Introduzione alle stime del gradiente

per le equazioni ellittiche, con applicazioni allo studio dell'esistenza delle soluzioni classiche e delle soluzioni esplosive

Antonio Greco*

Riassunto.

In quanto segue cerco di rispondere alla domanda "Cosa sono e a che servono le stime del gradiente" fornendo degli esempi e delle applicazioni a problemi quasilineari, e con un occhio di riguardo al tema del *blow-up* sul contorno, che ha costituito il mio principale argomento di ricerca in questi ultimi tempi. Anzi, è stato proprio lo studio dell'esistenza delle soluzioni esplosive che mi ha obbligato a dare importanza alle stime del gradiente, cosa che non mi sarei mai sognato di fare, ed a restarne perfino affascinato. Non riporto la dimostrazione di tutti i teoremi citati, anche perché non la conosco, ma indico dove trovarla. Spero che in tal modo il lettore possa gettare uno sguardo d'insieme a questa problematica, restando libero di approfondire le parti che più gli interessano.

Indice.

*Dipartimento di Matematica, via Ospedale 72, I-09124 Cagliari. *E-mail:* greco@vaxca1.unica .it, URL: http://riemann.unica.it/~antoniog 30-9-1997

1. Cosa sono le stime del gradiente.

1.1. Esempio: Una stima globale in dimensione 1.

Indicato con S_M il sottoinsieme di $C^2([0,1])$ costituito dalle funzioni u tali che $|u| \leq M$ e $|u''| \leq M$, esiste una costante $C = C(M)$ tale che $|u'| \leq C$ per ogni $u \in S_M$.

Intuitivamente, se u'' è piccola il grafico di u non può fare delle curve troppo strette e quindi, se la sua pendenza in un dato punto fosse molto grande, finirebbe con l'uscire fuori dalla striscia $|u| \leq M$.

Più precisamente, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la limitazione $|u''| \leq M$ implica $|u'(x) - u'(y)| \leq M$ per ogni $x, y \in [0,1]$, dunque una limitazione sull'oscillazione di u'. D'altra parte, per il teorema del valor medio, e per l'ipotesi $|u| \leq M$, esiste un punto $\xi \in (0,1)$ tale che $|u'(\xi)| \leq 2M$. Le due cose insieme implicano che $|u'(x)| \leq 3M$ per ogni $x \in [0,1]$, dunque si può prendere $C(M) = 3M$.

1.2. Differenza tra stime interne e stime globali.

Per semplificare, diciamo per ora che una "stima globale" per una data equazione è un enunciato del tipo: "per ogni $M > 0$ esiste una costante $C = C(M)$ tale che se u risolve l'equazione, e se $|u| \leq M$ in Ω, allora $|Du| \leq C$ in Ω".

Una "stima interna" invece è un enunciato del tipo "per ogni $M > 0$ e per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ esiste una costante $C = C(M, \Omega')$ tale che se u risolve l'equazione, e se $|u| \leq M$ in Ω, allora $|Du| \leq C$ in Ω'".

1.3. Esempio: Una stima interna per le funzioni armoniche.

Seguiamo l'idea descritta nel paragrafo 2.7 di [4], p. 22. Prendiamo una funzione u, armonica in un dominio $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ e soddisfacente la condizione $|u| \leq M$ in Ω, prendiamo un dominio $\Omega' \subset\subset \Omega$ e fissiamo un $\delta < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Scelto un punto $x \in \Omega'$, vogliamo stimare una (qualunque) derivata parziale $u_i(x)$.

Sfruttiamo il fatto che le derivate di una funzione armonica sono a loro volta armoniche, quindi hanno la seguente proprietà di media:

$$u_i(x) = \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int_{B(x,\delta)} u_i(y)\, dy$$

Applicando il teorema della divergenza si trova:

$$|u_i(x)| \leq \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int_{\partial B(x,\delta)} |u(s)|\, ds \leq \frac{1}{\omega_N\, \delta^N}\, M\, \sigma_N\, \delta^{N-1},$$

dove $\omega_N = |B(0,1)|$ e $\sigma_N = |\partial B(0,1)|$, essendo $B(0,1)$ la sfera unitaria in $\mathbf{R}^N$. Poiché $\sigma_N = N\,\omega_N$ si trova, infine, $|u_i(x)| \leq MN/\delta$.

