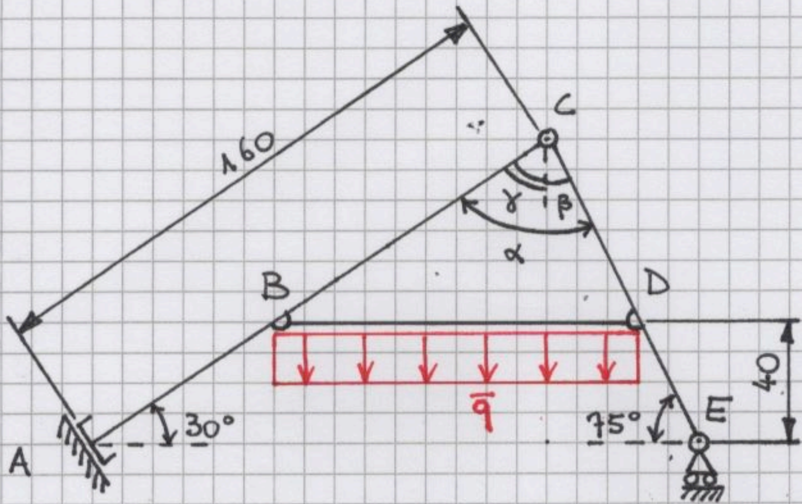
STRUTTURA ISOSTATICA 12/11/2018



DATI DI CARICO

$\bar{q} = 10\ N/mm$

STATICITÀ

N° ASTE : 3

GDL : $3 \cdot 3 = 9$

GDV : $2+2+2+2+1=9$

STRUTTURA ISOSTATICA

ANALISI CINEMATICA

La struttura nella sua globalità risulta un arco a tre cerniere chiuso su se stesso, e quindi non labile per definizione. È chiaramente che tra i vincoli a terra non esiste centro di istantanea rotazione comune, quindi la struttura è non labile.

CARATTERISTICHE GEOMETRICHE

$$\begin{cases} \alpha = 180° - (75+30) = 75° \\ \beta = 90 - 75 = 15° \\ \gamma = 90 - 30 = 60° \end{cases}$$

Per il teorema dei Seni : $\dfrac{L_{AC}}{\sin(75)} = \dfrac{L_{CE}}{\sin(30)}$

$$L_{CE} = \frac{\sin(30)}{\sin(75)} L_{AC} = 82.8221\ mm$$

$$\frac{L_{AC}}{\sin(75)} = \frac{L_{AE}}{\sin(\alpha)} \Rightarrow L_{AE} = L_{AC} = 160\ mm$$

$$L_{AB} = \frac{40}{\sin(30)} = 80\ mm \qquad L_{BC} = 160 - 80 = 80\ mm$$

$$\frac{L_{BC}}{\sin(75)} = \frac{L_{BD}}{\sin(\alpha)} \Rightarrow L_{BC} = L_{BD} = 80\ mm$$

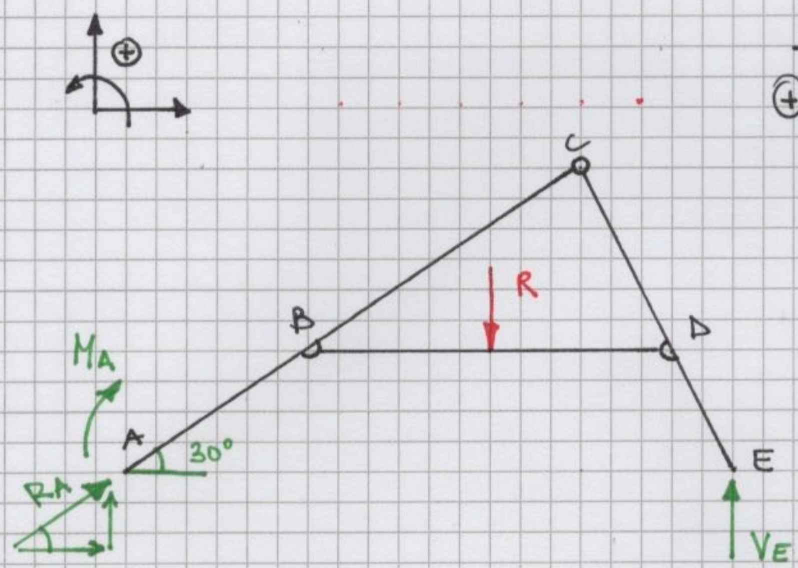
$$\frac{L_{BC}}{\sin(75)} = \frac{L_{CD}}{\sin(30)} \Rightarrow L_{CD} = \frac{\sin(30)}{\sin(75)} L_{BC} = 41.4110\ mm$$

$$L_{DE} = 82.8221 - 41.4110 = 41.4110\ mm$$

REAZIONI VINCOLARI

Si calcola inizialmente la risultante del carico distribuito $\overline{q}$.

