

Premessa

La geometria euclidea classica rappresenta uno dei pilastri su cui si basa il sapere scientifico moderno. Inoltre, lo studio di questi argomenti è estremamente utile per sviluppare le capacità di ragionamento logico e l'intuizione matematica. Purtroppo, però, l'importanza della geometria euclidea è generalmente poco riconosciuta nei percorsi di studio proposti nelle scuole superiori. Questo file.pdf non rappresenta assolutamente una trattazione completa dell'argomento, ma semplicemente si prefigge di stimolare interesse, curiosità e sensibilità verso la geometria euclidea e, soprattutto, riguardo ai tipi di ragionamento matematico che essa richiede.

Nella seconda parte di questo lavoro presenteremo una breve introduzione alla trigonometria, che rappresenta un ramo fondamentale nello sviluppo del moderno *calculus*, ed ha le sue radici proprio all'interno della geometria euclidea classica.

Questo lavoro è tratto dai contenuti del libro:

MATEMATICA: 2³ CAPITOLI PER TUTTI

Stefano Montaldo e Andrea Ratto

Liguori Editore (2011) pp. 1-272.

ISBN: 978-88-207-5511-9

Cagliari, 28 Novembre 2015

Andrea Ratto

Indice

Premessa	i
1 Geometria euclidea	1
1.0 Scopi del capitolo	1
1.1 Circonferenza e poligoni inscritti o circoscritti	4
1.2 Il Teorema di Pitagora	20
1.3 Teorema di Talete e concetto di similitudine	25
1.4 Esercizi di riepilogo	33
1.5 Elementi di geometria solida	38
1.6 Esercizi proposti	46
1.7 Commenti	47
2 Elementi di trigonometria	49
2.0 Scopi del capitolo	49
2.1 Le funzioni trigonometriche fondamentali	50
2.2 Ulteriori esempi di identità trigonometriche	57
2.3 Esercizi di riepilogo	60
2.4 Le funzioni trigonometriche inverse	67
2.5 Esercizi proposti	71
2.6 Commenti	72
Soluzioni degli esercizi proposti	73
Indice analitico	75

1

Geometria euclidea

1.0 Scopi del capitolo

Secondo Galileo Galilei l'universo è un libro scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche. Lo studio dei pianeti in astronomia, ad esempio, presenta forme geometriche riconducibili a cerchi, sfere ed ellissi. Le celle degli alveari hanno tipicamente carattere esagonale e offrono un esempio di simmetria che, in natura, è sinonimo di ordine e stabilità. L'importanza del linguaggio geometrico per capire il mondo reale era già nota nell'antico Egitto e poi in Grecia, dove, intorno al 300 a.C., Euclide, nei suoi celeberrimi *Elementi*, riassunse il sapere matematico allora esistente ed elaborò una prima trattazione sistematica delle proprietà fondamentali delle figure geometriche.

Gli Elementi di Euclide sono costituiti da tredici libri: i primi sei riguardano la geometria piana, dal settimo al nono vengono discusse alcune questioni aritmetiche, il decimo affronta questioni geometriche legate ai numeri irrazionali e negli ultimi tre viene trattata la geometria solida.

In questo primo capitolo, considerata la notevole complessità e vastità dell'argomento, ci limiteremo a lavorare essenzialmente nel contesto della *geometria piana*; per completezza, nel §1.5 richiameremo però alcune importanti formule di geometria solida.

L'impostazione di Euclide, in seguito ripresa e formalizzata in senso moderno da molti illustri matematici, quali ad esempio D. Hilbert intorno al 1900, è basata sul cosiddetto *metodo assiomatico-deduttivo*, i cui punti caratterizzanti possono, almeno a questo livello di trattazione, essere sintetizzati come segue:

1. Si assumono alcuni cosiddetti *concetti primitivi*, cioè per i quali non si fornisce nessuna esplicita definizione (ad esempio: punto, retta, piano).
2. Si assumono alcune proposizioni, dette *assiomi* o *postulati*¹, che si decide di accettare come vere senza ulteriori giustificazioni.
3. Si definisce ogni nuovo oggetto della teoria mediante precise definizioni (ad esempio: un poligono si dice regolare quando ha tutti i lati e gli angoli congruenti). Si noti che, per poter dare questa definizione, bisogna prima aver fatto il (non immediato!) lavoro di definire i concetti di poligono, angolo, lato e congruenza.
4. Mediante un insieme di ragionamenti logico-deduttivi, chiamati *dimostrazioni*, si deducono (usando assiomi, concetti primitivi, eventuali definizioni) altre proposizioni, dette *teoremi* (ad esempio: il Teorema di Pitagora).

