerebbe un numero finito di punti. Perciò, x non sarebbe alto. Perciò, la sequenza che parte dall'origine possiede un successore alto x_1, il quale possiede un successore alto x_2 e così via. Ecco qui il cammino infinito: $(x_0, x_1, x_2 ...)$. □

3. Le formule della logica proposizionale

Per quanto riguarda la logica proposizionale useremo i seguenti 4 connettivi come primitivi:[3]

$\neg$	(not, negazione)
$\wedge$	(and, e, congiunzione)
$\vee$	(or, o, disgiunzione)
$\rightarrow$	(se allora, implicazione, condizionale)

Il primo connettivo è unario, i seguenti sono binari. Diremo che:

- in $\neg A$: A è una formula negata;
- in $A \wedge B$: A, B sono formule congiunte;
- in $A \vee B$: A, B sono formule disgiunte;
- in $A \rightarrow B$: A è la formula antecedente e B è la formula conseguente.

Oltre a questi simboli, useremo un insieme numerabile $p_1, ..., p_n, ...$ di *variabili proposizionali* (a volte anche q, r etc.. Quando non v'è rischio di confusione, per brevità, talvolta diremo semplicemente *variabile* anzichè variabile proposizionale) e tutte le parentesi che ci servono.[4]

[3] In realtà, come vedremo, sono sufficienti solamente $\rightarrow$ e $\neg$ per definire ogni altro connettivo della logica proposizionale.

[4] In letteratura si trovano diverse maniere di indicare i connettivi logici. Ad esempio, talvolta, il not viene indicato con $\sim$ e l'implicazione con $\supset$. È una questione di gusti, e, come spesso capita, di tradizioni.

Convenzionalmente, assumiamo che

- $\neg$ leghi più forte di ogni altro connettivo;

- $\wedge$ e $\vee$ leghino allo stesso modo, e più forte di $\to$.

Consistentemente con quanto stipulato ometteremo le parentesi non necessarie.

Esemplificando, grazie alle convenzioni di cui sopra, la scrittura

$$((\neg p) \wedge (\neg q)) \to (r \vee s)$$

si semplifica in

$$\neg p \wedge \neg q \to r \vee s.$$

Anche la seguente

$$((p) \wedge (p \vee q)) \vee (r \wedge s)$$

si semplifica in

$$(p \wedge (p \vee q)) \vee (r \wedge s)$$

Possiamo ora introdurre la nozione di *formula*:

Definizione 16.

(1) Le variabili proposizionali sono formule;

(2) Se A è una formula, allora $\neg A$ è una formula;

(3) Se A, B sono formule, allora lo sono $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$.

Notiamo che a ciascuna formula possiamo assegnare un'unica, a meno di permutazioni (che significa "a meno di permutazioni"?), sequenza di formazione tale che: ciascun passo della sequenza è o una variabile proposizionale o della forma $\neg A$, oppure $A \wedge B$, oppure $A \vee B$, oppure $A \to B$.

Esempio 17. La sequenza di formazione della formula $(p \to q) \to \neg r$ è:

(1) $(p \to q) \to \neg r$

(2) $p \to q$

(3) $\neg r$

(4) r

(5) p

(6) q

Una nozione importante è la seguente:

Grado di complessità di una formula. Sia X una formula. Il suo grado di complessità, indicato con $\#(X)$, è un numero naturale associato ad X come segue:

- Se X è una variabile proposizionale, allora $\#(X) = 0$;

- Se X è della forma $\neg Y$, allora $\#(X) = \#(Y) + 1$;

- Se X è della forma $Y \wedge Z$, allora $\#(X) = \#(Y) + \#(Z) + 1$;

- Se X è della forma $Y \vee Z$, allora $\#(X) = \#(Y) + \#(Z) + 1$;

- Se X è della forma $Y \to Z$, allora $\#(X) = \#(Y) + \#(Z) + 1$.

È facile osservare che, intuitivamente, il grado di complessità non è altro che una funzione che numera i connettivi all'interno di una formula. Per esempio, la complessità della formula

$$(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

si calcola come segue:

$$\begin{aligned}
\#((\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)) =& (\#(\neg p) + \#(q) + 1) + (\#(p) + \#(q) + 1) + 1 \\
=& (1 + 0 + 1) + (0 + 0 + 1) + 1 \\
=& 4.
\end{aligned}$$

Esercizio 18. Calcolare il grado di complessità delle seguenti:

(1) $p \rightarrow (p \vee q \rightarrow p)$;

(2) $(\neg\neg p \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \neg\neg p)$;

(3) $(p \rightarrow \neg(p \vee q)) \wedge p \rightarrow p \vee q$;

(4) $p \wedge (q \vee r) \rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

(5) $p \vee (\neg q \wedge p) \rightarrow p$.

Esercizio 19. Definire per induzione sul grado di complessità di una formula la nozione di sequenza di formazione.

Il seguente lemma mostra che ad ogni formula è associata una e una sola sequenza di formazione, a meno di permutazioni.

Lemma 20. [Decomposizione unica] *Ogni formula può essere formata in uno e un solo modo.*

Dimostrazione. Sia A una formula. È chiaro che A ammette una sequenza di formazione. Dimostriamo per induzione sulla complessità di A l'unicità della decomposizione. Sia A di complessità 0. Allora è una variabile proposizionale. Quindi non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo che l'enunciato valga per ogni formula di complessità minore ad n, $n \in N$, e sia A di complessità n. Sia $A = \neg B$. Allora, B ha complessità $n - 1$, quindi ammette un'unica decomposizione $B, B_1, ..., B_m$. Perciò $A, B, B_1, ..., B_m$ è l'unica decomposizione di A.

Esercizio 21. Completare la dimostrazione per i connettivi binari.

□

La seguente definizione sarà utile per sviluppare il nostro discorso:

Definizione 22. [**Sottoformula immediata di una formula**]

(1) Se X è una variabile proposizionale, allora non contiene sottoformule immediate;

(2) $\neg X$ ammette solamente X come sottoformula immediata;

(3) Le formule $X \wedge Y$, $X \vee Y$ e $X \rightarrow Y$ ammettono solamente X e Y come sottoformule immediate. In questi casi, X è la sottoformula immediata *sinistra* e Y è la sottoformula immediata *destra*.

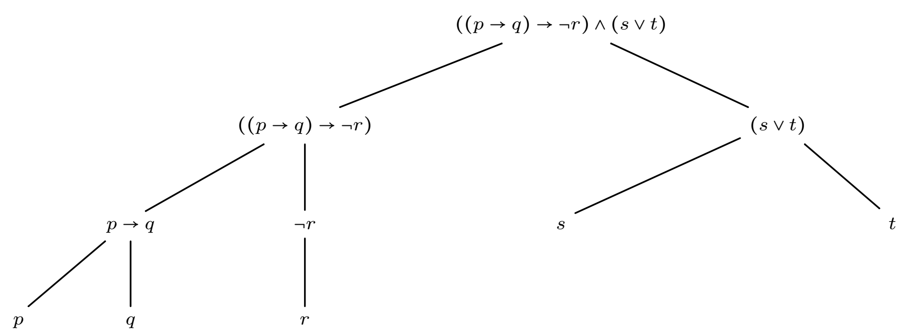
Dalla Definizione 22 ricaviamo la nozione di sottoformula. La formula X è *sottoformula* di Y se e solo se esiste una sequenza finita di formule che inizia con Y e termina con X tale che ogni formula nella sequenza è una sottoformula immediata della formula precedente nella sequenza.

Una formula che non contiene sottoformule immediate è detta *semplice* o *atomica*, altrimenti è *composta*.

Alberi e formule. Talvolta, può essere conveniente rappresentare la sequenza di formazione di una formula X attraverso *alberi diadici* (ossia, alberi i cui punti di giunzione ammettano *esattamente due successori*). Come possiamo vedere, questo è un processo molto naturale: come origine poniamo la formula X, e ogni nodo dell'albero che non è una variabile proposizionale precede esattamente le proprie sottoformule immediate.

L'esempio che segue in (6) chiarirà tutto.

(6)



4. Valutazioni Booleane e insiemi di verità

Consideriamo ora due nuovi simboli, detti *valori di verità*, $\top, \bot$ che chiameremo *vero e falso*, rispettivamente. Dato un insieme di formule S, diciamo che una funzione totale $v : S \to \{\top, \bot\}$ è *una valutazione* e che, per ogni $X \in S$, $v(X)$ è il *valore di verità* della formula X. Notiamo che, per una qualsiasi valutazione, X assume uno e un solo valore di verità.

Esercizio 23. Perché?

Concentriamoci ora sulle valutazioni definite *sull'insieme* For *di tutte le formule proposizionali* che considereremo in questo testo:

Definizione 24. Una valutazione v su For è *Booleana* sse:

(1) $\neg X$ riceve il valore $\top$ se X riceve il valore $\bot$; $\neg X$ riceve il valore $\bot$ se X riceve il valore $\top$;

(2) $X \wedge Y$ riceve il valore $\top$ se e solo se entrambe X e Y ricevono il valore $\top$, altrimenti riceve il valore $\bot$;

(3) $X \vee Y$ riceve il valore $\bot$ se e solo se entrambe X e Y ricevono il valore $\bot$, altrimenti riceve il valore $\top$;

(4) $X \rightarrow Y$ riceve il valore $\bot$ se e solo se X riceve il valore $\top$ e Y riceve il valore $\bot$, altrimenti riceve il valore $\top$.

Notiamo, brevemente, che la valutazione di una formula negata assume il valore inverso della formula che si nega. Il valore di una congiunzione assume il più piccolo tra i valori assegnati ai congiunti. Il valore di una disgiunzione assume il più grande tra i valori assegnati ai congiunti. Infine, il valore di una implicazione è falso se e solo se l'antecedente assume il valore vero e il conseguente il valore falso; questo equivale a dire che una implicazione assume il valore vero se e solo se il valore dell'antecedente è minore o equale al valore del conseguente. Pertanto, possiamo notare che qualora l'antecedente di un'implicazione assuma il valore falso, l'implicazione assumerà il valore vero, indipendentemente dal valore assunto dal conseguente. In altre parole, un'enunciato falso implica qualsiasi altro enunciato. Equivalentemente, se il conseguente di un'implicazione assume il valore vero allora il valore dell'implicazione sarà vero, indipendentemente dal valore assunto dall'antecedente. Questo tipo di implicazione è detto *implicazione materiale*. Per molti versi, questa nozione di condizionale può lasciare perplessi, seppure vi siano delle valide motivazioni sia matematiche sia filosofiche a sostegno.

Permettiamoci, a riguardo, un breve racconto.

> Un giovane rassicura la propria fidanzata: "Se la prossima estate avrò un lavoro, ti sposerò." Se il nostro, la prossima estate, troverà un lavoro e sposerà la sua fidanzata, allora avrà mantenuto la propria promessa. Ora, qualora il nostro non trovasse un lavoro e sposasse la fanciulla, difficilmente qualcuno potrà sostenere che egli abbia tradito la sua parola. Il caso interessante è quello in cui il ragazzo non abbia trovato lavoro e non abbia sposato la fidanzata. Avrebbe, in tal modo, rotto la sua promessa? Possiamo immaginare che la ragazza gli rinfacci "Mascalzone! Mi hai promesso che se la prossima estate avessi trovato un lavoro, mi avresti sposata! Invece, né hai trovato lavoro, né mi hai portata all'altare!". A questo il nostro potrebbe replicare "Ah no, mia cara! Ti ho promesso che *se* la prossima estate avessi trovato un lavoro, *allora* ti avrei sposata. Ma, dato che non ho trovato alcun impiego, non sono venuto meno alla parola data!". Possiamo dargli torto?

Notiamo anche che la nozione di implicazione materiale è responsabile del fatto che ogni proprietà P valga per tutti gli elementi di $\varnothing$. Difatti, affinché ciò sia il caso, dev'essere vero l'enunciato: *se* $x \in \varnothing$, *allora* x *ha la proprietà* P.

Da ora in poi, per quanto riguarda la logica proposizionale, *considereremo solo valutazioni Booleane*, che chiameremo semplicemente valutazioni, per brevità.

Data una formula X, diremo che due valutazioni v_1, v_2 *concordano su* X se $v_1(X) = v_2(X)$. Analogamente per un qualsiasi insieme di formule. Dati due insiemi di formule $S_1 \subseteq S_2$, e due valutazioni v_1, v_2 rispettive ad S_1, S_2 diremo che v_2 *estende* v_1 se v_1 e v_2 *concordano su* S_1, i.e. se $A \in S_1$, allora $v_1(A) = v_2(A)$.

Con il termine *interpretazione di una formula* X intenderemo una funzione che assegni (brevemente, *un'assegnazione di*) valori di verità alle sue variabili proposizionali. Analogamente per un qualsiasi insieme di formule. Notiamo che ogni interpretazione può essere estesa ad una e una sola valutazione Booleana.

Esercizio 25. **[Importante]** Perché ogni interpretazione può essere estesa ad una e una sola valutazione Booleana?

Infatti, data X una formula e v una sua interpretazione, si può dimostrare per induzione sulla complessità di X che esiste una e una sola maniera di assegnare dei valori di verità a tutte le sottoformule di X tale che tutte le sue sottoformule atomiche ricevano lo stesso valore di verità ricevuto da v, e tale che il valore di verità di ogni formula composta sia determinato dalle clausole in Definizione 24. Per dimostrare questo, immaginiamo di scomporre X nel suo albero di formazione, e di assegnare ai punti finali dell'albero – le variabili proposizionali di X, appunto – gli stessi valori di verità assegnati da v. Si vede immediatamente che, proseguendo all'insù nell'albero di formazione, tutte le sottoformule assumono, grazie alla Definizione 24, il medesimo valore di verità che assumono attraverso v; così è anche per la stessa X. Infatti, la stessa formula X riceve un valore di verità all'interno di questo processo: X è sottoformula di sé stessa.

- Se il valore che X riceve tramite v è $\top$ diremo che X *è vera* nell'interpretazione v;
- Se il valore che X riceve tramite v è $\bot$ diremo che X *è falsa* nell'interpretazione v.

Sia v un'interpretazione sull'insieme For di tutte le formule. Per il discorso precedente ogni elemento di For riceve un valore di verità tramite v. Chiaramente, v determina una valutazione Booleana v' sull'insieme For di tutte le formule, e v', ristretta alle variabili proposizionali, coincide con v. Detto questo, è evidente che ogni interpretazione induce una e una sola valutazione Booleana, e ogni valutazione Booleana induce una e una sola interpretazione. In altre parole, interpretazioni e valutazioni Booleane rappresentano il medesimo concetto. Questo è una aspetto importante della logica classica; lo è talmente tanto da essersi meritato il nome di *principio di composizionalità*:

Il valore di verità che una valutazione Booleana v assegna ad una formula A della logica proposizionale classica è completamente determinato dal valore di verità assegnato da v alle variabili proposizionali che sono sottoformule di A.