$$R = \overline{q} \cdot L_{BD} = 800\ N$$



$\xrightarrow{+}$ $R_A \cdot \cos(30) = 0 \rightarrow R_A = 0$

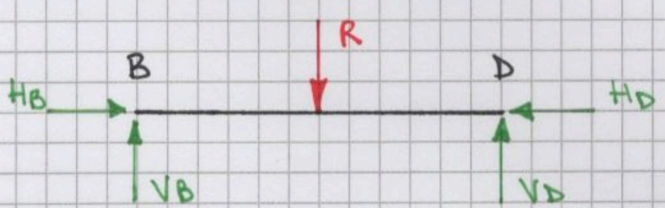
$\overset{+}{\uparrow}$ • $V_E = R = 800\ N$

$A)$ $-M_A - R\left(L_{AB} \cdot \cos(30) + 40\right) + V_E \cdot L_{AE} = 0$

$M_A = V_E L_{AE} - R\left(L_{AB} C_{30} + 40\right)$

• $M_A = 40574.3742\ N\,mm$

È importante in questo caso conoscere le reazioni che si trasmettono la trave BD e le travi AC e CE.
Procediamo all'equilibrio della trave BD.



$\xrightarrow{+}$ $H_B = H_D$

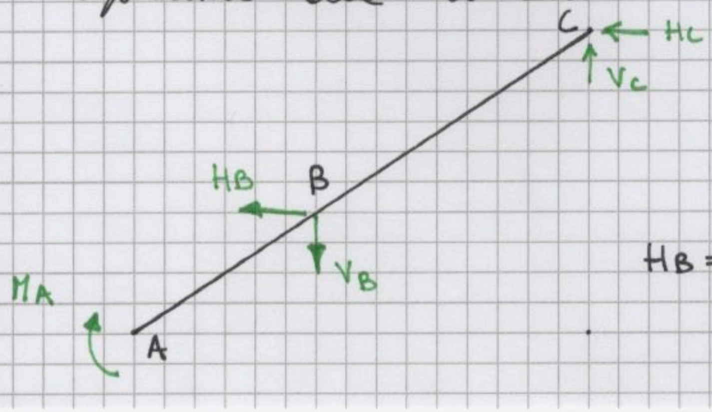
$\overset{+}{\uparrow}$ $V_B + V_D = R$

$B)$ $-R \cdot 40 + V_D \cdot 80 = 0$

• $V_D = \dfrac{R \cdot 40}{80} = \dfrac{R}{2} = 400\ N$

• $V_B = R - V_D = 400\ N$

Per calcolare il valore di H_B e H_D che risultano essere uguali è sufficiente operare un equilibrio alla rotazione svincolando l'asta AC.



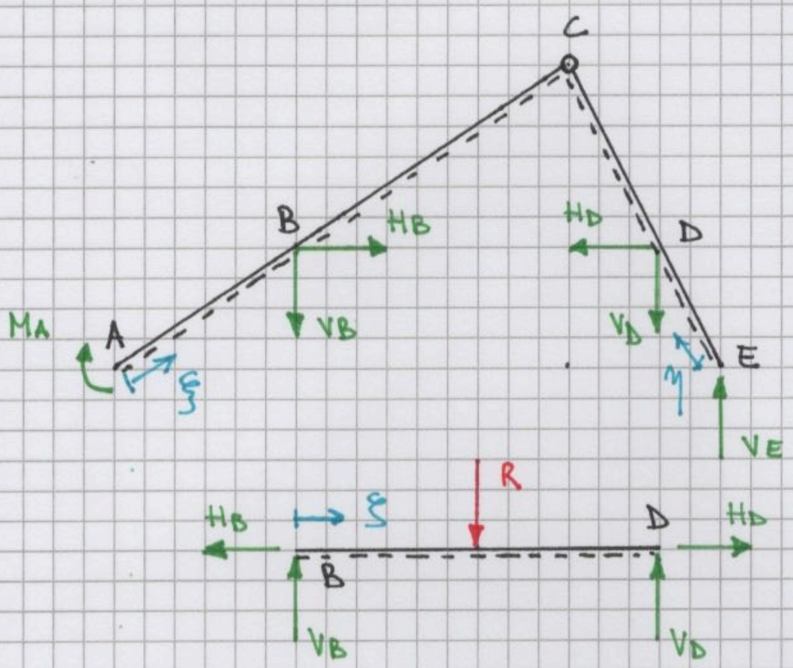
$C)$ $-M_A - H_B \cdot L_{BC} \cdot \sin(30) + V_B \cdot L_{BC} \cos(30) = 0$