Detto questo, è bene sottolineare da subito che i più naturali e importanti sviluppi di ogni teoria deduttiva sono, nella pratica reale, stimolati da ragionamenti *di tipo induttivo*, cioè mirati ad evincere proprietà di carattere generale mediante l'osservazione di casi particolari (sinteticamente, diciamo dal particolare al generale). In questo ordine di idee, osservando la Figura 1.1 possiamo senz'altro *congetturare* che, fissati i due lati a , b e l'angolo α , risulti individuato in modo univoco un triangolo. Guidato

¹I cinque postulati di Euclide:

- I Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
- II Si può prolungare un segmento oltre i due estremi indefinitamente.
- III Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio.
- IV Tutti gli angoli retti sono uguali.
- V Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando le due rette esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due retti.

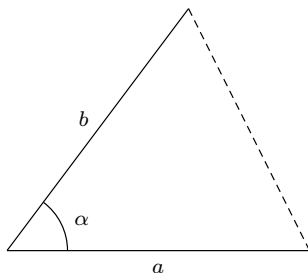


Figura 1.1 – Due lati e l'angolo tra essi compreso individuano un unico triangolo.

da questa intuizione il matematico, attraverso il metodo logico-deduttivo, perviene a stabilire il seguente:

Teorema 1.1 (Primo criterio di congruenza per i triangoli). ² *Due triangoli che hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso sono congruenti.*

Con queste premesse, possiamo ora passare ad una prima descrizione e motivazione dei contenuti di questo primo capitolo. Innanzitutto, riteniamo di importanza fondamentale il fatto che ogni studente di una Facoltà scientifica sia in grado di affrontare, in modo autonomo e matematicamente corretto, naturali questioni relative a problemi di geometria euclidea classica. Questa capacità si forma normalmente attraverso gli studi effettuati nella scuola superiore, ma, in questa sede, ci proponiamo di svilupparla ulteriormente mediante l'esame critico e dettagliato di alcune specifiche istanze, quali ad esempio l'analisi del legame tra angoli al centro e angoli alla circonferenza, oppure la dimostrazione e le applicazioni di alcuni teoremi chiave (ad esempio, il Teorema di Pitagora o quello di Talete). Infatti, un trattamento completo e rigoroso della geometria euclidea classica sarebbe ovviamente sproporzionato rispetto agli scopi di un'opera di questo tipo (il lettore interessato ad approfondimenti potrà consultare le referenze indicate nel §1.7); invece, siamo convinti che rileggere e lavorare su alcuni esempi sicuramente già noti, ma fondamentali, possa

²Gli altri due criteri di congruenza per i triangoli sono:

- 2° due triangoli sono congruenti se hanno congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti;
- 3° due triangoli sono congruenti se hanno tutti i lati ordinatamente congruenti.

essere di grosso giovamento per intraprendere nel modo migliore questo percorso di avviamento alla matematica universitaria. Ribadiamo, infine, che questo capitolo è comunque scritto per un lettore che abbia già studiato in precedenza gli argomenti fondamentali della geometria euclidea e quindi, all'occorrenza, sia in grado di completare la nostra esposizione consultando altri testi: in particolare, per ragioni di spazio, ma anche per non appesantire troppo la presentazione, abbiamo deciso di non fornire una definizione rigorosa di *tutti* i concetti che useremo. Ad esempio, daremo per scontato che il lettore sappia che cos'è un poligono ed abbia anche familiarità con concetti come la congruenza di segmenti, angoli o figure geometriche.