Definizione 26. Una *tautologia* è una formula che è vera per qualsiasi valutazione Booleana.

Equivalentemente, una tautologia è una formula che è vera per qualsiasi interpretazione su For. Una breve riflessione sulla nozione di tautologia crediamo sia utile. Le tautologie, secondo molti studiosi (e.g. H. Poincaré, L. Wittgenstein) sono delle *formule prive di significato*. Ossia, delle formule che sono vere per la loro forma logica senza dipendenza alcuna dal significato che si attribuisce alle variabili proposizionali. Pensiamo, per esempio, all'enunciato

(7) Mario passeggia o Mario non passeggia.

Possiamo notare che la locuzione in (7) è della forma $p \vee \neg p$. In virtù delle nostre convenzioni, per una qualsiasi valutazione Booleana v, $v(p) = \top$ se e solo se $v(\neg p) = \bot$ o viceversa. Pertanto, il valore di verità di $p \vee \neg p$ sarà sempre $\top$, poichè o p o $\neg p$ assumerà il valore $\top$. Notiamo che ciò avviene *indipendentemente dal significato* che si attribuisca alla variabile proposizionale p. La formula $p \vee \neg p$ è vera per via della sua forma logica.

Definizione 27. Una formula X è *soddisfacibile* se e solo se esiste almeno una valutazione Booleana per la quale X è vera. Analogamente per un qualsiasi insieme S di formule. Consistentemente, diremo che una valutazione *soddisfa* X e analogamente che *soddisfa* S.

Esercizio 28. Sia X una formula che contiene n variabili proposizionali. Quante possibili interpretazioni distinte possono esistere di X?

Sono concetti rilevanti quelli di conseguenza ed equivalenza.

Definizione 29. Una formula X è *conseguenza* di un insieme di formule S se ogni valutazione Booleana che soddisfa S soddisfa anche X.

Definizione 30. Due formule X, Y sono *equivalenti* se ogni valutazione che soddisfa X soddisfa anche Y e viceversa. O, in modo del tutto analogo, se X, Y sono conseguenza l'una dell'altra.

Talvolta, avremo modi di utilizzare la scrittura "$X \leftrightarrow Y$" (X se e solo se Y) come abbreviazione di $(X \to Y) \wedge (Y \to X)$. Useremo il simbolo $\simeq$ metalinguisticamente e scriveremo $X \simeq Y$ per denotare il fatto che le formule X, Y sono equivalenti, ossia che la formula $X \leftrightarrow Y$ è una tautologia.

Esercizio 31. Mostrare che una formula della forma $X \leftrightarrow Y$ è una tautologia se e solo se, per qualsiasi valutazione Booleana v, $v(X) = v(Y)$.

Insiemi di verità. La nozione di insieme di verità sarà un concetto chiave per lo sviluppo di tutto il nostro discorso. Sia v una valutazione Booleana. Consideriamo *l'insieme S di tutte le formule che sono vere per v*, ossia:

$$S = \{X \in For : v(X) = \top\}.$$

È un facile esercizio mostrare che S soddisfa le seguenti condizioni:

(S1) Per ogni $X \in For$, uno ed uno solo degli elementi di $\{X, \neg X\}$ appartiene ad S;

(S2) $X \wedge Y$ appartiene ad S se e solo se sia X sia Y appartengono ad S;

(S3) $X \vee Y$ appartiene ad S se e solo almeno uno tra X e Y appartiene ad S;

(S4) $X \to Y$ appartiene ad S se e solo se $X \notin S$ oppure $Y \in S$.

Un insieme di formule che soddisfi le condizioni (S1), (S2), (S3), (S4) è detto un *insieme di verità*, o *saturato*.

Inoltre, non è difficile verificare che

Lemma 32. *Una funzione $v : For \to \{\bot, \top\}$ è una valutazione Booleana se e solo se l'insieme S di tutte le formule che sono vere per v è saturato.*

Dimostrazione. Sia S l'insieme di tutte le formule che sono vere per la valutazione Booleana v. Chiaramente, per ogni formula X: $v(X) \in \{\bot, \top\}$. Se $v(X) = \bot$, allora per la Definizione 24.(1) $v(\neg X) = \top$, e quindi $\neg X \in S$; dualmente se $v(X) = \top$. Le condizioni (S2), (S3), (S4) seguono banalmente dalla Definizione 24.

Esercizio 33. Concludere la dimostrazione provando il converso di quanto dimostrato. Ossia, se l'insieme S di tutte le formule che sono vere per v è saturato allora v è una valutazione Booleana.

□

Un connettivo binario C è detto *definibile* se esistono dei connettivi $C_1, ..., C_n$ ed una formula in due variabili, p, q, che usa solamente i connettivi $C_1, ..., C_n$, che è equivalente alla formula pCq.

Esercizio 34. **[Equivalenze e definibilità]** dimostrare:

(i) $\wedge$ è definibile da $\{\neg, \vee\}$;

(ii) $\vee$ è definibile da $\{\neg, \wedge\}$;

(iii) $\to$ è definibile da $\{\neg, \wedge\}$;

(iv) $\to$ è definibile da $\{\neg, \vee\}$;

(v) $\wedge$ è definibile da $\{\neg, \to\}$;

(vi) $\vee$ è definibile da $\{\neg, \to\}$.

5. Tableaux analitici

In questa sezione discuteremo un interessante algoritmo di decisione per la logica proposizionale (un sinonimo di "algoritmo" è "procedura"). Ossia un metodo effettivo e deterministico (i tableaux analitici, appunto) che permetta di determinare *tutte e sole le tautologie della logica proposizionale*. Prima di introdurli consentiamoci un'osservazione di carattere linguistico: tableaux è un termine francese, e plurale, che significa tavole. Il singolare è tableau.

Descrizione della procedura. Anzitutto ricordiamo che

Osservazione 35.

(1) X è vera sse $\neg X$ è falsa;

(2) X è falsa sse $\neg X$ è vera;

(3) $X \wedge Y$ è vera sse entrambe X e Y sono vere;

(4) $X \wedge Y$ è falsa sse almeno una tra X e Y è falsa;

(5) $X \vee Y$ è vera sse almeno una tra X e Y è vera;

(6) $X \vee Y$ è falsa sse entrambe X e Y sono false;

(7) $X \rightarrow Y$ è vera sse X è falsa o Y è vera;

(8) $X \rightarrow Y$ è falsa sse X è vera e Y è falsa.

Formule segnate. Arricchiamo ora il nostro linguaggio oggetto con due simboli T e F, che chiameremo *decorazioni*, e diciamo *segnata* o *decorata* una formula della forma TX o FX, ove X è una formula non-segnata (non contenente occorrenze di T o F). Intuitivamente, TX sta a rappresentare l'espressione "è vero che X", e FX l'espressione "è falso che X".

Convenzionalmente, assumeremo per comodità che le decorazioni non incrementino la complessità della formula su cui agiscono, i.e., per ogni $X \in For$, $\#(X) = \#(TX) = \#(FX)$. Estendiamo ora la nozione di valutazione Booleana alle formule decorate.

Definizione 36. Per una qualsiasi interpretazione v, stabiliamo che:

(1) la formula segnata $T(X)$ *è vera* se $v(X) = \top$,

(2) la formula segnata $T(X)$ *è falsa* se $v(X) = \bot$,

(3) la formula segnata $F(X)$ *è vera* se $v(X) = \bot$,

(4) la formula segnata $F(X)$ *è falsa* se $v(X) = \top$.

Talvolta, per convenienza notazionale, se non vi è possibilità di confusione, se X è una formula, ometteremo le parentesi e scriveremo TX o FX, invece di $T(X)$, $F(X)$, rispettivamente. In quanto segue, con un leggero, ma innocuo, abuso linguistico chiameremo TX, X *il coniugato* di FX, $\neg X$, rispettivamente, e viceversa.

Prima di descrivere esplicitamente la procedura dei tableaux, crediamo possa essere utile a stimolare la nostra intuizione proporre in Tabella 5 un esempio di tableau per la formula $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \to p \vee (p \wedge r)$.

$$
\begin{array}{lcccr}
(1) & & F((p \vee q) \wedge (p \vee r) \to p \vee (q \wedge r)) & & \\[2ex]
(2)|(1) & & T((p \vee q) \wedge (p \vee r)) & & \\[2ex]
(3)|(1) & & F(p \vee (q \wedge r)) & & \\[2ex]
(4)|(3) & & Fp & & \\[2ex]
(5)|(3) & & F(q \wedge r) & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
(6)|(5) & Fq & & Fr & (7)|(5) \\[2ex]
(8)|(2) & T(p \vee q) & & T(p \vee r) & (9)|(2) \\[2ex]
 & \lightning & & \lightning &
\end{array}
$$

Commenti al tableau in Tabella 5: Nel passo (1) dichiariamo falsa $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \to p \vee (q \wedge r)$; la nostra speranza è di giungere ad una contraddizione. Per l'Osservazione 35, deduciamo (2) e (3), notazionalmente indichiamo questo fatto con (2)|(1) e (3)|(1) (da ora in avanti il significato della scrittura $(n)|(m)$ sarà implicito: *dal passo in (m) deduciamo il passo in (n)*). Dal punto (5) è lecito dedurre che avvenga quanto al punto (6) o quanto al punto (7). Ora, da (2) deduciamo (8), ma nel cammino che da (1) porta a (8) abbiamo che è vero $(p \vee q)$, ma falsi entrambi p e q. Questa, per la Definizione 24, è una contraddizione (indicata con $\lightning$). Stessa cosa per il cammino che termina con il punto (9). Pertanto questo tableau ha tutti i cammini "chiusi": ognuno di essi porta a contraddizione. Quindi non si dà mai il caso che $F((p \vee q) \wedge (p \vee r) \to p \vee (q \wedge r))$ sia vera, pertanto lo sarà sempre $T((p \vee q) \wedge (p \vee r) \to p \vee (q \wedge r))$, e quindi la stessa $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \to p \vee (q \wedge r)$, per la Definizione 36.

Regole di costruzione dei tableaux. In forma schematica, le regole per la costruzione di un tableaux sono le seguenti.

$$(1) \qquad \frac{T(\neg X)}{F(X)} \qquad\qquad \frac{F(\neg X)}{T(X)}$$

$$(2) \qquad \frac{T(X \wedge Y)}{\begin{array}{c}T(X)\\T(Y)\end{array}} \qquad\qquad \frac{F(X \wedge Y)}{F(X)|F(Y)}$$

$$(3) \qquad \frac{T(X \vee Y)}{T(X)|T(Y)} \qquad\qquad \frac{F(X \vee Y)}{\begin{array}{c}F(X)\\F(Y)\end{array}}$$

$$(4) \qquad \frac{T(X \to Y)}{F(X)|T(Y)} \qquad\qquad \frac{F(X \to Y)}{\begin{array}{c}T(X)\\F(Y)\end{array}}$$

Commenti alle Regole di costruzione dei tableaux in Tabella 5:

(1) La prima regola in (1) dice che da $T(\neg X)$ si inferisce $F(X)$, dualmente la seconda.

(2) La prima regola in (2) dice che da $T(X \wedge Y)$ si inferisce sia $T(X)$ sia $T(Y)$, i.e. sono necessariamente vere sia X sia Y; la seconda che da $F(X \wedge Y)$ deriva che $F(X)$ oppure $F(Y)$, i.e. è falsa X oppure è falsa Y.

(3) La prima regola in (3) dice che da $T(X \vee Y)$ si inferisce che $T(X)$ oppure $T(Y)$, i.e. è vera X oppure è vera Y; la seconda regola in (3) dice che da $F(X \vee Y)$ si inferisce sia $F(X)$ sia $F(Y)$, i.e. sono necessariamente false sia X sia Y.

(4) La prima regola in (4) dice che da $T(X \to Y)$ si inferisce che $F(X)$ oppure $T(Y)$, i.e. è falsa X oppure è vera Y; la seconda regola in (4) dice che da $F(X \to Y)$ si inferisce $T(X)$ e $F(Y)$, i.e. necessariamente X è vera e Y è falsa.

Osservazione 37.
Come si evince dalle regole di costruzione dei tableaux, le formule segnate sono solo e soltanto di due tipi:

Tipo (A)

Le formule che hanno conseguenze *dirette*:

- $F(\neg X)$;
- $T(\neg X)$;
- $T(X \wedge Y)$;
- $F(X \vee Y)$;
- $F(X \to Y)$.

Tipo (B)

Le formule le cui conseguenze *biforcano* il tableau:

- $F(X \wedge Y)$;
- $T(X \vee Y)$;
- $T(X \to Y)$.

Notiamo che, seppure la procedura della costruzione dei tableaux sia deterministica, vi possono essere forme distinte, ma del tutto equivalenti, di sviluppare un tableau. Questo dipende dall'arbitrarietà nella scelta di utilizzare prima o dopo alcune regole rispetto ad altre. Nella pratica, conviene sempre utilizzare prima le regole con conseguenze dirette, e segnare via via le righe utilizzate nella costruzione.

(1)	$F((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$
(2)|(1)	$T(p \to (q \to r))$
(3)|(1)	$F((p \to q) \to (p \to r))$
(4)|(3)	$T(p \to q)$
(5)|(3)	$F(p \to r)$
(6)|(5)	Tp
(7)|(5)	Fr

(8)|(2)	Fp	(9)|(2)	$T(q \to r)$		
	$\lightning$ (6)	(10)|(4)	Fq		
			$\lightning$(4),(6)	(11)|(4)	

	Fp	(12)|(4)	Tq
	$\lightning$(6)		$\lightning$(6),(2),(7)

Esercizio 38. Trovare un tableau alternativo a quello in Tabella 5, che dimostri
$$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)).$$

Notiamo che il metodo dei tableaux analitici è efficace anche nel dimostrare che una formula X è conseguenza di un insieme finito di formule $X_1, \ldots, X_n$. In altri termini, possiamo dimostrare attraverso i tableaux che, data per assunta la verità delle formule $X_1, \ldots, X_n$, anche la formula X dovrà essere vera.

Per provare questo fatto, è sufficiente costruire un tableau che inizi con

$$\begin{array}{c} TX_1 \\ TX_2 \\ \vdots \\ FX \end{array}$$

e mostrare che il tableau è chiuso.

Equivalentemente, un'altra maniera per dimostrare, attraverso il metodo dei tableaux, che X è conseguenza di un insieme finito di formule $X_1, ..., X_n$, è provare che la formula $\neg(X_1 \wedge ... \wedge X_n) \to X$ è una contraddizione. Vediamo un esempio

$$\begin{array}{llcl} (1) & & Tp & \\ (2) & & T(p \to q) & \\ (3) & & Fq & \\ (4)|(2) & Fp & & Tq \\ & \lightning & & \lightning \end{array}$$

Esercizio 39. Dimostrare quanto detto qui sopra.