$$H_B = \frac{-M_A + V_B L_{BC} \cos(30)}{L_{BC} \sin(30)} = -321.5330\ N$$

REAZIONI VINCOLARI

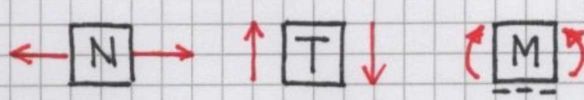
Come si è detto fare si inverte il segno di HB e si ribalta il vettore nel grafico. Si ottiene quindi

$H_B = H_D = 321.5330\ N$



$$\begin{cases} M_A = 40574.3742\ Nmm \\ H_B = 321.5330\ N \\ V_B = 400\ N \\ H_D = 321.5330\ N \\ V_D = 400\ N \\ V_E = 800\ N \end{cases}$$

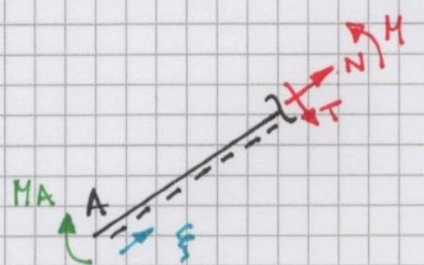
Per l'analisi delle azioni interne scegliamo 3 coordinate curvilinee: ξ, η e ζ



CONVENZIONI POSITIVE

AZIONI INTERNE

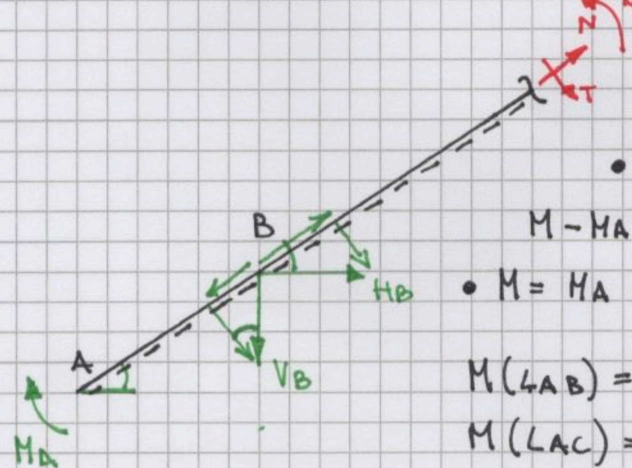
$0 < \xi < L_{AB}$



$N = T = \emptyset$

$M - M_A = \emptyset \quad \bullet M = M_A = 40574.3742\ Nmm$

$L_{AB} < \xi < L_{AC}$



$N + H_B \cos(30) - V_B \cdot \sin(30) = \emptyset$

$\bullet N = V_B \sin(30) - H_B \cos(30) = -78.4610\ N$

$T + V_B \cos(30) + H_B \sin(30) = \emptyset$

$\bullet T = -\left(V_B \cos(30) + H_B \sin(30)\right) = -507.1797\ N$

$M - M_A + V_B \cdot \cos(30)(\xi - L_{AB}) + H_B \sin(30)(\xi - L_{AB}) = \emptyset$

$\bullet M = M_A - \left[V_B \cos(30) + H_B \sin(30)\right](\xi - L_{AB})$

$M(L_{AB}) = M_A = 40574.3742\ Nmm$

$M(L_{AC}) = \emptyset \quad (-3.64\,e{-12}) \approx \emptyset$

AZIONI INTERNE

$0 < \eta < L_{ED}$

$$N + V_E \cdot \sin(75) = \phi$$

$$\bullet N = - V_E \cdot \sin(75) = -772.7407\ N$$

$$T + V_E \cdot \cos(75) = \phi$$

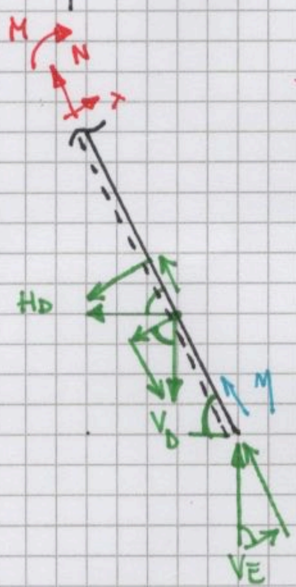
$$\bullet T = - V_E \cos(75) = -207.0552\ N$$

