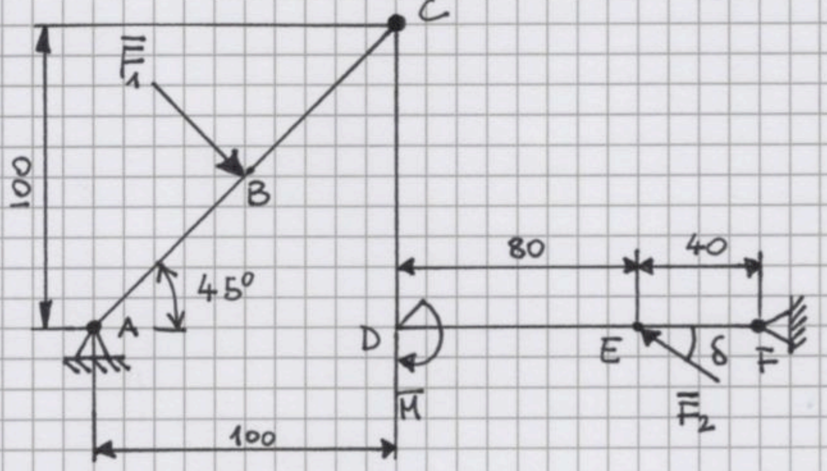
STRUTTURA ISOSTATICA (I) 15/10/2018

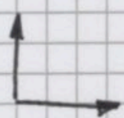
DATI

$\overline{F}_1 = \overline{F}_2 = 1\ kN = 1000\ N$

$\overline{M} = 25\ N \cdot m = 25000\ N\,mm$

$\delta = 40°$



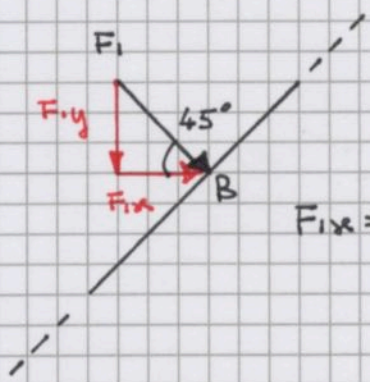



DATI GEOMETRICI PRELIMINARI

$L_{AC} = 100\sqrt{2} = 141.4214\ mm \qquad \frac{L_{AC}}{2} = 70.7107\ mm$

COMPONENTI DELLE FORZE

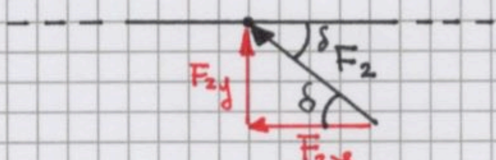
Per comodità calcoliamo le componenti delle forze $F_1$ e $F_2$.




$F_{1x} = F_{1y} = F_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 707.1068\ N$

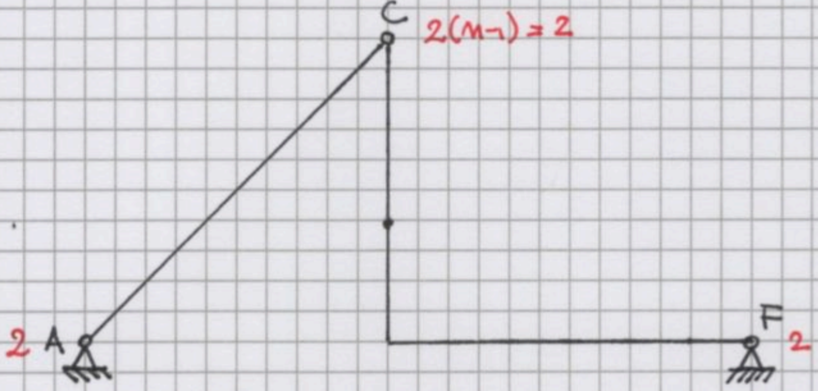
$F_{2x} = F_2 \cdot \cos(\delta) = 766.0444\ N$