Una nuova notazione. Vedremo che, attraverso la notazione che a breve andremo a introdurre, nel dimostrare dei risultati *sul* sistema dei tableaux potremo prescindere da un buon numero di tediose ripetizioni.

Ricordiamo che una formula (vedi Osservazione 37) può essere solo e soltanto di due tipi: A e B.

Indicheremo genericamente con α e β una formula di tipo A e una formula di tipo B, rispettivamente.

Sia α una formula della forma discussa poc'anzi. Definiamo due formule α_1, α_2 come segue:

- Se $\alpha = T(X \wedge Y)$, allora $\alpha_1 = T(X)$ e $\alpha_2 = T(Y)$;

- Se $\alpha = F(X \vee Y)$, allora $\alpha_1 = F(X)$ e $\alpha_2 = F(Y)$;

- Se $\alpha = F(X \rightarrow Y)$, allora $\alpha_1 = T(X)$ e $\alpha_2 = F(Y)$;

- Se $\alpha = T(\neg X)$, allora $\alpha_1 = \alpha_2 = F(X)$;

- Se $\alpha = F(\neg X)$, allora $\alpha_1 = \alpha_2 = T(X)$.

Osservazione 40. Notiamo che, in virtù della Definizione 24, per ogni interpretazione, α è vera se e solo se entrambe α_1 e α_2 sono vere! Consistentemente (perché?), chiameremo una formula di tipo α *congiuntiva.*

Per ogni formula β di tipo B, definiamo due formule β_1, β_2 come segue:

- Se $\beta = F(X \wedge Y)$, allora $\beta_1 = F(X)$ e $\beta_2 = F(Y)$;

- Se $\beta = T(X \vee Y)$, allora $\beta_1 = T(X)$ e $\beta_2 = T(Y)$;

- Se $\beta = T(X \rightarrow Y)$, allora $\beta_1 = F(X)$ e $\beta_2 = T(Y)$.

Osservazione 41. Notiamo che, in virtù della Definizione 24, per ogni interpretazione, β è vera se e solo se almeno una tra β_1 o β_2 è vera! Consistentemente (perché?), chiameremo una formula di tipo β *disgiuntiva*.

Ricordiamo: abbiamo già stipulato che il grado di complessità di una formula segnata TX o FX è il grado della formula X (vedi pagina 19). Ovviamente, le variabili hanno grado 0, e le formule α_1, α_2 hanno grado strettamente minore di α, così come le formule β_1, β_2 hanno grado strettamente minore di β.

Come preannunciato, questa notazione si permetterà di semplificare notevolmente non tanto la costruzione dei tableaux, quanto le *dimostrazioni sul sistema dei tableaux*.

Esercizio 42. Che differenza c'è tra le dimostrazioni nel sistema dei tableaux e le dimostrazioni sul sistema dei tableaux?

In virtù delle convenzioni stipulate, possiamo osservare che tutte le regole di costruzione dei tableaux possono essere raggruppate in due formulazioni, o schemi, generali che, per conformità, chiameremo Schema A e Schema B.

(Schema A) $\dfrac{\alpha}{\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}}$ (Schema B) $\dfrac{\beta}{\beta_1 | \beta_2}$

Gli schemi (o regole) di tipo (A) estendono il tableau "in successione" aggiungendo sotto al punto α il punto α_1 e sotto di esso il punto α_2 (o viceversa: non cambia nulla!). Le regole di tipo (B) estendono il tableau "in parallelo" aggiungendo sotto al punto β i punti successori β_1 e β_2.

Ricapitoliamo nella seguente osservazione alcuni dei vari concetti incontrati sinora:

Osservazione 43. Possiamo osservare che un tableau per una formula X è semplicamente un albero *diadico* (i cui punti di giunzione ammettono *al più due* successori) la cui origine è la formula FX e i cui punti sono formule ottenute tramite le regole di tipo A o di tipo B. Più formalmente, sia $\mathcal{T}$ un tableau per X. Sia Y un suo punto finale. Allora possiamo *estendere* $\mathcal{T}$ attraverso le seguenti operazioni:

(A) Se una formula di tipo α occorre nel cammino P_Y, che termina con Y, possiamo aggiungere α_1 come successore di Y e α_2 come successore di α_1.

(B) Se una formula di tipo β occorre nel cammino P_Y, che termina con Y, possiamo aggiungere β_1 come primo successore di Y e β_2 come secondo successore di Y.

Per comodità, schematizziamo i seguenti concetti:

- Un tableau è *completo* se non può essere esteso, ossia tutte le regole sono state già applicate al suo interno.
- Un cammino di $\mathcal{T}$ è *chiuso* se contiene una formula FX e il suo coniugato TX.
- Un cammino di $\mathcal{T}$ è *aperto* se non è chiuso.
- Un tableau $\mathcal{T}$ è *chiuso* se tutti i suoi cammini lo sono.
- Infine, una *dimostrazione di una formula non segnata* X è un tableau chiuso $\mathcal{T}$ che abbia FX come origine.

A proposito dell'ultimo punto nello schema precedente, crediamo sia utile notare che un tableau chiuso per una formula FX indica, come vedremo, che FX è una contraddizione: nessuna valutazione Booleana la potrà mai soddisfare. Pertanto, ogni valutazione Booleana soddisferà TX e pertanto X medesima. Perciò questo comporta, per la definizione medesima, che X è una tautologia.

Insiemi di verità – nuova formulazione. Grazie alla notazione unificata di pagina 37, possiamo riformulare concisamente la nozione di insieme di verità che avevamo già visto a pagina 28:

Un insieme S di formule è detto un *insieme di verità* o *saturato* se e solo se soddisfa le seguenti 3 condizioni:

(S1′) Per ogni $X \in For$, uno ed uno solo degli elementi di $\{X, \neg X\}$ appartiene ad S;

(S2′) α appartiene ad S se e solo se sia α_1 sia α_2 appartengono ad S;

(S3′) β appartiene ad S se e solo almeno una tra β_1 e β_2 appartiene ad S.

Esercizio 44. Dimostrare col metodo dei tableaux che le seguenti formule sono dimostrabili col metodo dei tableaux:

(1) $p \to (q \to p)$;

(2) $p \wedge q \to q \wedge p$;

(3) $p \vee q \to q \vee p$;

(4) $p \wedge q \to p$;

(5) $p \to p \vee q$;

(6) $p \wedge \neg p \to q$;

(7) $p \to q \vee \neg q$;

(8) $p \to \neg\neg p$;

(9) $\neg\neg p \to p$;

(10) $p \wedge (p \to q) \to q$;

(11) $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$;

(12) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$;

(13) $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$;

(14) $(p \to q) \wedge (p \to r) \to (p \to q \wedge r)$;

(15) $(p \to r) \wedge (q \to r) \to (p \vee q \to r)$;

(16) $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$;

(17) $(\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge q)$;

(18) $p \vee (q \wedge r) \to (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;

(19) $p \wedge (q \vee r) \to (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

(20) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \to p \wedge (q \vee r)$.

6. Consistenza e Completezza del sistema dei tableaux

In questa sezione intendiamo dimostrare che il sistema dei tableaux permette di dimostrare tutte e sole le tautologie – equivalentemente, dimostra la falsità di tutte e sole le contraddizioni. Più specificamente, dimostreremo che il sistema è *consistente*: tutto ciò che dimostra sono tautologie, e che è *completo*: tutte le tautologie sono dimostrate dal sistema. Questi sono risultati importanti: mostrano, infatti, che il sistema dei tableaux "fa bene il suo dovere". In altre parole: i tableaux sono un sistema completamente adeguato per descrivere tutto e solo quello che è dimostrabile nella logica classica.

Consistenza.
Come prima cosa, vediamo agevolmente che il sistema dei tableaux dimostra *solamente* tautologie. Per comodità, fissiamo alcune convenzioni terminologiche:

Sia $\mathcal{T}$ un tableau e θ un suo cammino. Se esiste una valutazione v che verifichi tutte le formule di un cammino θ diremo che θ *è vero* (per una valutazione v). Diremo anche che tutto il tableau $\mathcal{T}$ *è vero* (per una valutazione v) se esiste un suo cammino θ che sia vero per una valutazione v.

Dimostriamo ora il seguente:

Teorema 45. Il sistema dei tableaux è consistente.

Dimostrazione. Procederemo a dimostrare questo teorema per contrapposizione: dalla falsità della tesi dimostreremo la falsità dell'ipotesi. Sia X una formula che non è una tautologia. Allora esiste una valutazione Booleana v tale che $v(X) = \bot$, ed equivalentemente $v(FX) = \top$

(vedi Definizione 36). Sia $\mathcal{T}$ un tableau la cui origine è FX. Dimostreremo per induzione sulla lunghezza dei cammini di $\mathcal{T}$, che esiste almeno un cammino di $\mathcal{T}$ che non è chiuso. La nostra strategia sarà quella di dimostrare che esiste una valutazione che verifichi tutte le formule di un cammino di $\mathcal{T}$: pertanto quel cammino non potrà essere chiuso, in quanto non può esistere alcuna valutazione che soddisfi una formula TY e il suo converso FY. La base dell'induzione è banale: un cammino di lunghezza 1 consiste solamente nell'origine, FX, pertanto non può essere chiuso. Sia θ un cammino vero per una valutazione v. Notiamo che il cammino θ può essere esteso tramite le regole di tipo A o di tipo B di pagina 39, oppure non può essere esteso. Se θ non può essere esteso, allora per ipotesi d'induzione θ è vero per una valutazione v. Quindi θ non può contenere una formula TY e il suo converso FY. Quindi θ non è chiuso. Qualora θ possa essere esteso, due casi sono possibili:

Caso (1). Supponiamo che θ possa essere esteso da una regola di tipo A. Siamo quindi in questa situazione

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \alpha \\ \hline \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array}$$

ove α è il punto finale di θ. In virtù dell'Osservazione 40, α è vera se e solo se lo sono α_1, α_2. Quindi se θ è vero per v, lo è anche la sua estensione tramite una regola di tipo A.

Caso (2). Supponiamo che θ possa essere esteso da una regola di tipo B. Siamo quindi in questa situazione

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \beta \\ \hline \beta_1 | \beta_2 \end{array}$$

ove β è il punto finale di θ. In virtù dell'Osservazione 41, β è vera se e solo se almeno una tra β_1 e β_2 è vera. Quindi l'estensione di θ tramite almeno una tra β_1 o β_2 è vera per v.

Abbiamo dimostrato per induzione quindi che, per ogni tableau $\mathcal{T}$, se esiste una valutazione Booleana v tale che $v(FX) = \top$, allora $\mathcal{T}$ ammette un cammino non chiuso, cioè $\mathcal{T}$ è vero per v. Equivalentemente: per ogni tableau $\mathcal{T}$, se ogni cammino di $\mathcal{T}$ è chiuso, allora, per ogni valutazione Booleana v, $v(FX) = \bot$, cioè X è una tautologia. In altri termini, il sistema dei tableaux è consistente. □

Completezza.

Discutiamo ora la questione inversa: ossia se sia vero che qualora X sia una tautologia, allora ogni tableau completo per FX è effettivamente chiuso. Come vedremo la questione della completezza è piuttosto delicata, e diverse nuove nozioni saranno opportune.

Estendendo i concetti in Osservazione 43, diremo che un cammino θ di un tableau è *completo* se tutte le seguenti condizioni sono soddisfatte

- per ogni formula α che occorre in θ sia α_1 sia α_2 occorrono in θ,
- per ogni formula β che occorra in θ almeno una tra β_1 o β_2 occorre in θ.

Inoltre, diremo che un tableau $\mathcal{T}$ è *completato* se ogni suo cammino è completo oppure chiuso.

Banalmente, notiamo che ogni tableau può essere completato. Osserviamo quindi la seguente:

Insiemi di Hintikka. Sia θ un cammino completo e *aperto* (equivalentemente: *non chiuso*) di un tableau $\mathcal{T}$ e S l'insieme delle formule in θ. Allora S soddisfa le seguenti:

(H1) Nessuna variabile segnata e il suo coniugato appartengono a S;

(H2) se α occorre in S sia α_1 sia α_2 occorrono in S;

(H3) se β occorre in S almeno una tra β_1 o β_2 occorre in S.

Diremo che un insieme che soddisfa (H1), (H2) e (H3) è un *insieme di Hintikka*, e chiameremo una sequenza finita di formule θ una *sequenza di Hintikka* se l'insieme delle sue formule è di Hintikka.

Osserviamo che è piuttosto immediato verificare che l'insieme delle formule di un cammino θ completo e non chiuso di un tableau sia di Hintikka. Infatti, (H1) segue dal fatto che θ non è chiuso. Mentre (H2) e (H3) derivano dal fatto che θ è completo.

Enunciamo ora, e dimostriamo, il seguente

Lemma 46. [Hintikka] *Ogni insieme di Hintikka è soddisfacibile.*

Dimostrazione. Sia S un insieme di Hintikka. Il nostro obiettivo è costruire una valutazione Booleana che lo soddisfi. Come sempre, la strada migliore è quella più semplice. Definiamo una valutazione v

come segue: per qualsiasi variabile p che occorra segnata in S:

$$v(p) = \begin{cases} \top, & \text{se } Tp \in S \\ \bot, & \text{se } Fp \in S \\ \top, & \text{se } Tp, Fp \notin S. \end{cases}$$

Notiamo come, in realtà l'ultimo caso nella definizione di v sia del tutto ininfluente. Difatti, se $Tp, Fp \notin S$, possiamo attribuire indifferentemente a p sia $\top$ sia $\bot$.

Notiamo che le Condizioni (i) e (ii) di cui sopra sono compatibili: dato che S è di Hintikka, per la Condizione (H1), *non contiene sia Tp sia Fp*. Dimostriamo ora per induzione sulla complessità delle formule che ogni elemento di S è soddisfatto dall'interpretazione appena definita. Se una formula ha complessità 0, allora è o la variabile segnata Tp o la variabile segnata Fp. Per come abbiamo costruito v, siamo a posto in entrambi i casi. Supponiamo che ogni formula in S di complessità $n > 0$ sia soddisfatta da v, e dimostriamo che ciò vale anche per ogni formula in S di complessità $n + 1$. Per definizione, se $X \in S$ e la sua complessità è maggiore a 0, necessariamente X è della forma α o della forma β. Discutiamo questi due casi:

(A) Se X è della forma α, allora per (H2) sia α_1 sia α_2 occorrono in S. Notiamo che α_1 sia α_2 hanno complessità minore di α. Per ipotesi d'induzione, sia α_1 sia α_2 sono verificate da v. Per l'Osservazione 40, anche α è soddisfatta da v.