$$M - V_E \cdot \cos(75)\,\eta = \phi$$

$$\bullet M = V_E \cos(75)\,\eta \qquad M(\phi) = \phi$$

$$M(L_{ED}) = 8574.3742\ Nmm$$

$L_{ED} < \eta < L_{EC}$



$$N + V_E \cdot \sin(75) - V_D \cdot \sin(75) + H_D \cos(75) = \phi$$

$$N = V_D \sin(75) - V_E \sin(75) - H_D \cos(75)$$

$$\bullet N = -469.5908\ N$$

$$T + V_E \cdot \cos(75) - V_D \cdot \cos(75) - H_D \cdot \sin(75) = \phi$$

$$T = H_D \sin(75) + V_D \cos(75) - V_E \cos(75)$$

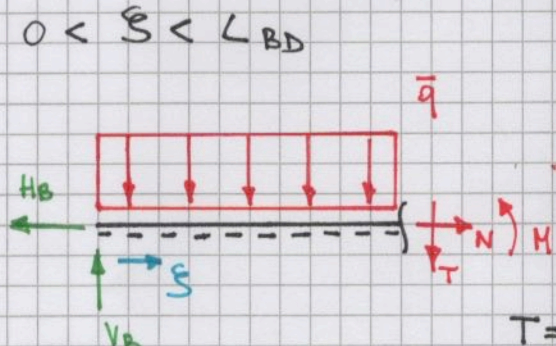
$$\bullet T = 207.0552\ N$$

$$M - V_E \cos(75)\,\eta + V_D \cos(75)(\eta - L_{ED}) + H_D \cdot \sin(75)\,(\eta - L_{ED}) = \phi$$

$$\bullet M = V_E \cos(75)\,\eta - \left[V_D \cos(75) + H_D \sin(75) \right] (\eta - L_{ED})$$

$$M(L_{ED}) = 8574.3742\ Nmm \qquad M(L_{EC}) = 9.42\,e{-12} \approx \phi$$

$0 < \xi < L_{BD}$



$$N - H_B = \phi \qquad \bullet N = H_B = 321.5390\ N$$

$$T - V_B + \bar{q}\,\xi = \phi$$

$$\bullet T = V_B - \bar{q}\,\xi \qquad T(\phi) = V_B = 400\ N$$

$$T(L_{BD}) = -400\ N$$

$$T = \phi \text{ in } \bar{\xi} = \frac{V_B}{q} = \underline{40\ mm}$$

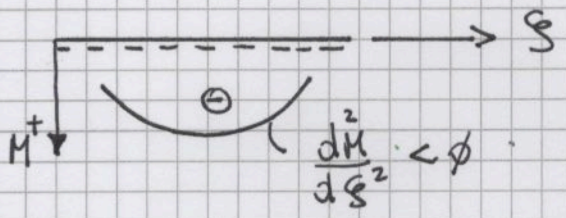
$$M - V_B\,\xi + \bar{q}\,\frac{\xi^2}{2} = \phi \qquad \bullet M = V_B\,\xi - \bar{q}\,\frac{\xi^2}{2}$$