$F_{2y} = F_2 \cdot \sin(\delta) = 642.7876\ N$



STATICITÀ

II



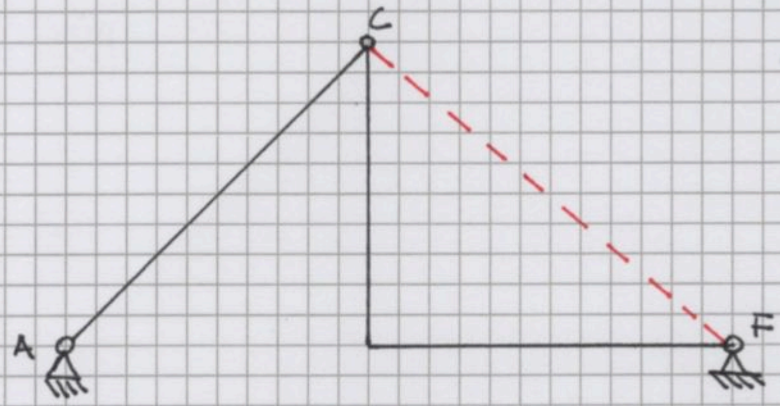

N° ASTE : 2

GDL : $2 \cdot 3 = 6$

GDV : $2+2+2 = 6$

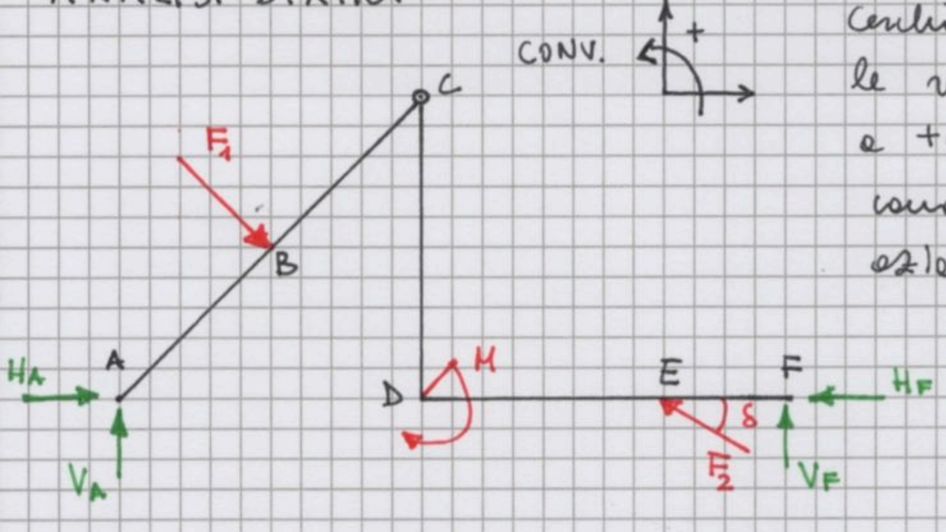
STRUTTURA ISOSTATICA

ANALISI CINEMATICA




La struttura $A\hat{C}F$ è un arco a 3 cerniere, non allineate, di cui A e F sono vincolate a terra. La struttura è quindi NON LABILE.

ANALISI STATICA




Cerchiamo di determinare le reazioni delle cerniere a terra A e F. Sarà comodo per studiare le azioni interne senza esplodere la cerniera C.

È immediato notare che con un equilibrio alla rotazione intorno a A si ottiene un'equazione in cui l'unica incognita è $V_F$, in quanto $H_A$ e $V_A$ hanno braccio nullo perché agiscono nel polo e $H_F$ ha ugualmente braccio nullo perché la sua retta d'azione passa per il polo.

$$A \circlearrowleft^{+} \quad -F_1 \cdot L_{AB} - M + F_2 \sin(\delta)\,(100+80) + V_F\,(100+120) = \emptyset$$