(B) Se X è della forma β, allora per (H3) β_1 oppure β_2 occorre in S. Senza perdita di generalità supponiamo che β_1 appartenga a S. Notiamo che β_1 ha complessità minore di β. Per ipotesi d'induzione, β_1 è verificata da v. Per l'Osservazione 41, anche β è soddisfatta da v.

Questi due casi concludono la nostra induzione. Pertanto, ogni insieme di Hintikka ammette una valutazione che ne soddisfi tutte le formule. □

Osserviamo che la notazione unificata in α e β ci ha permesso di dimostrare il Lemma 46 considerando solamente due casi. Senza la notazione unificata i casi da considerare sarebbero stati 8!

Esercizio 47. Perché?

Teorema 48. Ogni cammino completo e aperto di un tableau è simultaneamente soddisfacibile.

Dimostrazione. Sia θ un cammino completo e aperto di un tableau $\mathcal{T}$ e sia S l'insieme delle formule in θ. Come notato a pagina 45, S è un insieme di Hintikka. Quindi, per il Lemma 46, S è soddisfacibile. □

A questo punto, abbiamo tutti gli ingredienti che ci servono per dimostrare il seguente:

Teorema 49. Per ogni tableau completo $\mathcal{T}$ che abbia FX come origine, se X è una tautologia, allora $\mathcal{T}$ è chiuso.

Dimostrazione. Se $\mathcal{T}$ non è chiuso, allora esiste un cammino θ di $\mathcal{T}$ aperto e completo, dato che $\mathcal{T}$ è completo. Per il Teorema 48, le formule in θ sono simultaneamente soddisfacibili. Perciò, anche FX è soddisfacibile. Pertanto, X non può essere una tautologia. □

Otteniamo, infine, come conseguenza del Teorema 49 il seguente:

Corollario 50. [Completezza dei tableaux analitici] Ogni tautologia è dimostrabile attraverso il metodo dei tableaux analitici.

Effettività. Se X non è una tautologia, la prova del Lemma di Hintikka 46 fornisce una procedura effettiva per costruire una valutazione v che falsifichi X. Vediamo come.

$$\begin{array}{ll}
(1) & F(p \to p \wedge q) \\
(2)|(1) & \boxed{\mathbf{Tp}} \\
(3)|(1) & F(p \wedge q)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|ll}
(4)|(3) & Fp & (5)|(3) & \boxed{\mathbf{Fq}} \\
 & \lightning & & \checkmark
\end{array}$$

Se consideriamo le assegnazioni riquadrate e in grassetto suggeriteci dal cammino aperto nel tableau in Tabella 6, e costruiamo una valutazione v definita da

$$v(p) = \top \text{ e } v(q) = \bot,$$

vediamo che $v(F(p \to p \wedge q)) = \top$, perciò $v(p \to p \wedge q) = \bot$. Come conseguenza, la formula $p \to p \wedge q$ non è una tautologia!

7. Il Teorema di Compattezza per la logica proposizionale

In questa sezione vedremo uno dei risultati più importanti, e più belli della logica proposizionale: il teorema di compattezza. Supponiamo che S sia un insieme *infinito e numerabile* di formule, tale che ogni suo sottoinsieme *finito* sia soddisfacibile, i.e. per ogni $S' \subset S$ (S' finito) esiste una valutazione v tale che, per ogni $X \in S'$, $v(X) = \top$. Da questo possiamo concludere che S stesso sia soddisfacibile, i.e. che esista una valutazione v tale che, per ogni $Y \in S$, $v(Y) = \top$? Come vedremo, il teorema di compattezza risponde positivamente a questa domanda. Qualcuno di voi, forse, si starà domandando che ha a che fare il termine "compattezza" con l'enunciato del teorema. La risposta è la seguente: è un termine preso in prestito dalla topologia. Infatti, uno spazio topologico è compatto se ogni sua copertura ammette una sottocopertura finita.

Chiamiamo un insieme (eventualmente) infinito e numerabile di formule S *consistente* se ogni sottoinsieme finito di S è soddisfacibile.

Equivalentemente, S è consistente se non può essere derivata da S attraverso il metodo dei tableaux alcuna contraddizione. Ossia: non esiste un sottoinsieme finito di formule $\{X_1, \ldots, X_n\}$ di S tale che un tableau per $T(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)$ sia chiuso. Alla luce della nozione di consistenza, la questione della compattezza può essere riformulata come segue: ogni insieme infinito e consistente è soddisfacibile?

Alternativamente, se nessuna contraddizione può essere derivata da S attraverso il metodo dei tableaux, esiste una valutazione Booleana che soddisfi simultaneamente tutte le formule in S? La risposta è appunto il teorema di compattezza per la logica proposizionale.

Osservazione 51. Prima di enunciare il teorema, notiamo alcuni fatti rilevanti in merito alla consistenza.

(1) Se S è un insieme di formule consistente, allora ogni suo sottoinsieme è consistente (perché?).

(2) Se S è un insieme di formule consistente, allora soddisfa le seguenti condizioni:

   (a) S non può contenere sia una variable proposizionale sia la sua negazione;

   (b) Se $S \cup \{\alpha\}$ è consistente, allora lo è anche $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$;

   (c) Se $S \cup \{\beta\}$ è consistente, allora lo è anche almeno uno tra $S \cup \{\beta_1\}$ oppure $S \cup \{\beta_2\}$.

Per quanto riguarda l'inconsistenza, notiamo quanto segue:

Osservazione 52.

(1) Se un insieme S è *inconsistente* (ossia: non consistente) allora ogni insieme di formule che lo contiene come sottoinsieme è inconsistente (perché?).

(2) Un insieme S che contiene sia una variable proposizionale sia la sua negazione è inconsistente;

(3) Se $S \cup \{\alpha_1\}$ oppure $S \cup \{\alpha_2\}$ è inconsistente, allora lo è anche $S \cup \{\alpha\}$;

(4) Se sia $S \cup \{\beta_1\}$ sia $S \cup \{\beta_2\}$ sono inconsistenti, allora lo è anche $S \cup \{\beta\}$.

Teorema 53. Ogni insieme consistente S è soddisfacibile.

Dimostrazione à la Hintikka. Dato che S è numerabile, possiamo disporre i suoi elementi in un elenco – o sequenza – numerato

$$(X_1, \ldots, X_n, \ldots).$$

Il nostro obiettivo è mostrare che questa sequenza può essere estesa ad un sequenza di Hintikka θ contenente, appunto, ogni X_i. Costruiremo questa sequenza induttivamente. Poco originalmente, iniziamo la nostra sequenza proprio con la formula X_1. Questo conclude la base della nostra costruzione induttiva. Supponiamo di avere costruito la sequenza sino al passo n. Abbiamo perciò ottenuto una sequenza $\theta_n = (X_1, \ldots, X_n)$. Consideriamo l'ultimo elemento di questa sequenza: la formula X_n. La formula X_n può essere della forma α, o della forma β, oppure può essere una variabile proposizionale. Ragioniamo caso per caso:

(i) Se X_n è della forma α, allora estendiamo la sequenza θ_n alla sequenza θ_{n+1} come segue:

$$\theta_{n+1} = (X_1, \ldots, X_n, \alpha_1, \alpha_2, X_{n+1}).$$

Nell'ordine, abbiamo esteso la sequenza θ_n con le formule $\alpha_1, \alpha_2, X_{n+1}$. Notiamo che, per la consistenza di S, l'insieme $\{X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}\}$ è consistente. Inoltre, per la Condizione (3) dell'Osservazione 52, se $(X_1, \ldots, X_n, \alpha_1, \alpha_2, X_{n+1})$ è inconsistente, allora lo è anche $(X_1, \ldots, \alpha, X_{n+1}) = (X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$. Ma questo è escluso dal fatto appunto che $\{X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}\}$ è consistente.

(ii) Se X_n è della forma β, allora per la Condizione (2) dell'Osservazione 51, almeno una tra $(X_1, \ldots, X_n, \beta_1, X_{n+1})$ e $(X_1, \ldots, X_n, \beta_2, X_{n+1})$ è consistente. In accordo con questo, definiamo la sequenza θ_{n+1}. Quindi, per la Condizione (3) dell'Osservazione 52, la sequenza $(X_1, \ldots, X_n, \beta_1, X_{n+1})$ oppure la sequenza $(X_1, \ldots, X_n, \beta_2, X_{n+1})$ sarà consistente. Se così non fosse, difatti, sarebbe inconsistente l'insieme $\{X_1, \ldots, X_n, \beta, X_{n+1}\}$, ma ciò è escluso, per ipotesi, dalla consistenza di S.

(iii) Se X_n è una variabile proposizionale, semplicemente poniamo $\theta_{n+1} = (X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$.

È chiaro che, per come è definita, θ_{n+1} soddisfa le Condizioni (H2) e (H3) a pagina 45. Per quanto riguarda la Condizione (H1), notiamo che ogni passo nella costruzione della sequenza θ_{n+1} è consistente con θ_n. Perciò, data la consistenza di S, non troveremo mai l'occorrenza di una variabile segnata e del suo coniugato. Pertanto, per ogni $n \in N$ la sequenza θ_n è di Hintikka, e perciò è soddisfacibile per il Lemma 46. Sia S_{θ_i} l'insieme di formule della sequenza θ_i e consideriamo

$$S' = \bigcup_{n \in N} S_{\theta_n},$$

Questo insieme è consistente perchè ogni θ_i è consistente. Se infatti non lo fosse, allora vi sarebbe una sequenza θ_i in cui occorrerebbero sia una formula TX sia il suo coniugato FX. Ma ciò è escluso dalla costruzione precedente. Per costruzione, S' è un insieme di Hintikka (vedi pagina 45) e contiene S. Perciò, esiste una valutazione che soddisfa S' (Lemma 46), e anche, a maggior ragione, S. □

8. Consistenza e massimalità: il lemma di Lindenbaum

In questa sezione discuteremo la nozione di consistenza massimale di un insieme di formule. Un insieme di formule S è detto *consistente massimale* se è consistente, e, per qualsiasi formula $X \notin S$, $S \cup \{X\}$ non è consistente. In altre parole, un insieme è massimale se l'aggiunta di qualsiasi formula che non gli appartenga lo rende inconsistente. Notiamo che ogni insieme di verità (vedi pagina 41) è consistente e massimale. Difatti, se S è l'insieme di verità della valutazione v, definita, appunto su tutto For, e $X \notin S$, allora $v(X) = \bot$ e pertanto $v(\neg X) = \top$.

Mostriamo ora che è vero anche il converso di quanto poc'anzi osservato; ossia, che *ogni insieme consistente massimale di formule è un insieme di verità*. A tal proposito, osserviamo che un insieme consistente di formule soddisfa le seguenti condizioni:

(L_0) Se S è consistente, allora ogni suo sottoinsieme finito è soddisfacibile;

(L_1) Se S è consistente, allora per ogni formula X: l'insieme $S \cup \{X\}$ è consistente, o altrimenti $S \cup \{\neg X\}$ è consistente.

Alcune osservazioni: La Condizione in (L_0) è ovvia per la definizione stessa di consistenza. Per quanto riguarda (L_1), supponiamo, *ex* *absurdo*, che sia $S \cup \{X\}$ sia $S \cup \{\neg X\}$ non siano consistenti. Quindi, esistono dei sottoinsiemi *finiti* S_1, S_2 di S tali che $S_1 \cup \{X\}$ e $S_2 \cup \{\neg X\}$ non sono soddisfacibili. Sia $S_3 = S_1 \cup S_2$. Abbiamo che $S_3 \cup \{X\}$ e $S_3 \cup \{\neg X\}$ non sono soddisfacibili. Quindi ne deduciamo che esistono $Y, Z \in S_3$ tali che, per ogni valutazione Booleana v:

$$v(X) = \top \text{ se e solo se } v(Y) = \bot$$

e anche

$$v(\neg X) = \bot \text{ se e solo se } v(Z) = \top.$$

Da questo concludiamo che

$$v(Z) = \top \text{ se e solo se } v(Y) = \bot.$$

Perciò S_3 non è soddisfacibile e S_3 è un sottoinsieme finito di S. Pertanto S stesso è inconsistente. Possiamo osservare che la Condizione (L_1) implica la seguente

> (L_1^*) Se S è consistente massimale, allora per ogni formula X: $X \in S$ o altrimenti $\neg X \in S$.

Infatti, per L_1, se S è consistente, allora, per qualsiasi $X \in For$, l'insieme $S \cup \{X\}$ è consistente, o altrimenti $S \cup \{\neg X\}$ è consistente. Quindi, per massimalità, o $X \in S$ o $\neg X \in S$.

Possiamo dimostrare ora il seguente:

Lemma 54. *Ogni insieme consistente massimale S è un insieme di verità.*

Dimostrazione. Dimostriamo le Condizioni (S1′)-(S3′) di pagina 41. La Condizione (S1′) segue direttamente da (L_1^*). Supponiamo che $\alpha \in S$.

Allora $\neg\alpha_1 \notin S$, poichè $\{\alpha, \neg\alpha_1\}$ non è soddisfacibile. Quindi per (L_1^*) $\alpha_1 \in S$. Analogamente per α_2. Supponiamo che $\alpha_1, \alpha_2 \in S$. Allora $\neg\alpha \notin S$, poichè $\{\alpha_1, \alpha_2, \neg\alpha\}$ non è soddisfacibile. Quindi $\alpha \in S$ per (L_1^*). Se $\beta \in S$ allora $\{\neg\beta_1, \neg\beta_2\} \notin S$, poichè $\{\neg\beta_1, \neg\beta_2, \beta\}$ non è soddisfacibile. Quindi β_1 o β_2 appartiene a S. Se $\beta_1 \in S$ allora $\neg\beta \notin S$, poichè $\{\neg\beta, \beta_1\}$ non è soddisfacibile. Quindi $\beta \in S$. Analogamente per β_2. $\square$

Seguendo un'idea di Adolf Lindenbaum (Varsavia, 1904 – Paneriai, 1941), mostriamo ora che ogni insieme consistente di formule può essere esteso ad un insieme consistente massimale.