Conservandosi l'armonicità sotto rotazioni degli assi coordinati, nulla impedisce di dare all'asse x_i la direzione di $\nabla u(x)$: in tal modo la stima precedente mostra che $|\nabla u(x)| \leq MN/\delta$, e questo vale per qualunque $x \in \Omega'$. Abbiamo dunque una stima interna del gradiente. Ovviamente, facendo tendere δ a $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ otteniamo la stima più stretta $|\nabla u(x)| \leq MN/\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

1.4. (Contro)Esempi: non valgono stime globali per le funzioni armoniche.

1) $\Re \sum z^{n^2}/n^2$ è armonica nel disco $|z| < 1$, continua fino al contorno, ma il gradiente è singolare nel punto $(1, 0)$ (basta derivare termine a termine).
2) $\Im \log(i\,(1+z)/(1-z))$ è armonica nel disco $|z| < 1$ e, siccome $\Im \log z = \arg z$, si trova che vale π sulla semicirconferenza con $y > 0$, vale 0 sull'altra semicirconferenza, non è definita nei punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, vale $\pi/2$ sul segmento che li congiunge e vale $\pi(y+1)/2$ per $x = 0$ ([2], p. 148).

In effetti la possibilità di avere stime globali è legata, come vedremo meglio in seguito, alla forma del dominio ed alla regolarità dei valori di u sul contorno.

2. A che servono le stime del gradiente.

Le stime globali servono per dimostrare l'esistenza di una soluzione classica del problema di Dirichlet. Essenzialmente, tramite il teorema di Ascoli-Arzelà, esse implicano che una successione di soluzioni ha una sottosuccessione convergente, e cioè danno una proprietà di compattezza sulla quale si imperniano i teoremi topologici di esistenza (punto fisso, metodo di continuità).

Solitamente, a partire da stime globali del gradiente, si ricavano stime di u in $C^{2,\alpha}$ (stime di Schauder) e si ha quindi l'equicontinuità non solo di una data successione di soluzioni, ma anche delle loro derivate prime e seconde, il che implica che il limite di tale successione è ancora soluzione dell'equazione data.

Le stime interne servono sia come passo preliminare per arrivare a stime globali, sia, direttamente, per dimostrare l'esistenza di una soluzione di *blow-up*, come descritto nel paragrafo 7. Ovviamente, non esistono stime globali per tali soluzioni, almeno nel senso qui definito. Esistono stime che consistono nel dare una particolare funzione, illimitata sul contorno, il cui gradiente è asintoticamente simile a quello della soluzione. Tali stime vengono dette "stime asintotiche" ([1]).

3. Una stima interna per equazioni quasilineari uniformemente ellittiche.

Consideriamo l'equazione

$$\operatorname{div}(g(|\nabla u|)\,\nabla u) = f(x, u, \nabla u) \tag{3.1}$$

in un dominio $\Omega \subset \mathbf{R}^N$. Supponiamo che $g(t)$ sia una funzione positiva per $t \geq 0$, e che sia positiva anche la quantità $G(t) := g(t) + t\, g'(t)$. Essendo g e G gli autovalori della forma caratteristica associata all'operatore, queste due condizioni danno l'ellitticità dell'equazione.

Facciamo l'ipotesi che esista un $\tau > -1$ tale che

$$0 < \liminf_{t \to +\infty} G(t)/t^\tau \leq \limsup_{t \to +\infty} G(t)/t^\tau < +\infty, \tag{3.2}$$

e che esista una funzione positiva $\mu(t)$ tale che per ogni $u \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}^N$ ed $x \in \Omega$

$$|f(x, u, p)| \leq \mu(|u|)(1 + |p|)^{\tau+2}. \tag{3.3}$$

Preso a piacere $M > 0$, indichiamo con S_M l'insieme delle soluzioni $u \in C^2(\Omega)$ dell'equazione (3.1) tali che $|u| \leq M$ in Ω. Si ha:

Teorema 3.1. *Per ogni dominio $\Omega' \subset\subset \Omega$ esiste una costante $C = C(\Omega', M, \tau, \mu(M))$ tale che $|\nabla u(x)| \leq C$ per ogni $x \in \Omega'$ e per ogni $u \in S_M$.*

Per la dimostrazione di questo risultato si veda il più generale T. 3.1 del cap. IV di [6]. Qui faremo solo qualche semplice considerazione per mettere in evidenza il ruolo delle ipotesi.

