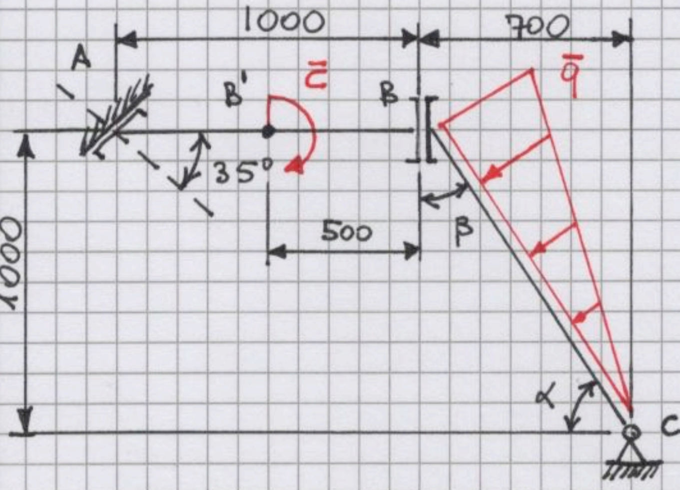
STRUTTURA ISOSTATICA 5/11/2018



DATI DI CARICO

$$\begin{cases} \overline{C} = 50 \text{ N·m} \\ \overline{q} = 10 \text{ N/mm} \end{cases}$$

$\overline{AB'} = 500$

- STATICITÀ

N° ASTE : 2

GDL : $2 \cdot 3 = 6$

GDV : $2+2+2 = 6$

STRUTTURA ISOSTATICA

- ANALISI CINEMATICA

È immediato constatare che la struttura è un arco a tre cerniere non labile, perché le cerniere non sono allineate e due di queste sono a terra.

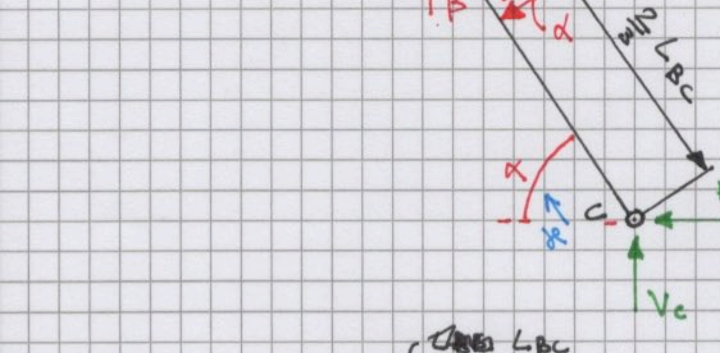
- CARATTERISTICHE GEOMETRICHE

$$L_{BC} = \sqrt{1000^2 + 700^2} = 1220.6556 \text{ mm}$$

$$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{1000}{700}\right) = 55.0080°$$

$$\beta = \operatorname{atan}\left(\frac{700}{1000}\right) = 34.9920°$$

- REAZIONI VINCOLARI



La funzione che definisce il carico secondo un'ascissa x la cui origine è C si ottiene da semplici considerazioni geometriche:

$$q(x) = \underbrace{\left(\frac{\overline{q}}{L_{BC}}\right)}_{m} \cdot x$$

Per trovare il risultante è sufficiente applicare la ben nota relazione integrale:

$$R = \int_0^{L_{BC}} q(x)\, dx .$$

REAZIONI VINCOLARI

$$R = \int_0^{L_{BC}} \left(\frac{\bar{q}}{L_{BC}}\right) x \, dx = \frac{\bar{q}}{L_{BC}} \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{L_{BC}} = \frac{\bar{q}\, L_{BC}}{2} =$$

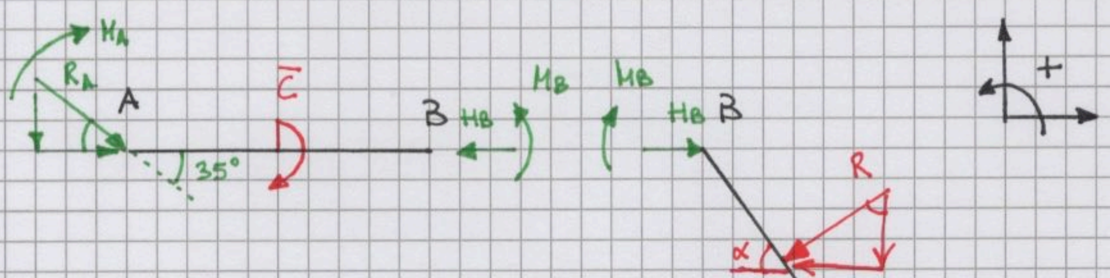
$$R = \frac{10 \cdot L_{BC}}{2} = 6103.2778 \text{ N}$$