Lemma 55. *Se S è un insieme consistente di formule allora esiste un insieme consistente massimale S' che contiene S.*

Dimostrazione. Per costruzione, abbiamo che l'insieme di formule For è numerabile (ogni formula è costruita in un numero finito di passi!). Pertanto, possiamo disporre le formule in For in un elenco numerato $X_1, \ldots, X_n, \ldots$. Costruiamo l'insieme S' induttivamente come segue: Come base fissiamo $S_0 = S$. Definiamo, poi, per induzione quanto segue:

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{X_{n+1}\}, & \text{se è soddisfacibile;} \\ S_n, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo costruito una *sequenza infinita di insiemi consistenti*

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq \ldots$$

ciascuno dei quali contiene S. Consideriamo l'unione

$$S' = \bigcup_{i \in N} S_i$$

di tutti questi insiemi. Supponiamo S' che non sia consistente. Allora esiste un sottoinsieme finito $\bar{S}$ di S' che non è soddisfacibile. Perciò vi sarà un insieme S_j nella sequenza che abbiamo costruito che contiene $\bar{S}$. Allora S_j stesso non sarà soddisfacibile: questa è una contraddizione. Abbiamo mostrato che S' è consistente. Vediamo ora che è anche massimale. Infatti, sia $\{X\} \cup S$ soddisfacibile; allora per ogni S_j nella costruzione $\{X\} \cup S_j$ è consistente. Quindi, vi sarà un indice $i \in N$ tale che $X \in S_i$. Perciò, $X \in S$. □

9. Le formule della logica del prim'ordine

Per la logica del prim'ordine faremo uso dei seguenti simboli:

(a) I simboli della logica proposizionale eccetto le variabili proposizionali;

(b) Il simbolo $\forall$, che si legge "per ogni";

(c) Il simbolo $\exists$, che si legge "esiste";

(d) Un insieme numerabile di *variabili individuali* $x_1, \ldots, x_n, \ldots$;

(e) Un insieme numerabile di *costanti individuali* $a_1, \ldots, a_n, \ldots$;

(f) Per ogni numero naturale n, un insieme numerabile di lettere predicative $P_1, \ldots, P_m, \ldots$ di arietà n.

Ricordiamo che la locuzione "arietà di una lettera predicativa" si riferisce al numero di posti ammessi da questa. Un esempio familiare è il simbolo "=". Questo simbolo, che usualmente utilizziamo in notazione infissa, i.e. $x_1 = x_2$, piuttosto che $= x_1, x_2$, ha ovviamente arietà 2.
Per comodità talvolta, intenderemo genericamente con l'espressione *simboli o termini individuali* simboli che siano o costanti o variabili. Una *formula semplice o atomica* della logica del prim'ordine è una

formula della forma

$$Pc_1, \dots, c_n$$

ove P è un predicato n-ario e $c_1, \dots, c_n$ sono termini individuali.[5] Notiamo subito che, a differenza del caso proposizionale, nella logica del prim'ordine può assolutamente darsi il caso in cui una formula, atomica o no, non sia un enunciato. Difatti, consideriamo la formula nel linguaggio dell'aritmetica $x + y = 5$. Questa espressione non rappresenta un enunciato: non possiamo chiederci se sia vera o falsa perché non sappiamo come considerare le variabili. Al contrario, la formula $\forall x \exists y(x + y = 5)$ è un enunciato: possiamo chiederci se sia vera o falsa.

A partire dalla nozione di formula atomica costruiamo induttivamente l'insieme delle formule For della logica del prim'ordine attraverso le regole di formazione della logica proposizionale (Definizione 16), unitamente alle seguenti:

- Se A è una formula e x una variabile proposizionale allora $\forall x(A)$ è una formula;

- Se A è una formula e x una variabile proposizionale allora $\exists x(A)$ è una formula;

Generalizziamo al presente contesto la nozione di grado di complessità di una formula vista a pagina 19:

[5] Sovente, l'arietà di una lettera predicativa è esplicitamente indicata con un apice; ad es. $P^n x_1, \dots, x_n$. Per rendere la notazione più leggera, in questo testo, la considereremo implicita e scriveremo semplicemente $Px_1, \dots, x_n$.

Grado di complessità di una formula. Sia X una formula, il suo grado di complessità, indicato con $\#(X)$ è un numero naturale associato ad X come segue:

- Se X è una formula atomica, allora $\#(X) = 0$;

- Se X è della forma $\neg Y$, allora $\#(X) = \#(Y) + 1$;

- Se X è della forma $Y \wedge Z$, allora $\#(X) = \#(Y) + \#(Z) + 1$;

- Se X è della forma $Y \vee Z$, allora $\#(X) = \#(Y) + \#(Z) + 1$;

- Se X è della forma $Y \to Z$, allora $\#(X) = \#(Y) + \#(Z) + 1$.

- Se X è della forma $\forall x(Y)$, allora $\#(X) = \#(Y) + 1$;

- Se X è della forma $\exists x(Y)$, allora $\#(X) = \#(Y) + 1$;

Un importante concetto, proprio della logica del prim'ordine, è quello di sostituzione:

Sia A una formula, x una variabile e a una costante. Definiamo la formula A^x_a induttivamente come segue:

(i) Se A è semplice, allora A^x_a è la formula ottenuta sostituendo tutte le occorrenze della variabile x con a in A.

(ii) $[A \wedge B]^x_a = A^x_a \wedge B^x_a$;

(iii) $[A \vee B]^x_a = A^x_a \vee B^x_a$;

(iv) $[A \to B]^x_a = A^x_a \to B^x_a$;

(v) $[\forall x(A)]^x_a = \forall x(A)$;

(vi) $[\exists x(A)]^x_a = \exists x(A)$.

Notiamo però che per una variabile y distinta da x: $[\forall x(A)]^y_a = \forall x(A^y_a)$ e $[\exists x(A)]^y_a = \exists x(A^y_a)$.

Alcuni commenti sulla quantificazione. Una variabile che cada all'interno di una espressione della forma $\forall x$ o $\exists x$ è detta *quantificata*. In qualsiasi formula A *l'ambito del quantificatore* è dato dalla più piccola formula che segue la sua occorrenza. Diciamo che l'occorrenza di una variabile x in una formula è *vincolata* se cade all'interno dell'ambito di un quantificatore o è essa stessa preceduta da simbolo $\forall$ oppure $\exists$. È invece *libera* se non è vincolata. Infine, diciamo che una variabile *x ha un'occorrenza libera in una formula A* se almeno un'occorrenza di x in A non è vincolata. Una formula A è detta *chiusa* se nessuna variabile ha un'occorrenza libera in A.

Esercizio 56. In quali delle seguenti x è vincolata, libera o possiede un'occorrenza libera:

(1) $\forall x(Px \to Py) \to Px$;

(2) $\forall x((Px \to Py) \to Px)$;

(3) $\forall x(Px \to Py) \to \forall x(Px)$.

(4) $\exists x(Px \wedge Rxy) \vee (\forall x(Px) \wedge Rxx)$.

Ricordiamo che la presenza o meno del quantificatore è essenziale per poter stabilire la verità o la falsità di una formula. Ad esempio pensiamo alle seguenti:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{5} \\ \forall x(x &= \sqrt{5}) \\ \exists x(x &= \sqrt{y}) \\ \forall y \exists x(x &= \sqrt{y}) \end{aligned}$$

Alla luce delle nozioni di cui sopra, notiamo che A^x_a è la formula che otteniamo *sostituendo con la costante a tutte le occorrenze libere della variabile x.*

D'ora in avanti, col termine "formula" ci riferiremo sempre ad una formula chiusa, ove non specificato altrimenti. Generalizziamo alla logica del prim'ordine la nozione di sottoformula immediata:

(a) A, B sono *sottoformule immediate* delle formule $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$ e A è sottoformula immediata della formula $\neg A$;

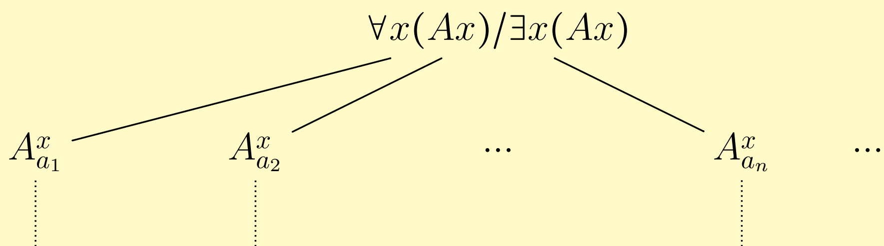
(b) se A è una formula della forma $\forall x(B)$ oppure $\exists x(B)$, allora per ogni costante a e per ogni variabile x la formula A^x_a è una sottoformula immediata di B.

Consistentemente con la nuova nozione di sottoformula immediata, aggiorniamo anche la costruzione dell'albero di formazione di una formula del prim'ordine.

L'albero di formazione di una formula del prim'ordine è un albero in cui ogni punto finale è una formula atomica e tale che, per ogni altro punto X, vale una delle seguenti condizioni:

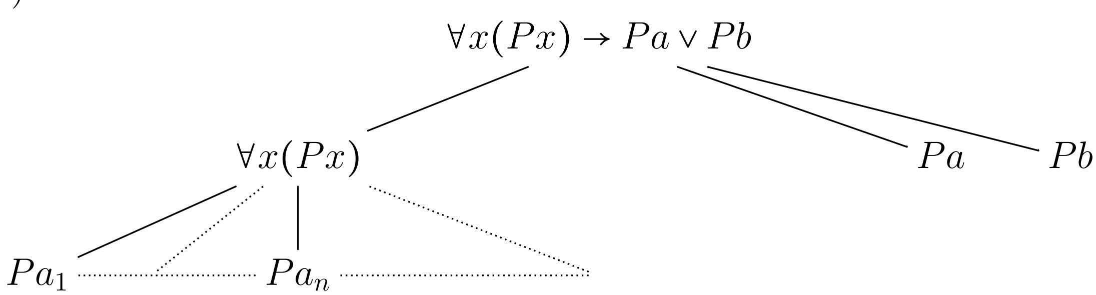
(a) se X è della forma $A * B$, con $*$ un qualunque connettivo binario, oppure è della forma $\neg A$ allora i suoi successori sono esattamente quelli discussi nel caso proposizionale;

(b) se X è della forma $\forall x(A)$ oppure $\exists x(A)$, allora le formule $A^x_{a_1}, A^x_{a_2}, \ldots, A^x_{a_n}, \ldots$ sono il primo il secondo, l'ennesimo successore etc., rispettivamente. Graficamente



Un esempio di albero di formazione è il seguente:

(8)



Possiamo immediatamente notare una differenza significativa rispetto alla logica proposizionale. Se, in quest'ultima, gli alberi di formazione delle formule erano sempre finitamente generati, nel caso della logica del prim'ordine non è più così. Infatti, ogni formula della forma $\forall x(Ax)$ o $\exists x(Ax)$ avrà un'infinità numerabile di successori: tanti quante sono le costanti individuali!

10. Valutazioni e modelli

Consideriamo H un qualsiasi insieme non vuoto, che chiamiamo *universo o dominio*. Definiamo, ora, l'insieme di formule con costanti in H, che chiameremo brevemente H-formule. Una *H-formula semplice o atomica* è una formula della forma $P\psi_1, ..., \psi_n$ ove P è un predicato n-ario e ciascun ψ_i è o una variabile o un elemento in H. Una volta definite le formule H-atomiche costruiamo ogni altra formula induttivamente attraverso le regole di formazione delle formule del prim'ordine introdotte a pagina 56.

Allo stesso modo, estendiamo alle H-formule la nozione di *sostituzione* introdotta a pagina 58: se $k \in H$ ed F una H-formula, definiamo la sostituzione F^x_k analogamente al caso delle costanti del linguaggio.

Consistentemente con quanto già visto, consideriamo analogamente, in questo contesto, le nozioni di *sottoformula immediata, albero di formazione, e chiusura di una H-formula.*

Dato un qualsiasi universo non vuoto H, denoteremo con E^H *l'insieme di tutte le H-formule chiuse.*

Definizione 57. Una *valutazione del prim'ordine* è una funzione v che assegna ad ogni formula in E^H un valore in $\{\bot, \top\}$ tale che:

(F1) v è una valutazione Booleana;

(F2) (a) $\forall x(A)$ *è vera rispetto a* v se e solo se per ogni $k \in H$ la formula A_k^x è vera rispetto a v;

(b) $\exists x(A)$ *è vera rispetto a* v se e solo se esiste almeno un $k \in H$ la formula A_k^x è vera rispetto a v.

Valutazioni atomiche. Una *valutazione atomica o delle formule semplici di* E^H è una assegnazione di valori di verità a tutti gli enunciati semplici di E^H. Notiamo che un enunciato semplice *non può* contenere variabili! Difatti se contenesse una variabile, questa non sarebbe nell'ambito di alcun quantificatore poiché, appunto, la formula è atomica. Pertanto, se contenesse una variabile non sarebbe un enunciato.

È ovvio mostrare per induzione sulla complessità delle formule in E^H che se due valutazioni concordano sulle formule semplici di E^H allora inducono la medesima valutazione. Ossia *una valutazione atomica si estende sempre ad una e una sola valutazione del prim'ordine.*

Esercizio 58. Mostrare per induzione sulla complessità delle formule in E^H che se due valutazioni concordano sulle formule semplici di E^H allora inducono la medesima valutazione. [**Attenzione:** i casi delicati sono quelli in cui X è della forma $\forall x(A)$ e $\exists x(A)$. Questi casi si dimostrano osservando che le sottoformule immediate di $\forall x(A)$ e $\exists x(A)$ sono della forma A_k^x, per $k \in H$. E ciascuna delle formule A_k^x ha complessità inferiore sia a $\forall x(A)$, sia a $\exists x(A)$.]

Interpretazioni. Nel contesto della logica del prim'ordine, *un'interpretazione dell'insieme* For *delle formule del linguaggio del prim'ordine rispetto ad un insieme* H *detto dominio* è una funzione i tale che

- i assegna ad ogni predicato n-ario P una relazione n-aria $\bar{P}$ su H;

- i assegna ad ogni costante del linguaggio del prim'ordine uno e un solo elemento in H.

Un enunciato semplice $P\psi_1, ..., \psi_n$ *è vero nell'interpretazione* i se e solo se la n-upla $(i(\psi_1), ..., i(\psi_n)) \in \bar{P}$.

Perciò, ogni interpretazione i dell'insieme For delle formule del linguaggio del prim'ordine rispetto ad un insieme H induce una ed una sola valutazione atomica ι delle H-formule, la quale, a sua volta, induce una sola valutazione del prim'ordine su E^H che coincide con l'interpretazione originaria i.

Esercizio 59. Dimostrare che dato un dominio non vuoto H, vi è una corrispondenza biunivoca tra interpretazioni dell'insieme For e valutazioni atomiche delle H-formule.

Pertanto, non v'è alcuna differenza concettuale tra il punto di vista delle interpretazioni e quello delle valutazioni atomiche su un insieme. In virtù di questo, a seconda dell'opportunità, utilizzeremo indifferentemente i due concetti.

Esempio 60.