Concludiamo questa introduzione con un commento di carattere più generale. Tradizionalmente, la geometria euclidea classica è considerata, insieme all'aritmetica elementare, il punto di partenza di tutto il sapere matematico. Inoltre, ognuno di noi entra in contatto con essa fin dalle scuole elementari e medie: questo ha contribuito a diffondere un atteggiamento, estremamente superficiale, che porta a considerare questo ramo della matematica come elementare, o *facile*. Riteniamo opportuno mettere in guardia il lettore, precisando che si tratta invece di temi molto profondi e complessi. In particolare, anche se in questo capitolo forniremo solo una guida introduttiva e semplificata all'argomento, non deve essere motivo di scoraggiamento, per il lettore, constatare di incontrare qualche difficoltà a comprendere certi passaggi o concetti. Tutto ciò è infatti normale e, in ogni caso, non pregiudica la comprensione dei capitoli successivi.

1.1 Circonferenza e poligoni inscritti o circoscritti

Per poter convenientemente trattare l'argomento che dà il titolo a questa sezione è indispensabile richiamare dapprima alcune proprietà fondamentali degli angoli nei triangoli.

Iniziamo descrivendo l'importante relazione che c'è tra un angolo esterno e gli angoli interni non adiacenti (si veda anche la Figura 1.2).

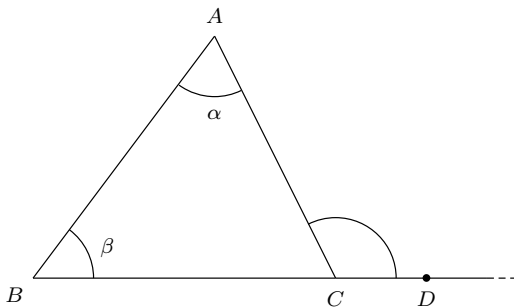


Figura 1.2 – \widehat{ACD} è un angolo esterno del triangolo $\triangle ABC$.

Teorema 1.2 (Teorema dell'angolo esterno). *Ciascun angolo esterno di un triangolo è congruente alla somma degli angoli interni ad esso non adiacenti.*

Dimostrazione. Con riferimento alla Figura 1.2, dobbiamo dimostrare che

$$\widehat{ACD} \cong \alpha + \beta, \quad (1.1.1)$$

dove, qui ed in seguito, il simbolo \cong esprime la relazione di congruenza. Tracciamo da C la retta parallela al lato \overline{AB} , indicando con α' e β' gli angoli in cui \widehat{ACD} resta diviso da tale retta (si veda la Figura 1.3).

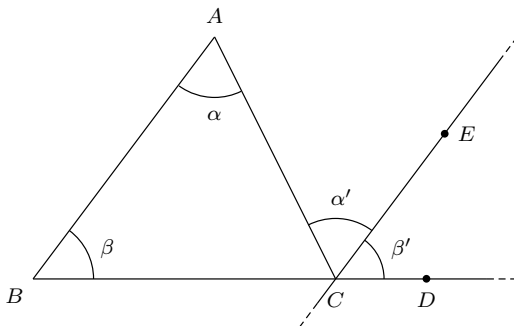


Figura 1.3 – \overline{CE} è parallelo a \overline{AB} .

Abbiamo che, per costruzione,

$$\widehat{ACD} \cong \alpha' + \beta'. \quad (1.1.2)$$

Poi

$$\alpha \cong \alpha' , \quad (1.1.3)$$

in quanto angoli *alterni interni*³ rispetto alle rette parallele individuate da \overline{AB} e \overline{CE} , tagliate dalla trasversale \overline{AC} . Infine,

$$\beta \cong \beta' , \quad (1.1.4)$$

in quanto angoli *corrispondenti* rispetto alle rette parallele individuate da \overline{AB} e \overline{CE} , tagliate dalla trasversale \overline{BD} . Ora la tesi (1.1.1) è una conseguenza immediata di (1.1.2)–(1.1.4). \square

Dal precedente teorema deduciamo una fondamentale conseguenza relativa alla somma degli angoli interni di un triangolo.

Corollario 1.1. *La somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è pari all'ampiezza di un angolo piatto.*

Introduciamo ora il concetto di *circonferenza*.

Definizione 1.1. Siano dati $R > 0$ e un punto O del piano. Si chiama *circonferenza* di centro O e raggio R il luogo di punti del piano aventi distanza dal punto O pari a R .