Per trovare il punto $\bar{x}$ dove porre il risultante bisogna sfruttare un'altra relazione integrale:

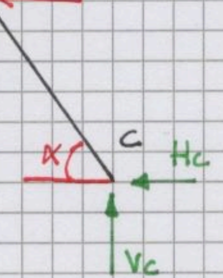
$$\bar{x} = \frac{\int_0^{L_{BC}} q(x) \cdot x \, dx}{R} = \frac{\int_0^{L_{BC}} \left(\frac{\bar{q}}{L_{BC}}\right) x^2 \, dx}{R} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\bar{q}}{L_{BC}}\right) \frac{L_{BC}^3}{3}}{R} = \frac{\bar{q}\, L_{BC}^2}{3\left(\bar{q}\, \frac{L_{BC}}{2}\right)} = \underline{\frac{2}{3} L_{BC}}$$

È immediato constatare che lo svincolo della struttura rispetto ai vincoli esterni non è sufficiente a chiudere il problema delle reazioni, in quanto si hanno 4 incognite (R_A, M_A, H_C, V_C) e solo 3 equazioni di equilibrio. Procediamo quindi allo svincolo delle aste nel punto B.



EQUILIBRIO ASTA AB



$\overset{+}{\uparrow}$ $\quad -R_A \cdot \sin(35) = \emptyset \rightarrow \underline{R_A = \emptyset}$

$\overset{+}{\rightarrow}$ $\quad R_A \cos(35) - H_B = \emptyset \rightarrow \underline{H_B = \emptyset}$

B) $\quad M_B - \bar{C} - M_A = \emptyset \rightarrow \underline{M_B = \bar{C} + M_A}$

EQUILIBRIO ASTA BC

$\overset{+}{\uparrow}$ $\quad V_C - R \cdot \cos(\alpha) = \emptyset \qquad V_C = R \cos(\alpha) = \underline{3500 \text{ N}}$

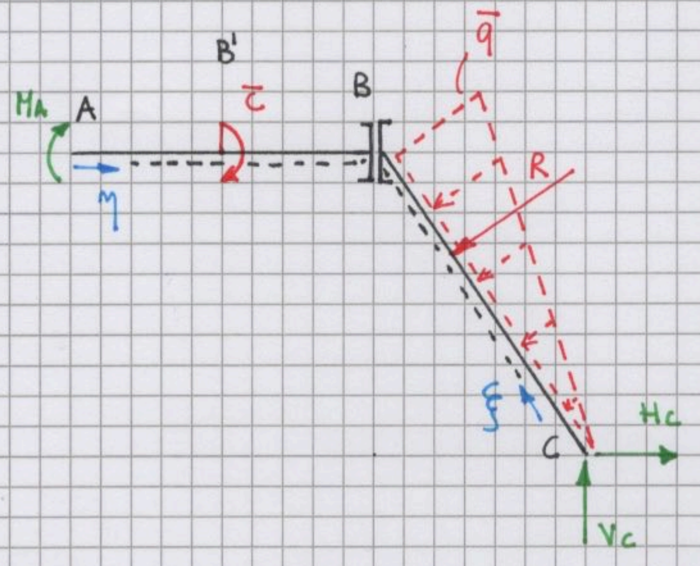
$\overset{+}{\rightarrow}$ $\quad -H_C - R \cdot \sin(\alpha) = \emptyset \qquad H_C = -R \sin(\alpha) = \underline{-5000 \text{ N}}$

H_C è negativa, quindi cambiamo segno e invertiamo il vettore.