La condizione $\tau > -1$ è una condizione di uniforme ellitticità. Infatti se $G(t) \sim t^\tau$ con un $\tau > -1$ si deduce che anche $g(t) \sim t^\tau$ e dunque il rapporto $g(t)/G(t)$ è limitato e lontano da zero. Alla stessa conclusione non si perviene invece se $G(t) \sim t^{-1}$, in tal caso si ha infatti $g(t) \sim \log t/t$ ed il rapporto $g(t)/G(t)$ tende all'infinito per $t \to +\infty$. Ma l'esempio più classico di operatore quasilineare non uniformemente ellittico è dato dall'operatore della curvatura media, per il quale si ha $g(t) = (1 + t^2)^{-1/2} \sim t^{-1}$ e $G(t) = (1+t^2)^{-3/2} \sim t^{-3}$. L'uniforme ellitticità fa assomigliare un'equazione a quella di Laplace, che è il prototipo di equazione uniformemente ellittica.

Il ruolo della condizione (3.3), che sembra più oscuro, viene messo in evidenza dal seguente risultato unidimensionale.

Proposizione 3.2. *Consideriamo l'equazione $u'' = f(u')$ in un intervallo (a, b), con f funzione positiva. Se $f(t) = O(t^2)$ per $|t| \to +\infty$, allora per ogni $M > 0$ esiste $C = C(M)$ tale che se u è una qualunque soluzione soddisfacente $|u| \leq M$ in (a, b), si ha $|u'| \leq C$ in (a, b).*

Dimostrazione. Dall'equazione ricaviamo $u'\, u''/f(u') = u'$, e, scelto x_0 in modo che $|u'(x_0)| \leq 2M/(b - a)$, integrando da x_0 ad x troviamo

$$\int_{u_0'}^{u'} t\, dt/f(t) = u - u_0.$$

La condizione $f(t) = O(t^2)$ fa sì che l'integrale diverga per $|u'| \to +\infty$. Ma poiché il secondo membro è limitato, anche u' deve essere limitata. $\square$

4. Stime globali per equazioni uniformemente ellittiche.

Un metodo per ottenere stime globali è il seguente: provare un principio del massimo per il gradiente, in modo da poter stimare $\max_{\overline{\Omega}} |\nabla u|$ con $\max_{\partial\Omega} |\nabla u|$, e poi stimare la seconda quantità con delle opportune *funzioni barriera*.

4.1. Principio del massimo per il gradiente.

Se la nostra equazione è $\Delta u = 0$, si dimostra facilmente che la funzione $v := |\nabla u|$ soddisfa il principio del massimo. In realtà il risultato si può estendere ad equazioni più generali. Un risultato in tal senso è il seguente:

Teorema 4.1. *Supponiamo che una funzione* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *soddisfi l'equazione* (3.1) *nel dominio limitato* Ω *e la renda ellittica* ($g, G > 0$). *Se* f *non dipende da* x *e se* $f_u \geq 0$ *allora* $\max_{\overline{\Omega}} |\nabla u| \leq \max_{\partial\Omega} |\nabla u|$.

Dimostrazione. Si veda il paragrafo 15.1 di [4], p. 359, che presenta un risultato più generale. □

4.2. Funzioni barriera.

La possibilità di costruire delle funzioni barriera è legata sia alla *forma del dominio* che alla regolarità dei *valori al contorno*. Ma cosa si intende per *funzione barriera*? Preso un punto $y \in \partial\Omega$, si dice *barriera* (inferiore) nel punto y una funzione w definita in un intorno $\mathcal{N} \subset \mathbf{R}^N$ di y tale che $u \geq w$ in $\Omega \cap \mathcal{N}$ e $u(y) = w(y)$.

Se noi sappiamo che, come spesso accade, il gradiente di u sul contorno di Ω è diretto come la normale esterna, allora l'esistenza di una barriera inferiore per ogni $y \in \partial\Omega$, con gradiente limitato uniformemente rispetto ad y, implica la limitatezza di ∇u su $\partial\Omega$.

La costruzione di tali barriere per equazioni uniformemente ellittiche può avvenire sotto condizioni piuttosto generali. In particolare, si richiede una certa regolarità di $\partial\Omega$ ma non si impongono condizioni sulla curvatura, tipiche invece per le equazioni non uniformemente ellittiche.

Teorema 4.2. *Supponiamo che una funzione* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *soddisfi l'equazione* (3.1) *nel dominio limitato* Ω*, e che questo, a sua volta, soddisfi uniformemente la condizione della sfera esterna. Se valgono la* (3.2) *e la* (3.3) *allora* $\max_{\partial\Omega} |\nabla u| \leq C$*, dove* C *dipende dall'equazione, da* N*, dal massimo di* $|u|$ *su* $\overline{\Omega}$*, dal raggio della sfera esterna e dalla norma* $|\phi|_2$*, dove* ϕ *è la restrizione di* u *su* $\partial\Omega$.