(a) Consideriamo il linguaggio del prim'ordine contenente solamente il predicato binario P e la costante a, oltre a tutti i connettivi e le parentesi, e sia H l'insieme dei numeri naturali N. Possiamo chiederci se la formula $\forall x(Pa, x)$ è vera o falsa? No! Infatti, senza attribuire *significato* ai simboli ciò è impossibile! Fissiamo quindi una interpretazione i tale che

$$i(P) =\leq \text{ e } i(a) = 0,$$

dove $\leq$ indica l'ordine parziale usuale dei numeri naturali. Ora appare evidente che la formula $\forall x(Pa, x)$ è vera data tale interpretazione; infatti, 0 è minore di qualunque altro $n \in N$. Chiaramente, l'interpretazione i coincide con la seguente valutazione delle formule semplici di E^N:

$\top$	$\bot$
$P0, 0$	
$P0, 1$	
$P0, 2$	
$\vdots$	

(b) Se nel caso al punto (a) sostituiamo all'insieme dei numeri naturali l'insieme Z dei numeri interi, allora, data la medesima interpretazione:

$$i(P) = \leq \text{ e } i(a) = 0,$$

dove $\leq$ indica l'ordine parziale usuale dei numeri interi, appare evidente che la formula $\forall x(Pa, x)$ non è più valida; infatti 0 non è minore di qualunque altro $z \in Z$.

(c) Se variamo l'interpretazione del caso al punto (b), e consideriamo la seguente interpretazione sui numeri naturali:

$$i(P) = < \text{ e } i(a) = 0,$$

ove $<$ indica l'usuale ordinamento stretto, allora la formula $\forall x(Pa, x)$ non è più valida. Infatti, seppure 0 sia un numero naturale, $0 \nless 0$.

Notiamo come l'interpretazione di un linguaggio del prim'ordine *induca una struttura del prim'ordine* (o *relazionale*), appunto, sull'insieme in cui viene interpretato. Tutte le relazioni (le funzioni, che in questo testo non considereremo) e le costanti richieste appunto dall'interpretazione *assumono significato* nel dominio dell'interpretazione.

E.g. nell'Esempio 60(a) e (b), l'interpretazione i dota gli insiemi N e Z di un ordine parziale denotato dal simbolo "$\leq$" e di un elemento privilegiato denotato dal simbolo "0". Mentre, nel punto (c), i numeri naturali vengono dotati dell'ordine stretto $<$ unitamente alla costante 0.

Sia S un insieme di formule del prim'ordine e i una interpretazione su un insieme H. Se ogni formula in S è verificata dall'interpretazione i, allora la struttura indotta da i su H è detta un *modello* dell'insieme S.

Vediamo un esempio concreto

Esempio 61. Consideriamo il linguaggio del prim'ordine contenente solamente i predicati binari P, $=$. Sia T l'insieme delle seguenti formule del prim'ordine:

(i) $\forall x(Px, x)$;

(ii) $\forall x, y((Px, y) \wedge (Py, x) \to x = y)$;

(iii) $\forall x, y, z((Px, y) \wedge (Py, z) \to (Px, z))$.

Consideriamo come dominio i numeri naturali, interpretiamo il simbolo $=$ con l'abituale eguaglianza tra numeri naturali, mentre interpretiamo P con l'ordine di divisibilità $\preceq$ tra i naturali: per $a, b \in N$ $a \preceq b$ sse $a|b$, *a divide esattamente b;* ossia lo divide senza resto. È un utile **esercizio a casa** provare che $\preceq$ soddisfa tutte le condizioni in (i)-(iii). Ora, espandiamo le condizioni (i)-(iii) con la seguente:

(iv) $\forall x, y((Px, y) \vee (Py, x))$.

Vediamo subito che la nostra interpretazione di P con $\leq$ sui numeri naturali non funziona più. Basti considerare che $2 \nleq 3$ e $3 \nleq 2$!

Validità e soddisfacibilità.

- Una formula del prim'ordine è detta valida se è vera per qualsiasi interpretazione in qualsiasi universo.
- Una formula del prim'ordine è detta *soddisfacibile* se è vera per almeno una interpretazione in almeno un universo.

Quanto appena detto si può generalizzare naturalmente a insiemi arbitrari di formule del prim'ordine.

- Un insieme di formule del prim'ordine S è *valido* se ogni formula in S è vera per qualsiasi interpretazione in qualsiasi universo.
- Un insieme di formule del prim'ordine S è *soddisfacibile* se ogni formula in S è vera per almeno una interpretazione in un medesimo universo.

Riformulando: una formula del prim'ordine γ (analogamente per insiemi di formule) è *valida in un universo* H se e solo se, per qualsiasi interpretazione i su H, $i(\gamma)$ è vera.

Inoltre, una formula del prim'ordine δ (analogamente per insiemi di formule) è *soddifacibile in un universo* H se e solo se esiste un'interpretazione i su H tale che $i(\delta)$ è vera.

Pertanto, una formula del prim'ordine ξ (analogamente per insiemi di formule) è *valida* se e solo se è valida in ogni universo. E anche una formula del prim'ordine ϕ (analogamente per insiemi di formule) è *soddisfacibile* se e solo se è soddisfacibile in almeno un universo.

Come vedremo, vi è un famoso risultato della logica del prim'ordine (il Teorema di Löwenheim-Skolem) che dimostra che se un insieme di formule chiuse è soddisfacibile, allora è soddisfacibile in un universo numerabile. Questo teorema, che risale agli anni '30 del XX secolo, ha avuto ampio impatto sui fondamenti della matematica.

Valutazioni Booleane e del prim'ordine. Chiamiamo *atomo Booleano* un enunciato A della logica del prim'ordine che sia o un enunciato semplice della forma $Pa_1, ..., a_n$ o della forma $\forall x(B)$ oppure $\exists x(B)$.

Consideriamo quindi come universo l'insieme (*numerabile*, vedi pagina 56) V delle costanti del linguaggio del prim'ordine. Sia E^V l'insieme di tutte le V-formule chiuse. Su quest'insieme possiamo considerare sia *valutazioni Booleane* (vedi Definizione 24) sia *valutazioni del prim'ordine*.

Osserviamo che valutazioni Booleane e valutazioni del prim'ordine non sono la stessa cosa:

- Una valutazione del prim'ordine *è* una valutazione Booleana, in quanto rispetta tutte le condizioni in Definizione 24;
- Una valutazione Booleana *può non essere* una valutazione del prim'ordine, in quanto le condizioni in (F2) della Definizione 57 potrebbero venire disattese. Difatti, potrebbe darsi il caso in cui, per una valutazione Booleana v, $v(\forall x(Ax)) = \top$, ma per una costante a, $v(A^x_k) = \bot$. Questo è dovuto al fatto che formalmente $\forall x(Ax)$ e A^x_k *sono formule distinte*. Pertanto la valutazione Booleana v non possiede la "sensibilità" di una valutazione del prim'ordine, e può non tenere

conto della relazione che intercorre tra le due formule. Questo, appunto, si deve al fatto che tale relazione sia esclusivamente esprimibile al prim'ordine; al livello dei predicati, quindi, ma non al livello proposizionale.

Questa distinzione tra valutazioni Booleane e del prim'ordine ci permette alcune interessanti osservazioni. Tutti i risultati della logica proposizionale sono veri per le valutazioni Booleane anche all'interno logica del prim'ordine. Difatti, ogni assegnazione di valori di verità agli atomi Booleani di E^V induce un'unica valutazione Booleana (che in generale non è del prim'ordine) di E^V. In questo contesto, per esempio, possiamo ottenere (con la stessa dimostrazione del caso proposizionale!) la seguente versione del teorema di compattezza:

Se S è un sottoinsieme infinito di E^V tale che ogni suo sottoinsieme finito sia vero-funzionalmente soddisfacibile (ossia: vero in almeno una valutazione Booleana di E^V), allora S è vero-funzionalmente soddisfacibile.

Come vedremo, esiste una versione corrispondente di questo risultato per le valutazioni del prim'ordine.

La distinzione tra valutazione Booleana e valutazione del prim'ordine, ci offre modo di *distinguere tra enunciati validi (al prim'ordine!) e tautologie.*

- Una *tautologia* è una formula vera per ogni valutazione Booleana. Esempio:

$$\forall x(Px) \to (\exists y(Qy) \to \forall x(Px)) \tag{9}$$

- Una *formula valida* è una formula vera per ogni valutazione del prim'ordine. Esempio:

$$\forall x(Px \to Qx \vee Px) \tag{10}$$

Notiamo che mentre la formula in (9) è anche valida, la formula in (10) non è una tautologia!

Esercizio 62. Perché?

È opportuno osservare che, al prim'ordine, la nozione di tautologia prescinde completamente da quella di enunciato. Difatti, vi sono casi in cui ad essere tautologie siano delle formule aperte. Per esempio la formula seguente è una tautologia (e pertanto anche valida al prim'ordine):

$$Px \wedge Qy \wedge (Px \wedge Qy \to Rz) \to Rz.$$

11. Tableaux analitici al prim'ordine

Consistentemente con quanto visto in sezione 5, continueremo ad usare le espressioni "formula di tipo α" e "formula di tipo β" nello stesso senso di pagina 37. Per quanto riguarda le formule specifiche del prim'ordine, avremo necessità di introdurre *due nuove tipologie di formule* (e nient'altro): le formule di tipo γ e quelle di tipo δ.

- γ indicherà una qualsiasi formula segnata della forma $T\forall x(A)$ oppure $F\exists x(A)$;
- δ indicherà una qualsiasi formula segnata della forma $F\forall x(A)$ oppure $T\exists x(A)$.

Inoltre,

(a) Data una costante a, $\gamma(a)$ indicherà una qualsiasi formula segnata della forma TA^x_a oppure FA^x_a;

(b) Data una costante a, $\delta(a)$ indicherà una qualsiasi formula segnata della forma FA^x_a oppure TA^x_a.

Nel considerare enunciati con constanti in un universo U, useremo γ e δ nella medesima maniera, e definiamo allo stesso modo, per $k \in U$, $\gamma(k)$ e $\delta(k)$.

Estendendo quanto osservato per la logica proposizionale al contesto della logica dei predicati, possiamo notare che:

Per ogni interpretazione in qualsiasi universo U:

(F1) α è vera se e solo se α_1 e α_2 lo sono;

(F2) β è vera se e solo se almeno una tra β_1 o β_2 lo è;

(F3) γ è vera se e solo se per ogni $k \in U$ $\gamma(k)$ è vera;

(F4) δ è vera se e solo se per almeno un $k \in U$ $\delta(k)$ è vera.

Per quanto riguarda la soddisfacibilità al prim'ordine, le seguenti condizioni risultano essere conseguenze dirette di quanto sopra.

Sia S un insieme di formule soddisfacibile

(G1) Se $\alpha \in S$, allora $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ è soddisfacibile;

(G2) Se $\beta \in S$, allora almeno uno tra $S \cup \{\beta_1\}$ o $S \cup \{\beta_2\}$ è soddisfacibile;

(G3) Se $\gamma \in S$, allora, per ogni costante a, $S \cup \{\gamma(a)\}$ è soddisfacibile;

(G4) Se $\delta \in S$, allora, e ogni a una costante che non appare in alcuna formula in S, $S \cup \{\delta(a)\}$ è soddisfacibile.

Commenti. Chiaramente, le condizioni (G1) e (G2) sono vere per motivi sostanzialmente vero-funzionali.

Per quanto riguarda (G3), se $\gamma \in S$, allora γ è soddisfacibile; quindi, per un'interpretazione i su un universo U, grazie a (F3), per ogni costante a del linguaggio abbiamo che $\gamma(i(a))$ è soddisfatta in U. Perciò, per ogni costante a del linguaggio $\gamma(a)$ è soddisfatta in U: pertanto è soddisfacibile.

Riguardo a (G4), se $\delta \in S$, allora δ è soddisfacibile; quindi, per un'interpretazione i su un universo U, grazie a (F4), per almeno un elemento $k \in U$, $\delta(k)$ è soddisfatta. Ora, l'interpretazione i è definita per ogni costante presente nelle formule in $S \cup \{\delta\}$. Scegliamo quindi una costante a che non compaia in alcuna formula in S. L'interpretazione i non è definita su tale costante del linguaggio. Abbiamo facoltà pertanto di estendere l'interpretazione i ad un'interpretazione i' che concorda con i su S, e tale che $i'(a) = k$. Chiaramente, per ogni formula $\phi \in S$, questa è soddisfatta in U attraverso l'interpretazione i', poiché coincide con i. Inoltre, $\gamma(i'(a)) = \gamma(k)$ è soddistatta in U. Perciò, $S \cup \{\delta(a)\}$ è soddisfacibile. Intuitivamente, la condizione (G4) esprime il fatto che sia necessario istanziare la formula in S della forma δ attraverso una nuova costante. Questo poiché, seppure δ sia soddisfacibile (perché elemento di S), non abbiamo facoltà di dire che sia soddisfacibile la formula $\delta(a)$, se a è una costante che già compare all'interno di una formula in S. Non possiamo sapere, infatti che sia *proprio l'interpretazione di* $i(a)$ *a verificare* δ *nel dominio* U. Questa regola rappresenta a livello astratto qualcosa di molto comune nella prassi matematica. Ne discuteremo a breve.

12. Costruzione dei tableaux analitici al prim'ordine

Schematicamente, le regole di costruzione dei tableaux analitici al prim'ordine sono le seguenti:

(Schema A) $\dfrac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$ (Schema B) $\dfrac{\beta}{\beta_1 | \beta_2}$

(Schema C) $\dfrac{\gamma}{\gamma(a)}$ (per **ogni** costante a)

(Schema D) $\dfrac{\delta}{\delta(a)}$ (per **una costante** a **non introdotta attraverso una regola di tipo (D)**)

Commenti. Gli schemi (A) e (B) seguono quanto visto nel caso proposizionale.

Lo schema (C), invece, formalizza il fatto che, da una premessa della forma "per ogni x abbiamo la proprietà A" oppure "per nessun x abbiamo la proprietà A" si deduca il fatto che " a possiede la proprietà A" oppure "a non possiede la proprietà A", rispettivamente.

Per quanto concerne lo schema (D), questo istanzia un processo molto comune nelle dimostrazioni matematiche, come ora vedremo.

Supponiamo, di essere pervenuti nel corso di una dimostrazione matematica ad avere ottenuto un enunciato della forma "non per ogni x abbiamo la proprietà A" oppure "esiste un x per cui abbiamo la proprietà A". A tal punto siamo autorizzati a istanziare questo x generico con la frase "chiamiamo a tale x". Notiamo, però, che questo richiede un po' di cautela: *non sappiamo effettivamente chi sia tale x in questione*! Non possiamo, perciò, coinvolgere alcun nome che abbiamo utilizzato per oggetti apparsi in precedenza nella dimostrazione. Da ciò, la richiesta che a sia una nuova costante o un nuovo nome (si veda anche quanto discusso a pagina 72).

Vediamo ora alcuni esempi del funzionamento dei tableax al prim'ordine.