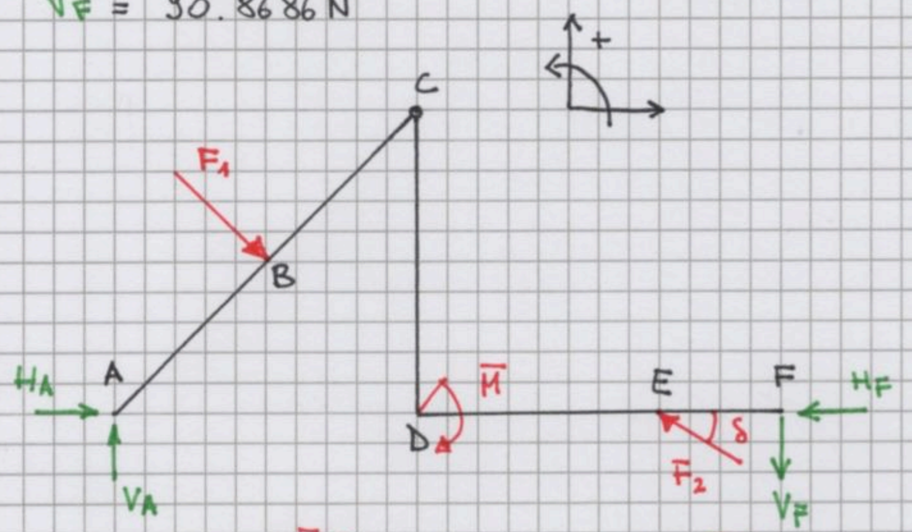
$$V_F = \frac{F_1 L_{AB} + M - F_2 \sin(\delta)\,(180)}{220} = -30.8686\ N$$

$V_F$ è negativo, si prospettano due strade:

1) si lasciano le reazioni con il loro segno senza modificare i vettori
2) si cambia segno alle reazioni negative invertendo graficamente il verso del vettore.

Seguiamo la strada 2 perché è più immediato lavorare con vettori orientati correttamente e positivi in modulo.
Quindi cambiamo segno a $V_F$ ed invertiamo il vettore $\vec{V_F}$

$V_F = 90.8686\ N$

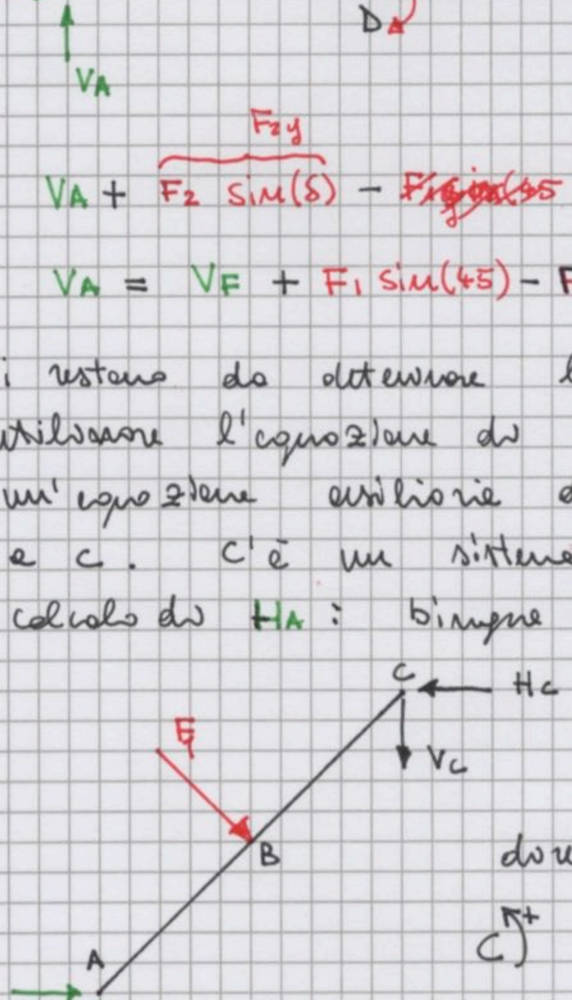



Nota $V_F$ è immediato ricavare $V_A$ con un equilibrio alla traslazione verticale.

$$\uparrow^{+} \quad V_A + \underbrace{F_2 \sin(\delta)}_{F_{2y}} - \cancel{F_1 \sin(45} \underbrace{F_1 \sin(45)}_{F_{1y}} - V_F = \emptyset$$

$$V_A = V_F + F_1 \sin(45) - F_2 \sin(\delta) = 155.1878\ N$$

Ci restano da determinare le reazioni $H_A$ e $H_F$. Potremmo utilizzare l'equazione di equilibrio orizzontale insieme a un'equazione ausiliaria di equilibrio alla rotazione intorno a C. C'è un sistema più comodo che consente il calcolo di $H_A$: bisogna svincolare l'asta AC.