Dimostrazione. Si veda il più generale Theorem 14.1 di [4], p. 337. □

5. Stime globali per equazioni non uniformemente ellittiche.

Se l'equazione (3.1) non è uniformemente ellittica, la forma del dominio è particolarmente importante al fine di ottenere delle stime globali del gradiente. A titolo di esempio, consideriamo il caso in cui $f(x, u, \nabla u)$ si può scrivere come $f(u)\, k(|\nabla u|)$, con f e k positive e f crescente. Tutto il libro di Sperb [8] è dedicato allo studio del principio del massimo per la funzione $\psi = H(|\nabla u|) - F(u)$, dove F è una primitiva (non negativa) di f e $H(t) := \int_0^t G(|s|)\, s \,/\, k(|s|)\, ds$ (si veda anche il lavoro di Payne e Philippin [7]).

Si dimostra che ψ assume il massimo su $\partial\Omega$, oppure in qualche punto critico di u (cioè in qualche punto x_0 tale che $\nabla u(x_0) = 0$). Si dimostra inoltre che se $\partial\Omega$ ha la curvatura media non negativa, allora, indicata con n la normale esterna e posto $\psi_n = \nabla\psi \circ n$, si ha $\psi_n|_{\partial\Omega} \leq 0$. In tal caso, per il lemma di Hopf, il massimo di ψ deve trovarsi dove $\nabla u = 0$, e quindi, per la definizione di ψ, si ha $\max \psi = F(u(x_0))$. Ne segue $H(|\nabla u|) \leq \psi \leq F(u(x_0))$. Se dunque $|u| \leq M$ in Ω, e se la funzione $H(t)$ è illimitata (per $|t| \to +\infty$), se ne ricava una stima globale del gradiente.

Per mettere in evidenza la necessità delle condizioni sulla geometria del contorno, ricordiamo un fondamentale risultato riguardante il problema di Plateau, cioè il problema di trovare la superficie di area minima avente per contorno una linea data:

Teorema 5.1. *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio limitato di classe C^2. Una soluzione di $\mathrm{div}(\nabla u/\sqrt{1 + |\nabla u|^2}) = 0$ in Ω tale che $u|_{\partial\Omega} \equiv \phi$ esiste per ogni ϕ continua se e solo se $\partial\Omega$ ha la curvatura media non negativa.*

Dimostrazione. Si veda il più generale Theorem 16.11 di [4], p. 409. □

D'altra parte, per particolari valori di ϕ, si ha esistenza anche se la curvatura media di una parte del contorno è negativa. Siano $\mathcal{G}_1 \subset\subset \mathcal{G}_2 \subset \mathbf{R}^2$ due aperti limitati e contrattili di classe $C^{2,\alpha}$ per qualche $\alpha \in (0, 1)$. Posto $\Omega := \mathcal{G}_2 \setminus \overline{\mathcal{G}}_1$, consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\Big(\nabla u/\sqrt{1 + |\nabla u|^2}\Big) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u \equiv m \quad \text{su } \partial\mathcal{G}_1, \\ u \equiv 0 \quad \text{su } \partial\mathcal{G}_2. \end{cases}$$

Teorema 5.2. *Esiste una costante positiva $M = M(\Omega)$ tale che il problema precedente ammette soluzione classica per ogni $|m| < M$.*

Dimostrazione. Applicando i risultati del paragrafo seguente, il problema si riduce alla costruzione di *barriere* che diano delle stime di $|\nabla u|$ al contorno. Come barriere si possono prendere le soluzioni del medesimo problema in opportune corone circolari. L'esistenza di tali soluzioni si ha se e solo se m è sufficientemente piccola ([5], Esempio 12.15). □

6. Dalle stime globali all'esistenza di una soluzione classica.

Cominciamo con un teorema di esistenza per l'equazione (3.1). Indicato con Q l'operatore definito da $Qu := \operatorname{div}(g(|\nabla u|)\,\nabla u)$, si ha:

Teorema 6.1. *Sia Ω un dominio limitato di $\mathbf{R}^N$, con $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $g \in C^{1,\alpha}(\mathbf{R})$ ed $f \in C^\alpha(\overline{\Omega} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ per un $\alpha \in (0,1)$. Supponiamo che anche i valori al contorno ϕ siano di classe $C^{2,\alpha}$, e che g e G siano positive (ellitticità). Condizione sufficiente per l'esistenza di una soluzione $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ dell'equazione (3.1), con $u|_{\partial\Omega} = \phi$, è che l'insieme*

$$\{\, u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid \exists \sigma \in [0,1]\colon\ Qu = \sigma f,\ u|_{\partial\Omega} = \sigma\phi \,\}$$

sia limitato in $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ per qualche $\beta > 0$.