Esempio 63. Dimostriamo la formula

$$\forall y(\forall x(Px) \to Py).$$

(1) $F\forall y(\forall x(Px) \to Py)$

(2)|(1) $F(\forall x(Px) \to Pa)$

(3)|(2) $T\forall x(Px)$

(4)|(2) FPa

(5)|(3) TPa

$\lightning$

Esempio 64. Dimostriamo la formula

$$\forall x(Px) \vee \forall x(Qx) \to \forall x(Px \vee Qx).$$

(1) $F(\forall x(Px) \vee \forall x(Qx) \to \forall x(Px \vee Qx))$

(2)|(1) $F\forall x(Px \vee Qx)$

(3)|(2) FPa

(4)|(2) FQa

(5)|(1) $T(\forall x(Px) \vee \forall x(Qx))$

(6)|(5) TPa (7)|(5)TQa

$\lightning$ $\lightning$

Esempio 65. Dimostriamo la formula

$$\forall x(Px \to Qx) \to (\forall x(Px) \to \forall x(Qx)).$$

(1) $F(\forall x(Px \to Qx) \to \forall x(Px) \to \forall x(Qx))$

(2)|(1) $T(\forall x(Px \to Qx))$

(3)|(1) $F(\forall x(Px) \to \forall x(Qx)))$

(4)|(3) $T(\forall x(Px))$

(5)|(3) $F(\forall x(Qx))$

(6)|(4) $T(Pa)$

(7)|(5) $F(Qa)$

(8)|(2) $T(Pa \to Qa)$

$\lightning$

Esempio 66. Dimostriamo la formula

$$\exists x(C \to Px) \to (C \to \exists x(Px)),$$

dove C è una formula chiusa.

(1) $F(\exists x(C \to Px) \to (C \to \exists x(Px)))$

(2)|(1) $T(\exists x(C \to Px))$

(3)|(1) $F((C \to \exists x(Px)))$

(4)|(3) $T(C)$

(5)|(3) $F(\exists x(Px))$

(6)|(5) $F(Pa)$

(7)|(2) $T(C \to Pa)$

$\lightning$

Esercizio 67. Dimostrare col metodo dei tableaux che le seguenti sono tautologie:

(1) $\forall x(Px) \to \exists y(Py)$;

(2) $\exists y(Py) \to \exists x(Px)$;

(3) $\forall x(Py \wedge Qx) \to \forall x(Px) \wedge \forall x(Qx)$;

(4) $\forall x(Px) \wedge \forall x(Qx) \to \forall x(Py \wedge Qx)$;

(5) $\exists x(Px \vee Qx) \to \exists x(Px) \vee \exists x(Qx)$;

(6) $\exists x(Px) \vee \exists x(Qx) \to \exists x(Py \vee Qx)$;

(7) $\exists x(Px \wedge Qx) \to \exists x(Px) \wedge \exists x(Qx)$.

13. Consistenza e Completezza del sistema dei tableaux

Analogamente a quanto visto per il caso proposizionale in Sezione 6, proviamo per la logica del prim'ordine i teoremi di consistenza e completezza del sistema dei tableaux. Iniziamo col teorema di consistenza, che dimostra il fatto che ogni formula dimostrata dai tableaux analitici è valida. La nostra strategia sarà quella di mostrare che, se un tableau $\mathcal{T}$ contiene un cammino soddisfacibile, i.e. aperto, allora ogni sua estensione tramite gli schemi (A) (B) (C) (D) produce almeno un cammino che è soddisfacibile.

Teorema 68. Il sistema dei tableaux analitici del prim'ordine è consistente.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{T}$ un tableau tale che un suo cammino θ sia soddisfacibile. Sia S l'insieme delle formule in θ. Proviamo ora che ogni sua estensione tramite gli schemi (A) (B) (C) (D) produce almeno un cammino che è soddisfacibile.

(A) Se estendiamo θ tramite (A), allora S contiene una formula del tipo α. Quindi, per l'osservazione (G1) a pagina 71, $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ è soddisfacibile.

(B) Se estendiamo θ tramite (B), allora S contiene una formula del tipo β. Quindi, per l'osservazione (G2) a pagina 71, almeno uno tra $S \cup \{\beta_1\}$ o $S \cup \{\beta_2\}$ è soddisfacibile.

(C) Se estendiamo θ tramite (C), allora S contiene una formula del tipo γ. Quindi, per l'osservazione (G3) a pagina 71, per ogni costante a, $S \cup \{\gamma(a)\}$ è soddisfacibile.

(D) Se estendiamo θ tramite (D), allora S contiene una formula del tipo δ. Quindi, per l'osservazione (G3) a pagina 71, per una qualche costante a che non compare in alcuna formula in S, $S \cup \{\delta(a)\}$ è soddisfacibile.

Abbiamo quindi provato che ogni estensione di θ attraverso gli schemi (A) (B) (C) (D) produce almeno un cammino che è soddisfacibile. Perciò, se X è una formula del prim'ordine soddisfacibile, si dimostra facilmente per induzione grazie alle osservazioni di poc'anzi che qualsiasi tableau $\mathcal{T}$ per X conterrà un cammino θ completato e non chiuso. Perciò, $\mathcal{T}$ non è chiuso. Quindi, se un tableau è chiuso, la sua origine non è soddisfacibile. Ne consegue che ogni formula dimostrata dai tableaux analitici è valida. □

14. Il Teorema di Completezza per i tableaux del prim'ordine

Nel caso proposizionale, il teorema di completezza per i tableaux analitici sfruttava la nozione di insieme di Hintikka (Lemma 46) per dimostrare che tutte le formule di ogni cammino completo e aperto di un tableau sono simultaneamente soddisfacibili. Infatti, tale insieme è, appunto, di Hintikka. Vedremo che un'opportuna estensione della nozione di insieme di Hintikka ci condurrà alla dimostrazione del teorema di completezza per i tableaux analitici del prim'ordine.

Definizione 69. Un *insieme di Hintikka del prim'ordine* per un universo U (brevemente, insieme di Hintikka) è un insieme S di U-formule tali che le seguenti condizioni valgono per tutte le formule in E^U:

(H1) Nessuna formula atomica e il suo coniugato appartengono a S;

(H2) Se $\alpha \in S$ allora sia α_1 sia α_2 appartengono ad S;

(H3) Se $\beta \in S$ allora almeno una tra β_1 o β_2 appartiene ad S;

(H4) Se $\gamma \in S$ allora, *per ogni* $k \in U$, $\gamma(k) \in S$;

(H5) Se $\delta \in S$ allora, *per almeno un* $k \in U$, $\gamma(k) \in S$.

Notiamo che le condizioni (H1), (H2) e (H3) sono esattamente le medesime condizioni che definiscono un insieme di Hintikka nel caso proposizionale (vedi pagina 45), mentre (H4) e (H5) sono condizioni proprie della logica del prim'ordine.

Facciamo ora buon uso della precedente definizione dimostrando il seguente:

Lemma 70. [Lemma di Hintikka per la logica del prim'ordine] *Ogni insieme di Hintikka S per un universo U è soddisfacibile nel dominio U.*

Dimostrazione. Come prevedibile, costruiremo ora una valutazione atomica[6] v delle formule in E^U tale che tutte le formule in S risultino vere. Definiamo, per qualsiasi formula (chiusa) atomica la seguente:

$$v(P\xi_1, \ldots, \xi_n) = \begin{cases} \top, & \text{se } TP\xi_1, \ldots, \xi_n \in S; \\ \bot, & \text{se } FP\xi_1, \ldots, \xi_n \in S; \\ \top, & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{11}$$

Anzitutto notiamo che la definizione in (11) è consistente per la condizione (H1) in Definizione 69.

Mostriamo per induzione sulla complessità delle formule, che ogni formula in S è verificata da v. Per quanto riguarda la base dell'induzione, se $X \in S$ è una formula tale che il suo grado di complessità $\#X = 0$.

[6] Ricordiamoci che una valutazione atomica si riferisce sempre a formule semplici chiuse!

Allora, direttamente dalla condizione in (11), e per (H1) in Definizione 69, $v(X) = 1$.

Supponiamo, ora, che ogni formula in S di complessità minore o eguale ad n sia soddisfatta da v. Sia $X \in S$ di complessità $n+1$. Quattro casi sono possibili: i primi due non coinvolgono la quantificazione, gli altri sono propri, invece, della logica dei predicati.

(α) Se X è del tipo α, allora α_1 e α_2 appartengono a S, per (H2). Poiché α_1 e α_2 hanno complessità inferiore a α (vedi pagina 57), per ipotesi induttiva sono soddisfatte da v, e pertanto (vedi (F1) a pagina 70) lo è anche α.

(β) Se X è del tipo β, allora almeno una tra β_1 e β_2 appartiene a S, per (H3). Senza perdita di generalità, supponiamo $\beta_1 \in S$. Poiché β_1 ha complessità inferiore a β (vedi pagina 57), per ipotesi induttiva è soddisfatta da v, e pertanto (vedi (F2) a pagina 70) lo è anche β.

(γ) Se X è del tipo γ, allora, per ogni $k \in U$, $\gamma(k) \in S$. Poiché $\gamma(k)$ ha complessità inferiore a γ (vedi pagina 57), per ipotesi induttiva $\gamma(k)$ è soddisfatta da v. Pertanto (vedi (F3) a pagina 70) lo è anche γ.

(δ) Se X è del tipo δ, allora, vi è un $k \in U$, tale che $\delta(k) \in S$. Poiché $\delta(k)$ ha complessità inferiore a δ (vedi pagina 57), per ipotesi induttiva $\delta(k)$ è soddisfatta da v. Pertanto (vedi (F4) a pagina 70) lo è anche δ.

$\square$

Cerchiamo ora di capire come utilizzare la nozione di insieme di Hintikka per ottenere un teorema di completezza per i tableaux per il prim'ordine.

Notiamo che nella logica proposizionale ogni tableau termina dopo un numero finito di passi. Infatti, le regole del tipo (A) o del tipo (B) sono *finitarie*: espandono un tableau con un numero finito di passi. Ricordiamo che possono essere, solamente, della forma

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

oppure

$$\frac{\beta}{\beta_1 | \beta_2}$$

Così non è per quanto riguarda i tableaux per la logica dei predicati. Infatti, *la regola di tipo (C) non è finitaria.*

Notiamo che, da una formula di tipo γ, possiamo derivare un'infinità di formule:

$$\begin{array}{c}\gamma\\ \hline \gamma(a_1)\\ \hline \gamma(a_2)\\ \hline \vdots\\ \hline \gamma(a_n)\\ \hline \vdots\end{array}$$

Perciò, un tableau per la logica del prim'ordine può anche essere infinito e pertanto dovrà contenere un cammino infinito (questa è una conseguenza del Lemma 15: il Lemma di Konig).

Sia, quindi $\mathcal{T}$ un tableau infinito della logica dei predicati, e θ un suo cammino infinito. Possiamo dire che l'insieme di formule contenute in θ è di Hintikka? La risposta è **no**!

Infatti, supponiamo che θ contenga due formule di tipo γ, che chiamiamo γ_1 e γ_2. Ammettiamo che θ contenga, per ogni costante a, tutte le occorrenze $\gamma_1(a)$. Questo ci basta per sostenere che l'insieme delle formule in θ è di Hintikka? Ancora una volta, **no**.

Infatti, potrebbe avvenire che, per qualche costante b, $\gamma_2(b)$ non occorra in θ: l'insieme di tutte le formule in θ contiene le istanze di γ_1, ma, magari, non di γ_2.

Il nostro obiettivo sarà ora quello di individuare una procedura effettiva che permetta di *estendere ogni cammino aperto di un tableau ad un cammino il cui insieme delle formule sia di Hintikka.*

Sia $\mathcal{T}$ un tableau di e X una formula in θ.

Diciamo che la formula X è *usata* nel caso in cui

(1) Se X è della forma α, allora α_1 e α_2 occorrono in θ;

(2) Se X è della forma β, allora almeno uno tra β_1 o β_2 occorre in θ;

(3) Se X è della forma γ, allora, per ogni costante a, $\gamma(a)$ occorre in θ;

(4) Se X è della forma δ, allora, per almeno una costante a, $\delta(a)$ occorre in θ.

Commenti. Il punto di maggiore interesse nella nozione di formula usata è il (3), nel caso in cui il linguaggio del prim'ordine in oggetto contenga un insieme infinito (numerabile) di costanti. Infatti, se θ è un cammino di un tableau $\mathcal{T}$ che contiene una formula della forma γ, allora se γ *è usata in* θ, il cammino θ è necessariamente infinito. Ciò si deve al fatto che conterrà tutte le formule della forma $\gamma(a)$, per ogni costante a del linguaggio del prim'ordine.

Notiamo, che se θ *è un cammino infinito* di un tableau $\mathcal{T}$, *allora* θ *è necessariamente aperto!*

Se non lo fosse, conterrebbe, per qualche formula X, sia l'occorrenza di TX, sia del suo coniugato FX. Ora, a queste due formule sono assegnati i livelli $l(TX) = m$ e $l(FX) = n$, rispettivamente. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che $m < n$. Pertanto, il cammino θ si fermerebbe al livello n, poichè, a tale livello, sarebbero già occorse sia TX sia FX. Tuttavia, questo è in contraddizione col fatto che θ sia un cammino infinito.

Una procedura effettiva. Con questa nozione a disposizione possiamo descrivere nel dettaglio la procedura che ci permetterà di *estendere ogni cammino infinito* θ *di un tableau* $\mathcal{T}$ *ad una sequenza infinita* θ' *il cui insieme di formule è di Hintikka.*

(1) Il passo 0 della sequenza θ' inizia con l'origine di θ;

(2) Supponiamo di avere concluso il passo n. Il passo $n+1$ è determinato come segue:

  (a) Se il cammino è già chiuso la procedura si ferma.

  (b) Se ogni punto non atomico del cammino θ è stato usato la procedura si ferma.

  (c) Se non si danno i punti di cui sopra in (a) e (b), scegliamo la formula in θ *di livello minimo* (ossia, il più in alto possibile in θ) che non è stata usata e procediamo come segue:

    (i) Se X è della forma α, allora estendiamo θ in $(\theta, \alpha_1, \alpha_2)$;

    (ii) Se X è della forma β, allora estendiamo θ simultaneamente nei due cammini (θ, β_1) e (θ, β_2);

    (iii) Se X è della forma γ, allora estendiamo θ in $(\theta, \gamma(a), \gamma)$, ove a è la prima costante tale che la formula $\gamma(a)$ non occorre in θ;

    (iv) Se X è della forma δ, allora estendiamo θ in $(\theta, \delta(a))$, ove a è la prima costante che non occorre in alcuna formula del tableau.

Commenti. L'unico punto, della precedente procedura, a meritare un breve commento è il punto (iii). Anzitutto, per evitare ripetizioni nella sequenza θ' scegliamo la costante a di modo che sia la prima costante tale che la formula $\gamma(a)$ non occorre in θ. Quindi, ripetiamo nuovamente γ, così da essere certi del fatto che la procedura definita in tal maniera produca, all'interno della sequenza θ', tutte le formule della forma $\gamma(a)$.