C) $\quad R \cdot \frac{2 L_{BC}}{3} - M_B = \emptyset \qquad R \frac{2}{3} L_{BC} - M_A - \bar{C} = \emptyset \qquad M_A = R \frac{2}{3} L_{BC} - \bar{C} =$

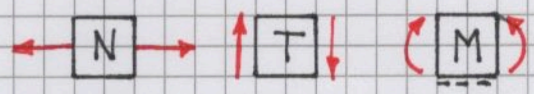
$$= \underline{4'916'666{,}667 \text{ N mm}}$$

• RIASSUNTO REAZIONI VINCOLARI



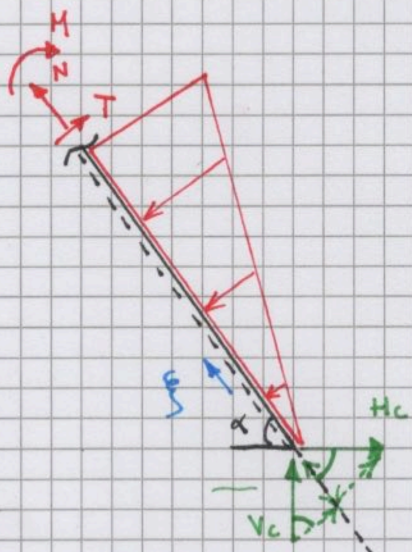
$$\begin{cases} M_A = 4916666.667 \text{ Nmm} \\ H_C = 5000 \text{ N} \\ V_C = 3500 \text{ N} \end{cases}$$

Utilizziamo due coordinate curvilinee ξ e η, con origine rispettivamente nel punto C e nel punto A. Le fibre tese corrispondenti sono indicate a tratteggio. Ricordiamo le convenzioni.



• AZIONI INTERNE

TRATTO $\overline{CB}$ $\quad 0 < \xi < L_{BC}$



$$N + V_C \cdot \sin(\alpha) - H_C \cdot \cos(\alpha) = \emptyset$$

$$\bullet\ N = H_C \cos(\alpha) - V_C \sin(\alpha) = \emptyset$$

$$T + V_C \cdot \cos(\alpha) + H_C \cdot \sin(\alpha) - \underbrace{\left(\frac{\bar{q}}{L_{BC}}\right)\frac{\xi^2}{2}}_{\text{Risultante}} = \emptyset$$

$$T = \frac{\bar{q}\,\xi^2}{2L_{BC}} - \left[V_C \cos(\alpha) + H_C \sin(\alpha)\right]$$

$$T(\emptyset) = -6103.2778 \text{ N}$$

$$T(L_{BC}) \cong \emptyset$$

Massimo di T? $\rightarrow \dfrac{dT}{d\xi} = \dfrac{\bar{q}\,\xi}{L_{BC}} = \emptyset \rightarrow$ Max (stazionario) in $\xi = \emptyset$

$$M - V_C \cos(\alpha)\,\xi - H_C \sin(\alpha)\,\xi + \underbrace{\left(\frac{\bar{q}\,\xi^2}{2L_{BC}}\right)}_{R}\underbrace{\left(\xi - \frac{2}{3}\xi\right)}_{\text{braccio}} = \emptyset$$

$$M = \left[V_C \cos(\alpha) + H_C \sin(\alpha)\right]\xi - \frac{\cancel{3}}{2}\frac{\bar{q}}{L_{BC}}\frac{\xi^3}{3} =$$

$$= \left[V_C \cos(\alpha) + H_C \sin(\alpha)\right]\xi - \frac{\bar{q}\,\xi^3}{6L_{BC}} \rightarrow \text{CUBICA}$$

$$M(\emptyset) = \emptyset \qquad M(L_{BC}) = 4966666.667 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

Per trovare il punto in cui il momento è stazionario è necessario effettuare la sua derivata rispetto a ξ.