Con un equilibrio alla rotazione in C si eliminano le incognite $H_C$ e $V_C$, permettendo un calcolo diretto di $H_A$

$$C \circlearrowleft^{+} \quad \cancel{F\, L_{AB}}\ F_1 L_{BC} - V_A \cdot 100 + H_A \cdot 100 = \emptyset$$

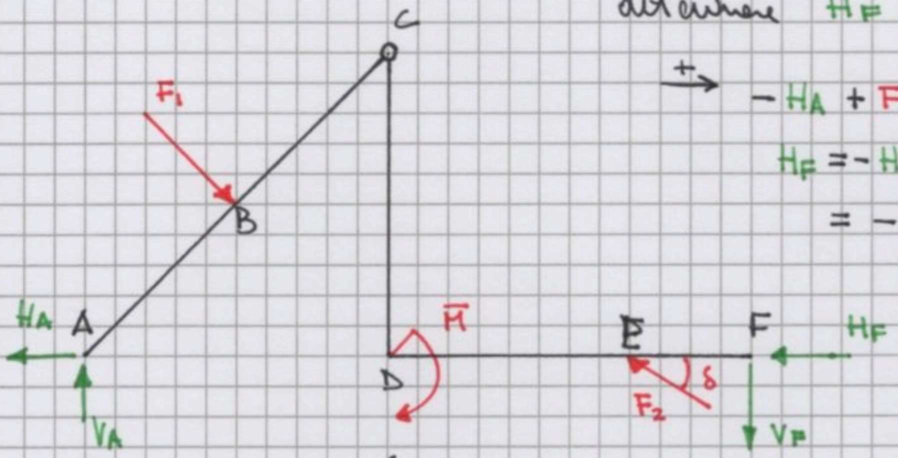
$$H_A = \frac{V_A \cdot 100 - F_1 L_{BC}}{100} = -551.9190\ N$$

Seguiamo lo stesso procedimento di prima cambiando segno ad $H_A$ e invertendo il vettore $\vec{H_A}$

ANALISI STATICA

$H_A = 551.9190$ N

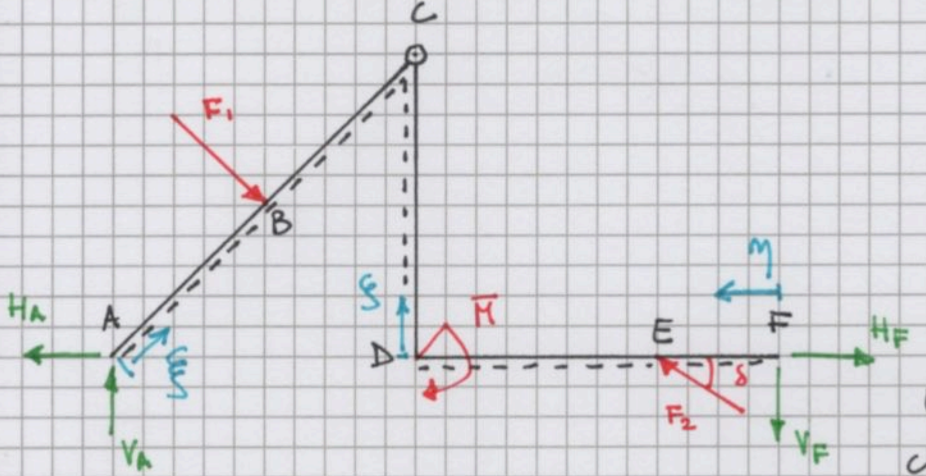
Con un semplice equilibrio alla traslazione orizzontale è immediato determinare $H_F$




$$\xrightarrow{+} \quad -H_A + F_1\cos(45) - F_2\cos(40) - H_F = 0$$

$$H_F = -H_A + F_1\cos(45) - F_2\cos(40) =$$
$$= -610.8567 \text{ N}$$

Anche in questo caso cambiamo segno a $H_F$ e ribaltiamo il vettore $\vec{H_F}$.