Notiamo che, per essere rigorosi, *il cammino θ non può essere un cammino di un tableau secondo le regole di costruzione dei tableaux* di pagina 72. Nessuna di tali regole, infatti, permette arbitrarie ripetizioni di formule della forma γ. Tuttavia, questo non costituisce un problema per la nostra costruzione. Infatti, una volta terminata la procedura, basterà cancellare dalla sequenza tutte le occorrenze aggiuntive delle eventuali formule di forma γ, per ottenere un cammino effettivo di un tableau.

In virtù di quanto discusso poc'anzi, diremo

(1) *sistematico* un tableau $\mathcal{T}$ i cui cammini siano stati ottenuti attraverso la procedura descritta a pagina 83;

(2) *terminato* un tableau sistematico $\mathcal{T}$ infinito, oppure finito ma i cui cammini non possano essere ulteriormente estesi attraverso la procedura di pagina 83 (ossia, tali che ogni punto sia stato usato).

Da questa discussione otteniamo:

Teorema 71. Ogni cammino aperto di un tableau sistematico terminato è un insieme di Hintikka, e perciò le sue formule sono simultaneamente soddisfacibili al prim'ordine in un universo numerabile di costanti.

Dal Lemma di Hintikka (Lemma 70) e dal Teorema 71, otteniamo come corollario il seguente:

Teorema 72. Se una formula X è valida al prim'ordine, allora è dimostrabile: esiste un tableau chiuso per FX. Inoltre, se X è valida al prim'ordine, allora il tableau sistematico per FX chiude entro un numero finito di passi.

Dimostrazione. Per i precedenti risultati, chiaramente, se una formula X è valida al prim'ordine, allora è dimostrabile: esiste un tableau chiuso per FX. Infatti, se X non fosse dimostrabile, allora un tableau sistematico per FX ammetterebbe un cammino aperto, le cui formule, per il Teorema 71, sono un insieme di Hintikka. Perciò, FX sarebbe soddisfacibile. Quindi X non sarebbe valida al prim'ordine.

Per quanto riguarda il secondo enunciato, se una formula X è valida al prim'ordine, allora è dimostrabile: esiste un tableau chiuso $\mathcal{T}$ per FX. Poiché è chiuso, $\mathcal{T}$ non contiene alcun cammino infinito. Infatti, se contenesse un cammino infinito θ, questo potrebbe essere esteso ad un cammino θ' le cui formule sono un insieme di Hintikka. Questo implica la soddisfacibilità di FX. Perciò X non sarebbe valida al prim'ordine. $\square$

Grazie al Teorema 71, possiamo dimostrare il seguente, importante, risultato:

Teorema 73. [**Löwenheim**] Se una formula X è soddisfacibile, allora è soddisfacibile in un dominio numerabile.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{T}$ un tableau terminato per X. Se $\mathcal{T}$ fosse chiuso, allora non sarebbe soddisfacibile. Perciò, $\mathcal{T}$ contiene almeno un cammino θ non chiuso. Per il Teorema 71, queste formule, e quindi anche X medesima, sono soddisfacibili nell'universo numerabile delle costanti del nostro linguaggio del prim'ordine. $\square$

15. I Teoremi di Löwenheim-Skolem e di Compattezza

In questa sezione dimostreremo un'estensione del Teorema di Löwenheim (da accreditarsi a T. Skolem) che si riferisce non più a singole formule, quanto bensì a insiemi numerabili di formule. Più precisamente, dimostreremo che se S è un insieme di formule soddisfacibili simultaneamente al prim'ordine, allora le formule in S sono simultaneamente soddisfacibili in un dominio numerabile.

Per semplicità, S sarà sempre un insieme numerabile di formule che non contengono costanti.

In quanto segue, un tableau per un insieme di numerabile formule S sarà un albero $\mathcal{T}$ costruito in questo modo: l'origine sarà una qualunque formula in S. Quindi ad ogni livello dell'albero useremo le regole (A), (B), (C), (D), oppure estenderemo ogni cammino aperto di $\mathcal{T}$ attraverso qualunque formula in S non ancora considerata, e itereremo il processo. Al termine di questo processo, grazie alla procedura di pagina 83, estenderemo ogni cammino aperto θ di $\mathcal{T}$ a un cammino θ' le cui formule siano un insieme di Hintikka, e otterremo un tableau $\mathcal{T}'$. Chiamiamo *completo per S* un tableau $\mathcal{T}'$ tale che l'insieme delle formule di ogni suo cammino aperto sia di Hintikka. Notiamo che se $\mathcal{T}$ è un tableau chiuso allora non contiene alcun cammino aperto. Quindi, l'insieme delle formule di ogni suo cammino non è un insieme di Hintikka. Pertanto $\mathcal{T}$ è banalmente completo per S.

Teorema 74. Per ogni S, esiste un tableau completo per S.

Dimostrazione. Innanzitutto, disponiamo tutte le formule in S in una sequenza numerabile $(X_1, X_2, \ldots)$ e poniamo come origine della sequenza la formula X_1. Quindi, applichiamo la procedura per ottenere un tableau terminato $\mathcal{T}$ (vedi pagina 84) per X_1. Se $\mathcal{T}$ non è chiuso, estendiamo ogni suo cammino aperto con X_2 ripetendo la procedura. E così via per tutte le formule in S. $\square$

Una diretta conseguenza è il seguente:

Lemma 75. *Se esiste un tableau chiuso per un insieme S, allora un sottoinsieme finito di S non è soddisfacibile. Equivalentemente, se ogni sottoinsieme finito di S è soddisfacibile, allora ogni tableau per S è aperto.*

Dimostrazione. Chiaramente, se esiste un tableau chiuso per un insieme S ogni suo cammino è chiuso: contiene una formula FX e il suo coniugato TX. Inoltre, le formule FX e TX sono ottenute come sottoformule di un numero finito di formule in S, diciamo $\{Y_1, ..., Y_n\}$. Perciò ogni tableau per $\{Y_1, ..., Y_n\}$ è chiuso. Quindi l'insieme $\{Y_1, ..., Y_n\}$ non è soddisfacibile. $\square$

Siamo ora pronti a discutere il Teorema di Löwenheim-Skolem e di Compattezza.

Teorema 76. [**Löwenheim-Skolem**] Se tutti i sottoinsiemi finiti di S sono soddisfacibili, allora lo stesso S è soddisfacibile in un universo numerabile.

Dimostrazione. Per il Teorema 74, esiste un tableau completo $\mathcal{T}$ per S. Per il Lemma 75, $\mathcal{T}$ è aperto. Dato che $\mathcal{T}$ è completo e aperto, le formule di ogni suo cammino aperto formano un insieme di Hintikka. Perciò, S è soddisfacibile, e lo è, per la costruzione del Lemma 70, nell'universo numerabile delle costanti. $\square$

16. Funzioni di Skolem

Consideriamo la formula

(*) $$\forall x \exists c (Pxc).$$

ove c è un termine individuale (al momento pensiamolo come una variabile, a breve capiremo il perché!). Chiaramente, x, c occorrono libere all'interno della formula semplice Pxc. Un'ovvia interpretazione linguistica della formula in (*) è la seguente:

per ogni x c'è una c tale che x è relata con c attraverso la relazione P.

In qualche modo la formula precedente esprime una corrispondenza tra x e c. Certamente, è possibile che, data x la c ad essa relata non sia unica, ma sappiamo, stante la formula in (*), che ne esiste almeno una. Tuttavia, possiamo immaginare di operare una scelta per ciascuna variabile x_i che le assegni un qualche termine in individuale c_i. In questo modo otteniamo una funzione h che assegna a ciascuna variabile un termine individuale. Momentaneamente, pensiamo di estendere il nostro linguaggio del prim'ordine attraverso l'aggiunta della funzione h. Così, il senso della formula diviene simile a

(**) $$\forall x (Pxh(x)).$$

Un'interpretazione linguistica della formula in (*) è la seguente:

per ogni x, x è relata, attraverso la relazione P, con il valore che h attribuisce ad x.

La formula in (**) è la *forma di Skolem* della formula in (*), e la funzione h è la *funzione di Skolem*. La forma di Skolem X^s di una data formula X, naturalmente, non è logicamente equivalente ad X: non possiamo aspettarci che siano interderivabili. Tuttavia, vi è un senso più debole di equivalenza che sussiste tra di esse; se una formula è contraddittoria lo è anche l'altra.

Esempio 77. Supponiamo che una formula $\exists x_i P(x_1 \dots x_{i-1} x_i)$ compaia come sottoformula di una formula X, all'interno dell'ambito dei quantificatori $\forall x_1 \dots \forall x_n$, $i - 1 \leq n$, anche se, possibilmente, non tutte queste variabili compaiono in $P(x_1 \dots x_{i-1} x_i)$. Sostituiamo ora ogni occorrenza di x_i con la corrispondente funzione di Skolem $h(x_1, \dots, x_n)$, dipendente dalle variabili quantificate universalmente, e cancelliamo il quantificatore esistenziale $\exists x_i$.

Come si può immaginare, questo processo permette di eliminare tutti i quantificatori esistenziali, che cadano nell'ambito di un quantificatore universale, all'interno di una formula del prim'ordine. Del resto, questa procedura, al momento, non ci permette di eliminare i quantificatori esistenziali che non siano all'interno dell'ambito di uno universale. In tali casi, le occorrenze delle variabili quantificate esistenzialmente verranno sostituite da costanti individuali, che possiamo pensare come funzioni di Skolem costanti.

Esempio 78. (a) Consideriamo $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 (P x_1 x_2 x_3 \vee \exists x_4 (Q x_1 x_2 x_4))$. La sua forma di Skolem è la seguente

$$\forall x_1 \forall x_3 (P x_1 h_1(x_1) x_3 \vee (Q x_1 x_2 h_2(x_1, x_2))).$$

(b) Consideriamo $\exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 (P x_1 x_2 x_3) \rightarrow \forall x_3 \exists x_1 (Q x_3 x_1))$. La sua forma di Skolem è la seguente

$$\forall x_3 (P c_1 c_2 x_3) \rightarrow \forall x_3 (Q x_3 h(x_3))).$$

Possiamo osservare che il processo che ci permette di ottenere una formula in forma di Skolem è indipendente dall'ordine di sostituzione delle variabili, come si evince facilmente anche dai casi appena discussi. Pertanto, ogni formula del prim'ordine ammette una e una sola forma di Skolem.

Teorema 79. Una formula del prim'ordine X è contraddittoria se e solo se la sua forma di Skolem X^s è contraddittoria.

Dimostrazione. Una prova completa di questo teorema è lunga e tecnicamente piuttosto delicata. Per quanto consta l'interesse di queste dispense, ci limiteremo, pertanto, alla dimostrazione di un caso semplice, così da offrire almeno un'idea della prova generale. Sia X della forma $\forall x_1 \exists x_2 B(x_1 x_2)$. Quindi X^s è $\forall x_1 B(x_1 h(x_1))$. Dimostreremo l'enunciato in forma di contrapposizione: una formula del prim'ordine X è soddisfacibile se e solo se la sua forma di Skolem X^s è soddisfacibile. Supponiamo vi sia un'interpretazione I che renda X vera in un dominio H. Perciò, per ogni $a_i \in H$, senza perdita di generalità: $I(x_1) = a_i$, vi sarà un $a_j = I(x_2)$ tale che $\overline{B}(I(x_1)I(x_2)) = \overline{B}(a_i a_j)$ sia vera in H. Sia, ora, I' un'interpretazione su H che coincida con I e tale che $I'(h)(I'(x_1)) = I'(h)(I(x_1)) = I'(h)(a_i) = a_j$. Ovviamente possiamo osservare che $I'(\forall x_1 B(x_1 h(x_1))) = \overline{B}(I'(x_1)I'(h)(I'(x_1)))) = \overline{B}(I(x_1)I'(h)(a_i))) = \overline{B}(a_i I'(h)(a_i))) = \overline{B}(a_i a_j))$, che, per ipotesi, è vero in H.
Viceversa, sia la forma di Skolem X^s soddisfacibile. Supponiamo, quindi, vi sia un'interpretazione I che renda X^s vera in un dominio H. Perciò, per ogni $a_i \in H$, senza perdita di generalità: $I(x_1) = a_i$, vi sarà un $a_j = I(h(x_1)) = I(h)(I(x_1)) = \overline{h}(I(x_1)) = \overline{h}(a_i)$ tale che $\overline{B}(I(x_1)I(h(x_1))) = \overline{B}(I(x_1)\overline{h}(I(x_1))) = \overline{B}(a_i\overline{h}(a_i)) = \overline{B}(a_i a_j)$ sia vera in H. Sia, ora, I' un'interpretazione su H che coincida con I eccetto, eventualmente, per l'assegnazione $I(x_2) = a_j$. È facile constatare, sfruttando l'ipotesi che I renda vera X^s in H, che per qualsiasi $a_i = I'(x_1) \in H$ vi è $a_j = I'(x_2) \in H$ tale che $\overline{B}(I(x_1)I(x_2)) = \overline{B}(a_i I(x_2)) = \overline{B}(a_i a_j)$ sia vera in H. Questo conclude quanto volevamo dimostrare. $\square$

Esercizio 80. (1) Dimostrare il Teorema 79 nel caso in cui X sia $\exists x_1 \forall x_2 (B x_1 x_2)$.

(2) Trovare le forme di Skolem delle seguenti:

(a) $\forall x_1 (P x_1) \wedge \exists x_2 \exists x_3 (Q x_2 x_3) \rightarrow \forall x_1 \exists x_2 (R x_1 x_2)$;

(b) $\forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 (P x_1 \wedge Q x_2 x_3) \rightarrow \forall x_1 \exists x_2 (R x_1 x_2)$;

(c) $\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 (P x_1 \wedge Q x_2 x_3 \rightarrow R x_1 x_2)$.

Appendice: l'alfabeto greco

Per convenienza, riportiamo in quest'appendice tutte le lettere dell'alfabeto greco, svariate delle quali abbiamo trovato impiegate in questo testo, con accanto la pronuncia:

Lettera	**Pronuncia**	**Lettera**	**Pronuncia**
α	alfa	β	beta
γ	gamma	δ	delta
ϵ	epsilon	ζ	zeta
η	eta	θ	theta
ι	iota	κ	kappa
λ	lambda	μ	mi
ν	ni	ξ	xi
π	pi	ρ	rho
σ	sigma	τ	tau
υ	upsilon	ϕ	phi
χ	chi	ψ	psi
ω	omega		

Ulteriori letture opzionali

A. Iacona, S. Cavagnetto, *Teoria della Logica del Prim'Ordine*, Carocci, Roma, 2010.

M. Giunti, A. Ledda, G. Sergioli, *Modelli*, Carocci, Roma, 2016.