Si ricorda che vige la relazione: $T = \frac{dM}{d\xi}$

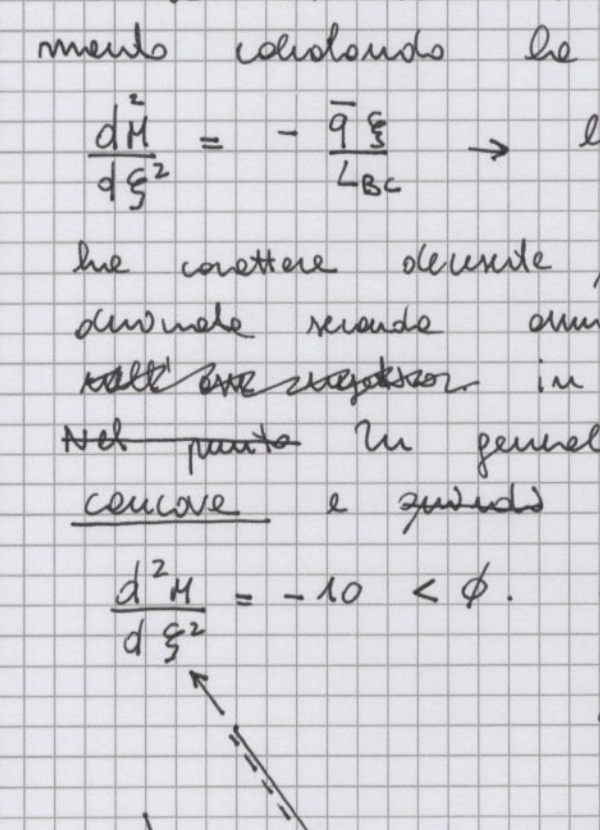
$$T=\phi \rightarrow \frac{\bar{q}\,\xi^2}{2L_{BC}} - \left[V_C \cos(\alpha) + H_C \sin(\alpha)\right] = \phi$$

$$\bar{\xi} = \pm \sqrt{\frac{2L_{BC}\left[V_C \cos(\alpha) + H_C \sin(\alpha)\right]}{\bar{q}}} = \pm \underbrace{1220.6556 \text{ mm}}_{= L_{BC}}$$

Scegliendo chiaramente il risultato positivo possiamo affermare che il momento sia stazionario (massimo o minimo) nel punto ove $\xi = L_{BC}$.
Per capire se sia un massimo o un minimo è necessario studiare la concavità della funzione momento calcolando la derivata seconda rispetto a ξ.

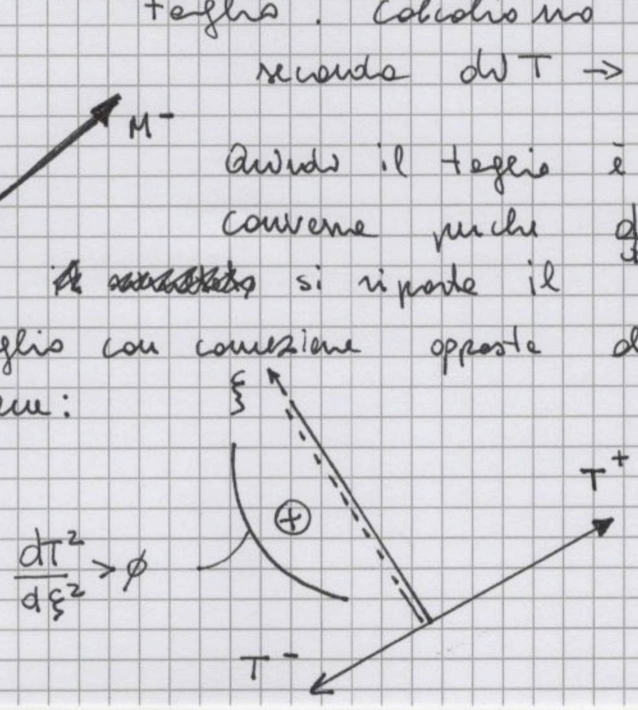
$\frac{d^2M}{d\xi^2} = -\frac{\bar{q}\,\xi}{L_{BC}}$ → la derivata seconda è di carattere lineare. Dato che $\bar{q} > 0$ e $L_{BC} > \phi$ ha carattere decrescente, quindi al crescere di ξ la derivata seconda assume valori sempre più ~~negativi~~ grandi ~~nell'ora negativo~~ in valore assoluto e di segno negativo. ~~Nel punto~~ In generale la funzione sarà ~~convessa~~ concava e ~~quindi~~ in particolare in $\xi = L_{BC}$ si avrà:

$\frac{d^2M}{d\xi^2} = -10 < \phi$. Quindi in $\xi = L_{BC}$ il momento assume il suo valore massimo.