Definizione 1.2. Si chiama *corda* di una circonferenza γ ogni segmento che ha per estremi due qualsiasi punti di γ . Una corda passante per il centro è detta *diametro*.

Una prima domanda naturale da porsi è la seguente: quali condizioni individuano una circonferenza?

Teorema 1.3. *Siano A , B e C tre punti non allineati. Allora esiste un'unica circonferenza γ che li contiene.*

Dimostrazione. Con riferimento alla Figura 1.4, tracciamo gli assi dei segmenti \overline{AB} e \overline{BC} (ricordiamo che, per definizione, l'asse di un segmento \overline{AB} è il luogo di punti del piano equidistanti da A e B ; esso coincide con la retta perpendicolare al segmento, passante per il suo punto medio). Dato che i tre punti A , B e C non sono allineati, gli assi dei due segmenti

³Si noti che la dimostrazione della proprietà degli angoli alterni interni fa uso in modo esplicito del V postulato di Euclide.

non sono paralleli e quindi si incontrano in un punto che chiamiamo O . Osserviamo che:

$$\overline{OA} \cong \overline{OB}$$

in quanto O appartiene all'asse del segmento \overline{AB} . Analogamente,

$$\overline{OB} \cong \overline{OC}.$$

Dalla transitività⁴ della relazione di congruenza segue che

$$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}.$$

Dunque O è equidistante da A , B e C , per cui la circonferenza di centro O e raggio pari alla lunghezza del segmento \overline{OA} contiene i tre punti dati, come richiesto. L'unicità della circonferenza con questa proprietà segue dal fatto che O è l'unico punto equidistante da A , B e C . \square

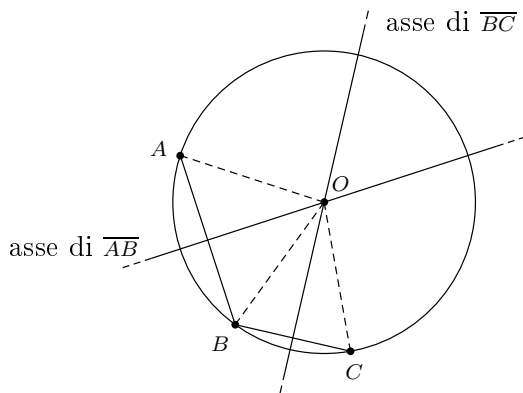


Figura 1.4 – Costruzione della circonferenza passante per tre punti non allineati.

Definizione 1.3. Si chiama *angolo al centro* ogni angolo che ha il vertice coincidente col centro della circonferenza.

⁴La relazione di congruenza è una relazione di equivalenza, cioè soddisfa le seguenti proprietà:

$a \cong a$	riflessiva
se $a \cong b$, allora $b \cong a$	simmetrica
se $a \cong b$ e $b \cong c$, allora $a \cong c$	transitiva.

Con riferimento alla Figura 1.5, si dice che l'angolo \widehat{AOB} insiste sull'arco \widehat{AB} (precisiamo che la nostra notazione è riferita alla circonferenza percorsa in senso antiorario). Si dice anche che l'angolo \widehat{AOB} , la corda \overline{AB} e l'arco \widehat{AB} si *corrispondono*, ovvero sono *elementi corrispondenti*.

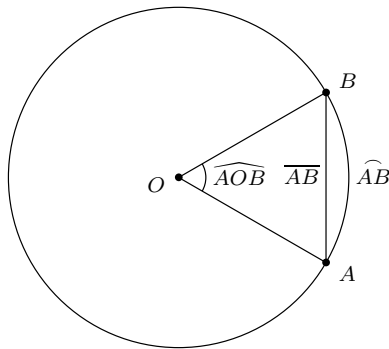


Figura 1.5 – L'angolo al centro \widehat{AOB} insiste sull'arco \widehat{AB} .

Vale il seguente teorema, intuitivamente evidente, di cui omettiamo la dimostrazione:

Teorema 1.4. *In una circonferenza, ad angoli al centro congruenti corrispondono corde e archi congruenti. Viceversa, a corde o ad archi congruenti corrispondono angoli al centro congruenti.*

Definizione 1.4. Si chiama *angolo alla circonferenza* ogni angolo convesso⁵ che ha il vertice sulla circonferenza e i due lati secanti la circonferenza stessa, oppure un lato secante e l'altro tangente (si veda la Figura 1.6).