RIASSUNTO

$H_A = 551.9190$ N

$V_A = 155.1878$ N

$H_F = 610.8567$ N

$V_F = 90.8686$ N

Queste sono le reazioni che garantiscono l'equilibrio della struttura sotto le condizioni di carico imposte.

AZIONI INTERNE

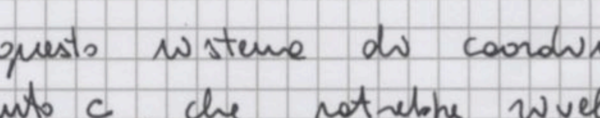
Per caratterizzare le azioni interne ci serviamo 3 coordinate curvilinee indipendenti:

$\xi$ → tratto AC : un taglio prima del punto B e un taglio prima del punto C.

$\eta$ → tratto FD : un taglio prima di E e un taglio prima del punto D.

$\zeta$ → tratto DC : un unico taglio prima del punto C.

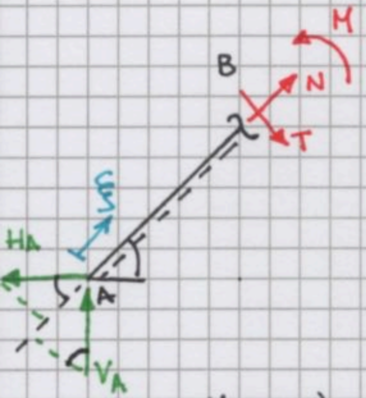
Con questo sistema di coordinate evitiamo lo svincolo del punto C, che potrebbe risultare complesso.
Le fibre che si considerano convenzionalmente tese sono riportate a tratteggio.




CONVENZIONE PER LE AZIONI INTERNE

AZIONI INTERNE 

TRATTO AB $\quad 0 < \xi < L_{AB}$




$$N_{AB} - H_A \cdot \cos(45) + V_A \sin(45) = \emptyset$$

$$\bullet\ N_{AB} = H_A \cos(45) - V_A \sin(45) = \underline{280.5314\ N}$$

$$T_{AB} - H_A \cdot \sin(45) - V_A \cdot \cos(45) = \emptyset$$

$$\bullet\ T_{AB} = H_A \sin(45) + V_A \cos(45) = \underline{500\,N}$$

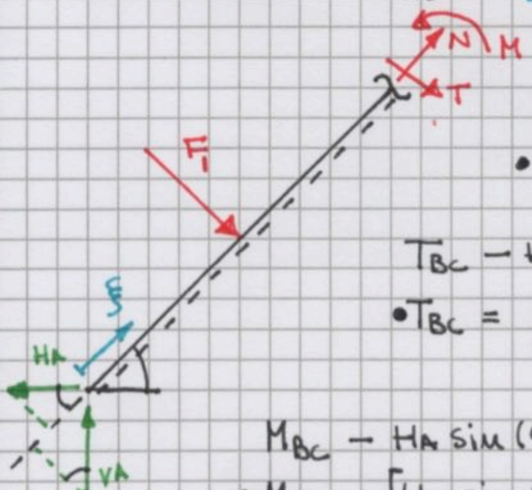
$$M_{AB} - H_A \cdot \sin(45)\,\xi - V_A \cos(45)\,\xi = \emptyset$$

$$\bullet\ M_{AB} = \left[H_A \sin(45) + V_A \cos(45)\right]\xi$$

$$M_{AB}(\emptyset) = \emptyset \qquad M_{AB}(L_{AB}) = 35355.3391\ N\cdot mm$$

Si noti che il momento è di carattere lineare $M_{AB} = M_{AB}(\xi)$ e che vale come al solito la relazione $T = \frac{dM}{d\xi}$.