$$M(\phi) = \phi \qquad M(\bar{\xi}) = 8000\ N\,mm \qquad M(L_{BD}) = \phi$$

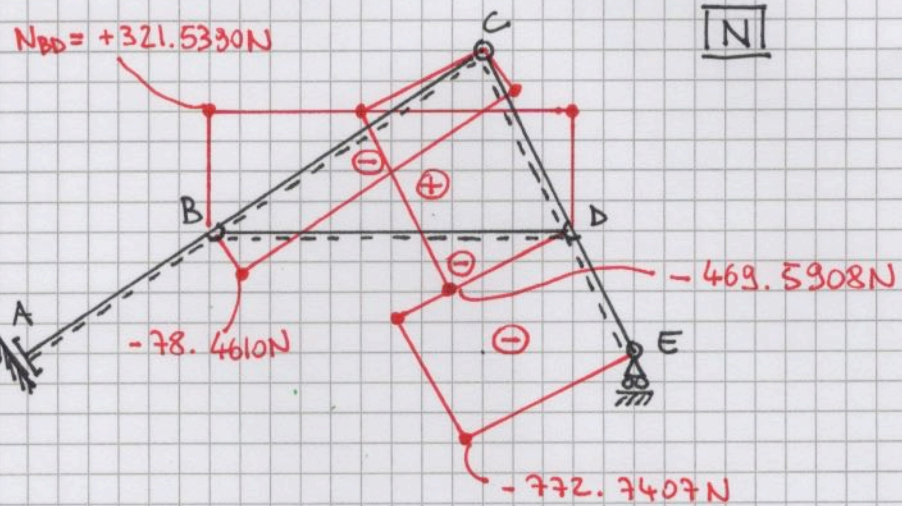
AZIONI INTERNE

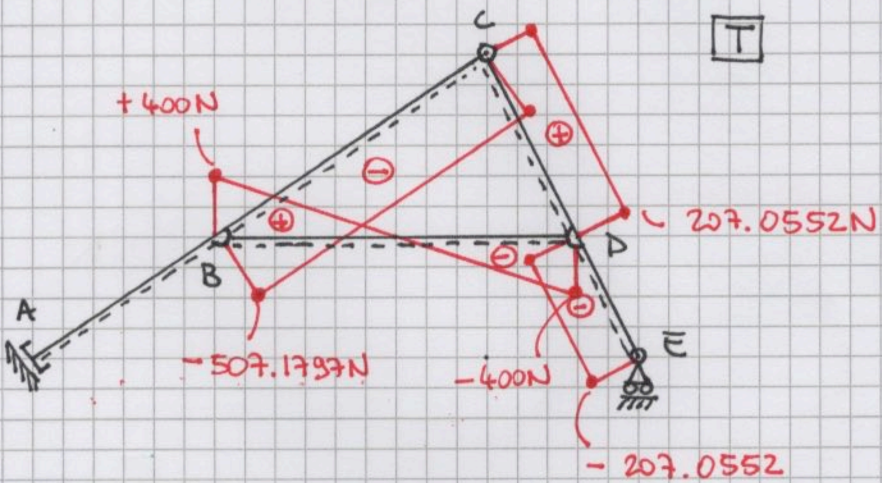
Per studiare la concavità del diagramma del momento è necessario effettuare la derivata seconda rispetto a ξ.

$$\frac{d^2M}{d\xi^2} = -\bar{q} < 0 \quad \rightarrow \quad \text{il momento è concavo}$$

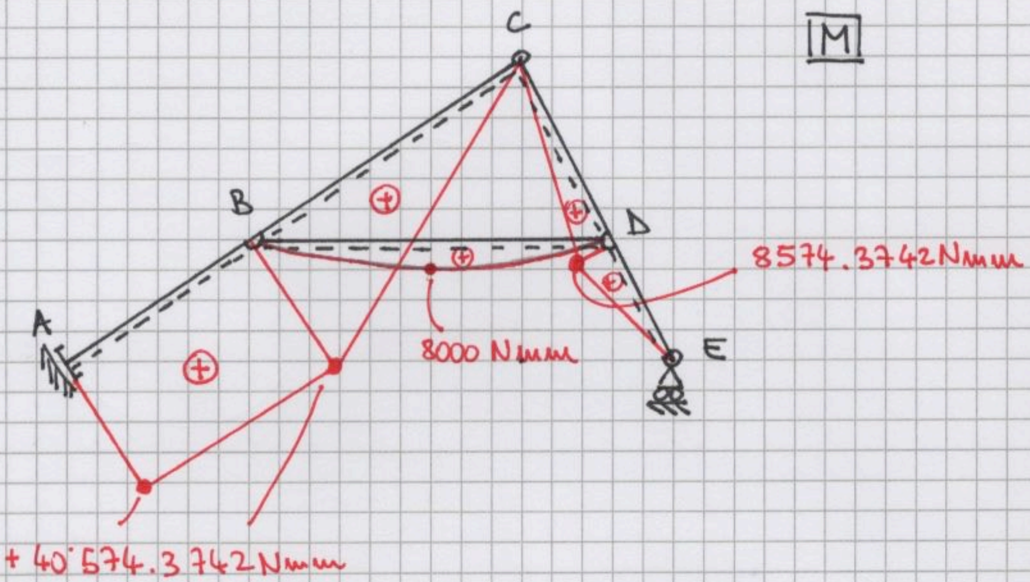


DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE





DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE



OSSERVAZIONI

- Il diagramma dei momenti è continuo in tutti i punti e nullo nelle cerniere.
- Non è nullo il momento delle travi AC e CE nelle cerniere interne B e D in quanto in dette non è permessa la rotazione del tratto AB rispetto al tratto BC e del tratto CD rispetto al tratto DE. Si chiamano cerniere passanti.