L'intersezione tra un angolo alla circonferenza e la circonferenza è un arco. Si dice che l'angolo alla circonferenza *insiste* su tale arco o che tale angolo è *sotteso* dall'arco. Ad esempio, l'angolo alla circonferenza \widehat{AVB} nella Figura 1.6a insiste sull'arco \widehat{AB} . Invece l'angolo \widehat{AVB} nella Figura 1.6b insiste sull'arco \widehat{AV} .

⁵Un angolo si dice convesso quando, scelti due punti qualunque interni all'angolo, anche il segmento che li unisce è interno (in pratica, gli angoli convessi sono quelli inferiori o uguali a 180°).

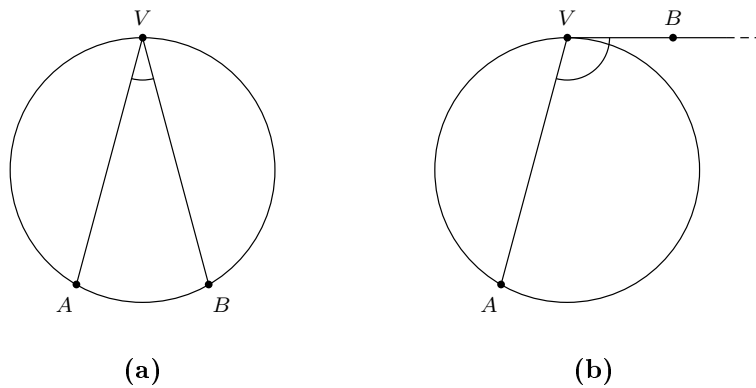


Figura 1.6 – Angoli alla circonferenza: (a) due lati secanti; (b) un lato secante e l'altro tangente.

Definizione 1.5. Un angolo al centro e un angolo alla circonferenza si dicono *corrispondenti* quando insistono sullo stesso arco.

Osservazione 1.1. (i) Per ogni angolo alla circonferenza c'è un unico angolo al centro corrispondente.

(ii) Per ogni angolo al centro, vi sono infiniti angoli alla circonferenza corrispondenti.

Queste osservazioni sono visualizzabili nella Figura 1.7: l'angolo al centro \widehat{AOB} corrisponde agli angoli alla circonferenza \widehat{AVB} , $\widehat{AV'B}$, $\widehat{AV''B}$, etc.

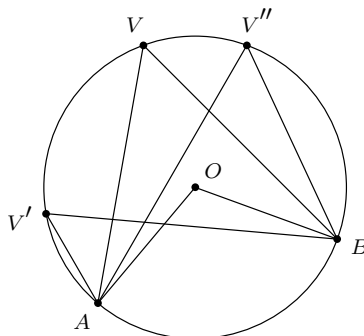


Figura 1.7 – Angoli alla circonferenza corrispondenti allo stesso angolo al centro.

Teorema 1.5. *Ogni angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro.*

Dimostrazione. Con riferimento alla Figura 1.8, dobbiamo verificare che

$$\widehat{AVB} \cong \frac{1}{2} \widehat{AOB} \quad (1.1.5)$$

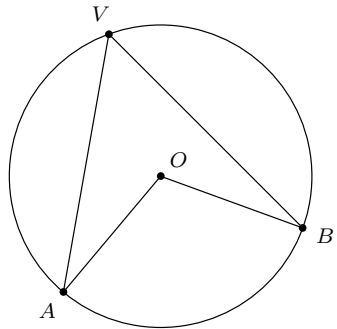


Figura 1.8 – Un angolo alla circonferenza ed il corrispondente angolo al centro.

La dimostrazione si effettua distinguendo tre casi.