Dimostrazione. Si veda il più generale Theorem 11.4 di [4], p. 281. □

Per applicare questo teorema si può seguire la procedura descritta a pagina 282 di [4], e cioè:

I. stimare $\max_{\overline{\Omega}} u$;

II. stimare $\max_{\partial\Omega} |\nabla u|$ in termini di $\max_{\overline{\Omega}} u$;

III. stimare $\max_{\overline{\Omega}} |\nabla u|$ in termini di $\max_{\partial\Omega} |\nabla u|$ e di $\max_{\overline{\Omega}} u$;

IV. stimare la norma di $|\nabla u|$ in $C^\beta(\overline{\Omega})$, per qualche $\beta > 0$, in termini di $\max_{\overline{\Omega}} |\nabla u|$ e di $\max_{\overline{\Omega}} u$.

Ammettiamo, per semplificare le cose, che f sia crescente in u e nulla per $u \leq 0$. Per esempio si può pensare ad $f(u) = u^p$ per $u > 0$ con un p positivo. Prendiamo inoltre $\phi \equiv m$ costante positiva. Il punto I allora è immediato, infatti, per il principio del massimo, la soluzione (unica) di $Qu = \sigma f$ che vale m sul contorno è compresa tra 0 e m.

Il punto IV si svolge sotto ipotesi piuttosto generali:

Teorema 6.2. *Supponiamo che una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soddisfi l'equazione (3.1) nel dominio limitato Ω, con $\partial\Omega \in C^2$, $g \in C^1(\mathbf{R})$ ed $f \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$. Supponiamo che anche i valori al contorno ϕ siano di classe C^2, e che g e G siano positive (ellitticità). Allora esiste un $\beta > 0$ dipendente da N, g, Ω, $|u|_1$, tale che la norma di ∇u in $C^\beta(\Omega)$ si può maggiorare con una costante che dipende da N, g, f, Ω, $|u|_1$, $|\phi|_2$.*

Dimostrazione. Si veda il più generale Theorem 13.2 di [4], p. 323. □

I punti II e III non sono altro che una stima globale del gradiente.

7. Dalle stime interne e dalle soluzioni classiche alle soluzioni esplosive.

Per dimostrare l'esistenza di una soluzione esplosiva, per $N \geq 2$, solitamente si parte con una soluzione u_m che assume un valore costante (e finito) m al contorno, e poi si fa tendere m a $+\infty$. Per il principio del confronto, u_m cresce con m e quindi ha un limite u. Questa u è candidata a risolvere il problema.

Affinché questa procedura funzioni, si devono svolgere i seguenti tre passi:

i) dimostrare l'esistenza di una soluzione u_m soddisfacente $u_m|_{\partial\Omega} \equiv m$;

ii) trovare una maggiorazione dal di sopra per u_m che impedisca al suo limite u di essere infinito;

iii) trovare una stima interna per il gradiente ∇u_m che obbliga u ad essere ancora una soluzione.

I punti i) e iii) sono stati già discussi nei paragrafi precedenti. Per quanto riguarda il punto ii) precisiamo che, solitamente, una maggiorazione dal di sopra per u_m si ottiene tramite il principio del confronto dopo aver dimostrato l'esistenza di soluzioni esplosive a simmetria sferica in sfere di raggio arbitrariamente piccolo. Per dimostrare l'esistenza nelle sfere piccole si studia il corrispondente problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria. Maggiori dettagli ed indicazioni bibliografiche si possono trovare in [3].

Bibliografia.

[1] C. Bandle, M. Marcus, *Large solutions of semilinear elliptic equations: existence, uniqueness and asymptotic behaviour,* J. Anal. Math. **58** (1992), 9–24.

[2] A. V. Bitsadze, Partial Differential Equations, World Scientific Publishing Co., Singapore 1994.

[3] E. Francini, A. Greco, *Blow-up in exterior domains: existence and starshapedness,* preprint by CNR-IAGA (1997).

[4] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1983.

[5] E. Giusti, Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation, Birkhäuser, Boston Basel Stuttgart 1984.

[6] O. A. Ladyženskaja, N. N. Ural'ceva, Équations aux Dérivées Partielles de Type Elliptique, Dunod, Paris 1968.

[7] L. E. Payne, G. A. Philippin, *Some maximum principles for nonlinear elliptic equations in divergence form with applications to capillary surfaces and to surfaces of constant mean curvature,* Nonlinear Anal. **3** (1979), 193–211.

[8] R. Sperb, Maximum principles and their applications, Academic Press, New York 1981.