Lo stesso discorso può essere utile nel disegno del diagramma del taglio. Calcoliamo la derivata seconda di T → $\frac{dT^2}{d\xi^2} = \frac{\bar{q}}{L_{BC}} > \phi$

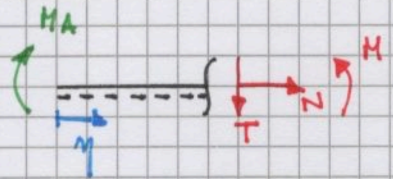
Quindi il taglio è una funzione convessa poiché $\frac{dM^2}{d\xi^2} > \phi$. Siccome ~~il taglio~~ si riporta il diagramma del taglio con convenzione opposta al momento si ottiene:



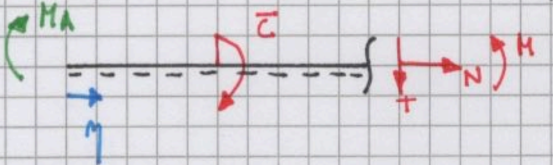
AZIONI INTERNE   TRATTO AB' $0 < \eta < 500$

$$N = T = \phi$$

$$M - M_A = \phi \;\rightarrow\; M = M_A = 4\,916\,666.667 \text{ Nmm}$$



TRATTO $B'B$ $500 < \eta < 1000$



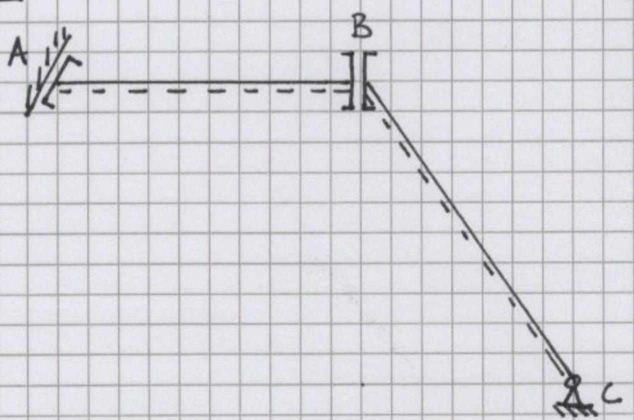
$$N = T = \phi$$

$$M - M_A - \overline{C} = \phi$$

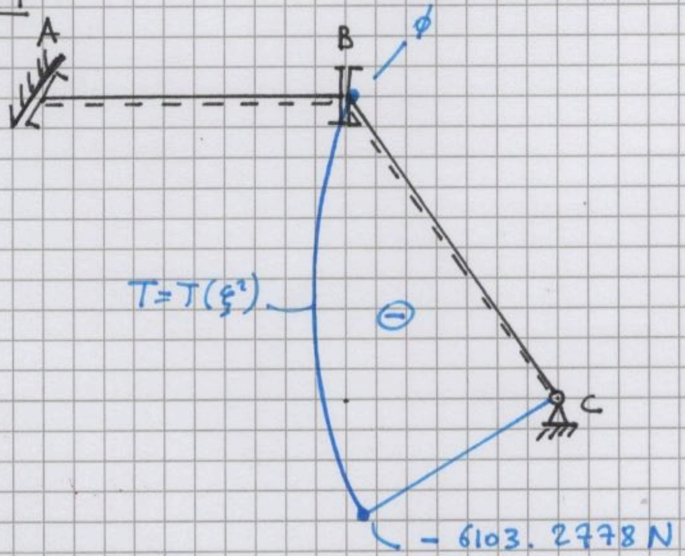
$$M = M_A + \overline{C} = 4\,966\,666{,}667 \text{ Nmm}$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE

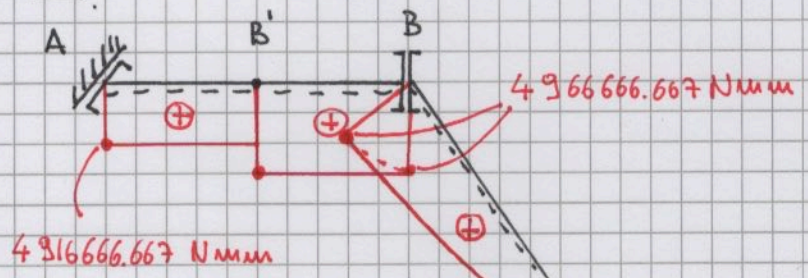
$\boxed{N}$



$\boxed{T}$



$\boxed{M}$



OSSERVAZIONI:

- La struttura non è soggetta ad azione assiale.
- Il diagramma del momento è continuo, con un unico salto in B', che eguaglia esattamente la coppia applicata $\overline{C}$.
- Il momento nel tratto BC è cubico mentre il taglio è una funzione quadratica.
- Il tratto AB è soggetto alla sola azione flettente, mentre taglio e azione normale sono nulli.