Caso 1: *O appartiene ad uno dei due lati dell'angolo alla circonferenza \widehat{AVB} .*

A seconda che i lati siano entrambi secanti, oppure uno secante e uno tangente, si possono presentare le due situazioni illustrate nella Figura 1.9. Consideriamo il primo caso (due lati secanti). Indichiamo con α l'ampiezza degli angoli \widehat{AVB} e \widehat{VAO} , che sono uguali perché $\triangle AVO$ è un triangolo isoscele sulla base \overline{AV} ⁶. Sia β l'ampiezza dell'angolo \widehat{AOB} . Per il Teorema dell'angolo esterno (Teorema 1.2) possiamo concludere che

$$\beta = \alpha + \alpha = 2\alpha ,$$

ovvero (1.1.5).

⁶Per verificare che in un triangolo isoscele $\triangle ABC$ gli angoli alla base \overline{AB} sono uguali si tracci la bisettrice di \widehat{ACB} , la quale incontra \overline{AB} in un punto H . Adesso, applicando il primo criterio di congruenza ai triangoli \widehat{AHC} e \widehat{BHC} , si conclude che $\widehat{CAH} \cong \widehat{CBH}$.

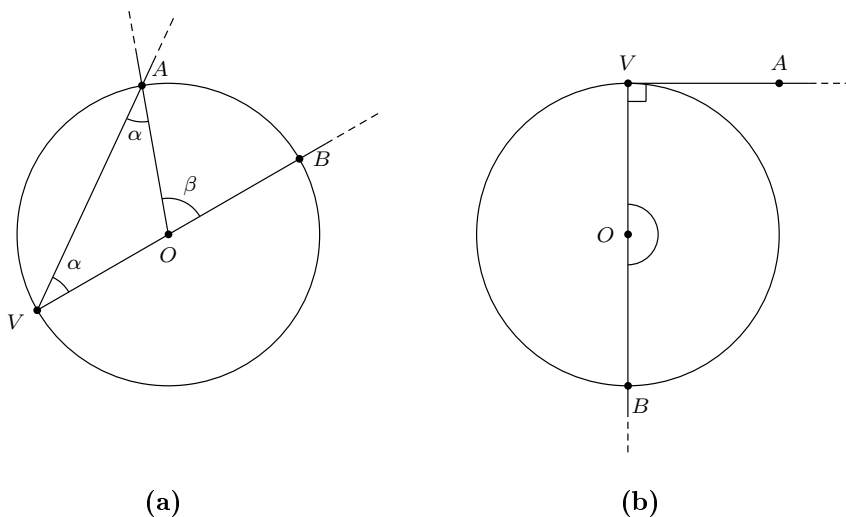


Figura 1.9 – Caso 1 del Teorema 1.5.

Nel secondo caso (un lato secante e uno tangente) la tesi è immediata, in quanto l'angolo alla circonferenza è retto e quello al centro piatto.

Caso 2: O è interno all'angolo alla circonferenza \widehat{AVB} .

A seconda che i lati siano entrambi secanti, oppure uno secante e uno tangente, si possono presentare le due situazioni illustrate nella Figura 1.10. La dimostrazione può essere effettuata riconducendosi al Caso 1 sopra. Più precisamente, con riferimento alla Figura 1.10a, in base a quanto dimostrato nel Caso 1 possiamo scrivere:

$$\widehat{AOC} = 2\alpha \quad \text{e} \quad \widehat{BOC} = 2\beta .$$

Ma allora

$$\widehat{AVB} = \alpha + \beta \quad \text{e} \quad \widehat{AOB} = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) ,$$

da cui (1.1.5) segue.

Nel caso in cui un lato sia secante e uno tangente la (1.1.5) si evince immediatamente osservando la Figura 1.10b (si noti però che, in questo caso, la tesi è: $\widehat{AVB} \cong \frac{1}{2} \widehat{BOV}$).