TRATTO BC $\quad L_{AB} < \xi < L_{AC}$




$$N_{BC} - H_A \cdot \cos(45) + V_A \cdot \sin(45) = \emptyset$$

$$\bullet\ N_{BC} = H_A \cos(45) - V_A \sin(45) = N_{AB} = \underline{280.5314\,N}$$

$$T_{BC} - H_A \cdot \sin(45) - V_A \cdot \cos(45) + F_1 = \emptyset$$

$$\bullet\ T_{BC} = \underbrace{H_A \sin(45) + V_A \cos(45)}_{T_{AB}} - F_1 = \underline{-500\,N}$$

$$M_{BC} - H_A \sin(45)\,\xi - V_A \cos(45)\,\xi + F_1(\xi - L_{AB}) = \emptyset$$

$$\bullet\ M_{BC} = \left[H_A \sin(45) + V_A \cos(45)\right]\xi - F_1(\xi - L_{AB})$$

$M_{BC}(L_{AB}) = 35355.3391\ N\cdot mm = M_{AB}(L_{AB})$ $\rightarrow$ Non dovendo essere salto nel momento flettente a meno che non vi siano coppie applicate. In questo caso il salto è pari alla coppia.

$M_{BC}(L_{AC}) = \emptyset \rightarrow$ corretto, momento nullo alla cerniera C.

AZIONI INTERNE 

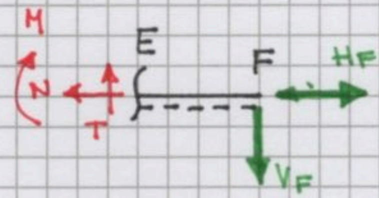
• TRATTO FE $\quad 0 < \eta < 40$

$N_{FE} - H_F = 0 \quad \bullet\, N_{FE} = +H_F = \underline{+610.8567\ N}$

$T_{FE} - V_F = 0 \quad \bullet\, T_{FE} = V_F = \underline{90.8686\ N}$

$M_{FE} + V_F\,\eta = 0 \quad \bullet\, M_{FE} = -V_F\,\eta$

$M_{FE}(0) = 0 \qquad M_{FE}(40) = -3634.7439\ Nmm$




Si osserva che vale ancora, a meno del segno, la relazione $T = \frac{dM}{d\eta}$.

• TRATTO ED $\quad 40 < \eta < 120$

$N_{ED} - H_F + F_2 \cdot \cos(\delta) = 0$

$\bullet\, N_{ED} = +H_F - F_2 \cos(\delta) = \underline{-155.1878\ N}$ ~~−1376.9911 N~~

$T_{ED} - V_F + F_2 \cdot \sin(\delta) = 0$

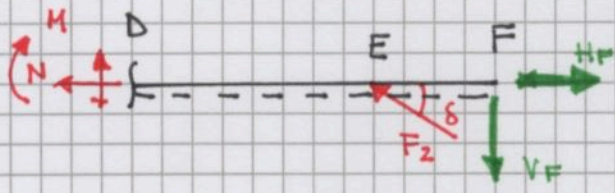
$\bullet\, T_{ED} = V_F - F_2 \sin(\delta) = -551.9190\ N$

$M_{ED} + V_F\,\eta - F_2 \cdot \sin(\delta)(\eta - 40) = 0$

$\bullet\, M_{ED} = -V_F\,\eta + F_2 \sin(\delta)(\eta - 40)$

$M_{ED}(40) = -3634.7439\ Nmm$

$M_{ED}(120) = 40518.7770\ N \cdot mm$




Il momento nel tratto ED cambia segno, quindi esiste un punto $\bar{\eta}$ per cui è nullo. Si calcola facilmente imponendo $M_{ED} = 0$

$$-V_F\,\bar{\eta} + F_2 \sin(\delta)\,\bar{\eta} - F_2 \sin(\delta)(40) = 0$$

$$\bar{\eta} = \frac{F_2 \sin(\delta)(40)}{F_2 \sin(\delta) - V_F} = 46.5856\ mm$$