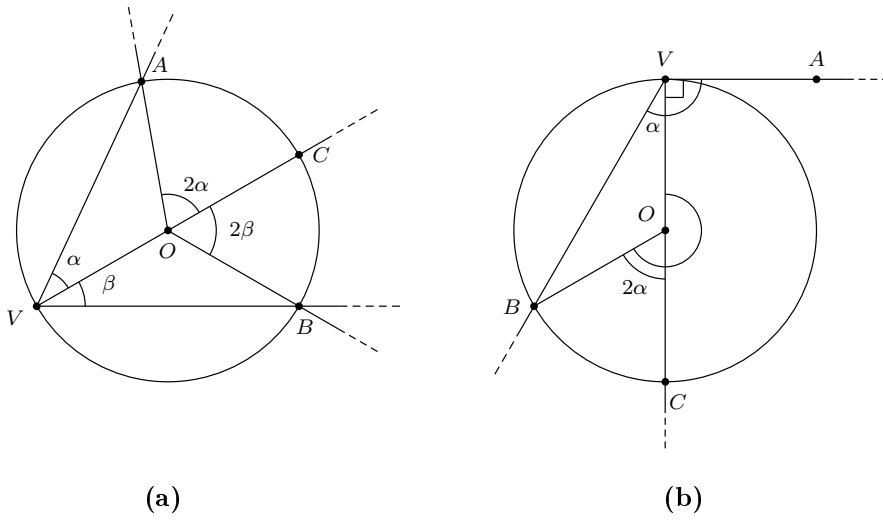


Figura 1.10 – Caso 2 del Teorema 1.5.

Caso 3: O è esterno all'angolo alla circonferenza \widehat{AVB} .

A seconda che i lati siano entrambi secanti, oppure uno secante e uno tangente, si possono presentare le due situazioni illustrate nella Figura 1.11.

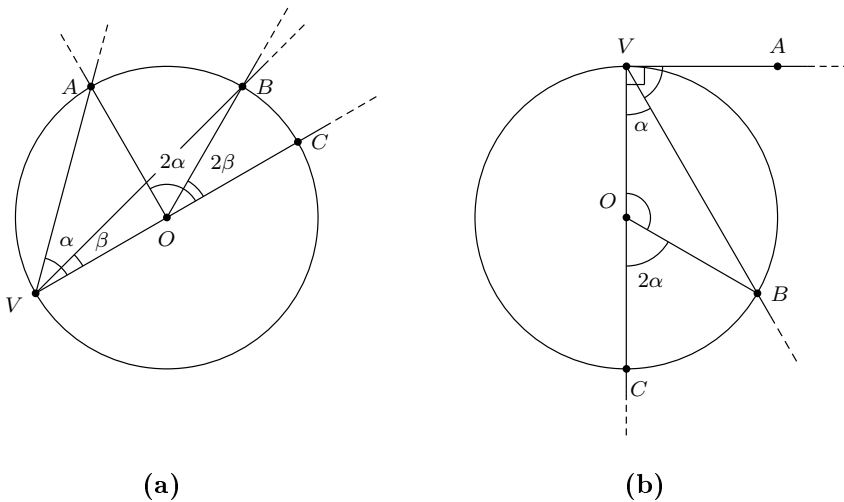


Figura 1.11 – Caso 3 del Teorema 1.5.

La dimostrazione è simile a quella del Caso 2, con la seguente variazione: con riferimento alla Figura 1.11a abbiamo

$$\widehat{AVB} = \alpha - \beta \quad \text{e} \quad \widehat{AOB} = 2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta),$$

da cui la (1.1.5) ancora segue. Il Caso 3(b) è analogo al Caso 2(b). \square

Dal teorema precedente discendono immediatamente due importanti conseguenze:

Corollario 1.2. *Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco (o su archi congruenti) sono congruenti tra loro (si riveda ancora la Figura 1.7).*

Corollario 1.3. *Ogni angolo alla circonferenza che insiste su una semi-circonferenza è retto (si veda la Figura 1.12).*

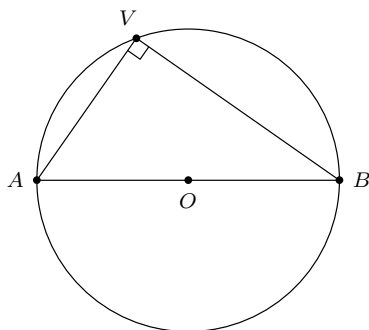


Figura 1.12 – Angolo alla circonferenza che insiste su una semi-circonferenza.

Come applicazione del Corollario 1.3 possiamo costruire, con riga e compasso, le due rette tangenti ad una circonferenza e passanti per un punto esterno P dato. Per prima cosa, costruiamo il punto medio M come indicato nella Figura 1.13a .