• TRATTO DC $\quad 0 < \xi < 100$

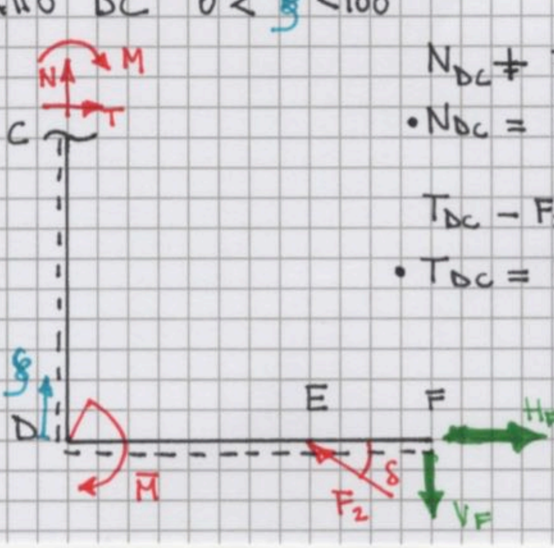
$N_{DC} + F_2 \sin(\delta) - V_F = 0$

$\bullet\, N_{DC} = V_F - F_2 \sin(\delta) = \underline{-551.9190}\ N$

$T_{DC} - F_2 \cos(\delta) + H_F = 0$

$\bullet\, T_{DC} = F_2 \cos(\delta) - H_F = \underline{155.1878\ N}$ ~~[illegible] N~~

$M_{DC} + \bar{M} \underbrace{- F_2 \sin(\delta)(80) + V_F \cdot (120)}_{\text{Braccio costante}} + F_2 \cos(\delta)\,\xi - H_F\,\xi = 0$



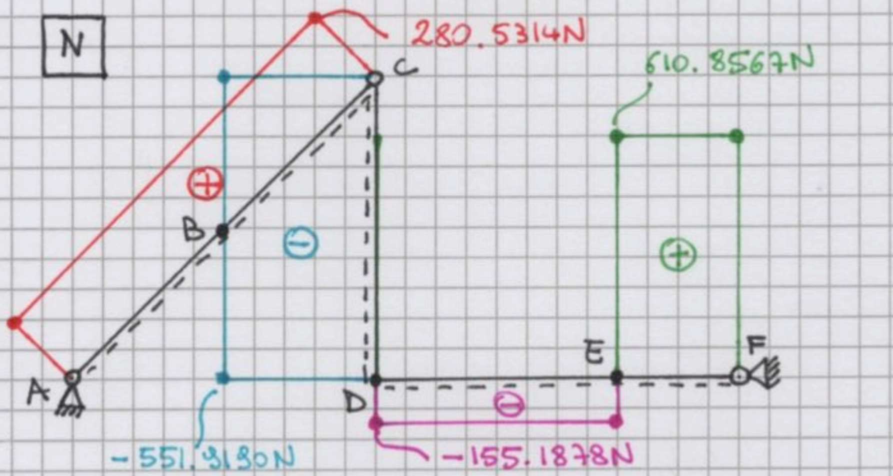
AZIONI INTERNE

$0 < \xi < 100$

$$\bullet\ M_{DC} = -\overline{M} + \underbrace{\left[F_2 \sin(\delta)(80) - V_F(120)\right]}_{\text{Momento di trasporto: braccio costante}} - \underbrace{\left[F_2 \cos(\delta) + H_F\right]\xi}_{M_{DC} = M_{DC}(}$$

$M_{DC}(\emptyset) = 15518.7770\ N \cdot mm$

$M_{DC}(100) = 2.31\ E{-11} \approx \emptyset\ N \cdot mm \rightarrow$ corretto, siamo sulla cerniera.




I diagrammi sono stati costruiti ricordando la convenzione di riportare i momenti positivi dalla parte delle fibre tese. Le altre azioni seguono la convenzione opposta.

OSSERVAZIONI

- I momenti nelle cerniere A, C, F sono nulli.
- Il salto dell'azione normale nel punto E è uguale a $F_{2x}$
- Il salto dell'azione tagliante nel punto B è pari a $F_1$ e nel punto E è pari a $F_{2y}$.
- I momenti sono continui in ogni tratto, a parte nel punto D, in cui è applicata la coppia $\overline{M}$. Difatti in tale punto si riscontra un salto tra $M_{CD}$ e $M_{DE}$ pari al valore della coppia.