Poi, tracciamo la circonferenza con centro M passante per O e P , e chiamiamo A e B le sue intersezioni con la circonferenza originaria, come in Figura 1.13b. Infine, tracciamo le rette individuate da \overline{PA} e \overline{PB} , come in Figura 1.13c. Queste due rette sono tangenti alla circonferenza di partenza, in quanto gli angoli \widehat{OAP} e \widehat{OBP} sono retti grazie al Corollario 1.3.

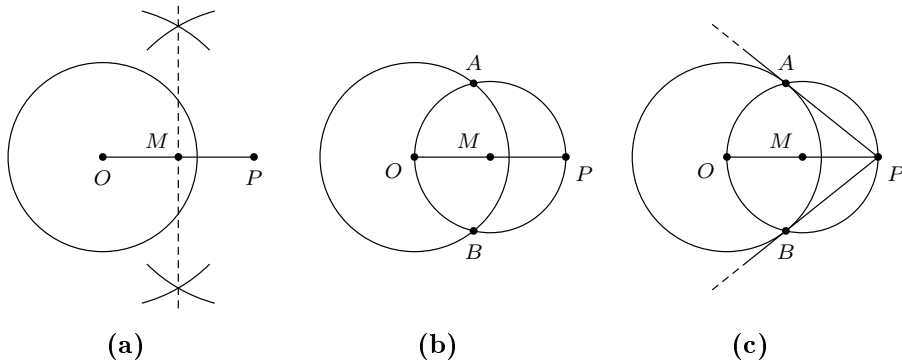


Figura 1.13 – Costruzione delle due tangenti passanti per un punto esterno. In (a) l'asse del segmento \overline{OP} passa per i punti di intersezione di due circonferenze aventi lo stesso raggio, centrate in O e P rispettivamente.

Dopo questo lavoro preliminare su triangoli e circonferenze possiamo introdurre il concetto di poligono circoscritto o inscritto rispetto ad una circonferenza.

Definizione 1.6. Un poligono si dice *inscritto* in una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza. In tal caso la circonferenza si dice *circoscritta* al poligono.

Definizione 1.7. Un poligono si dice *circoscritto* ad una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. In tal caso la circonferenza si dice *inscritta* nel poligono.

Nella Figura 1.14a vediamo un pentagono inscritto in una circonferenza. Nella Figura 1.14b abbiamo invece un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza.

Una prima domanda che viene spontaneo porsi è la seguente: dato un poligono, sotto quali condizioni è possibile determinare una circonferenza inscritta, o circoscritta, rispetto al poligono?

Le Figure 1.15a e 1.15b mostrano che la risposta al quesito precedente non sempre è affermativa. Possiamo però ragionare nel modo seguente: se un poligono è inscritto in una circonferenza, i suoi lati sono corde di questa circonferenza, per cui gli assi del segmento dei suoi lati passano tutti per un unico punto, cioè il centro della circonferenza. Viceversa, se gli assi dei

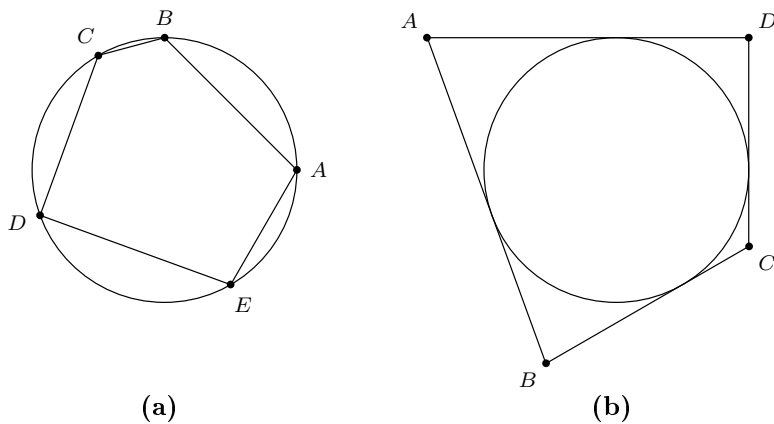


Figura 1.14 – (a) Pentagono inscritto. (b) Quadrilatero circoscritto.

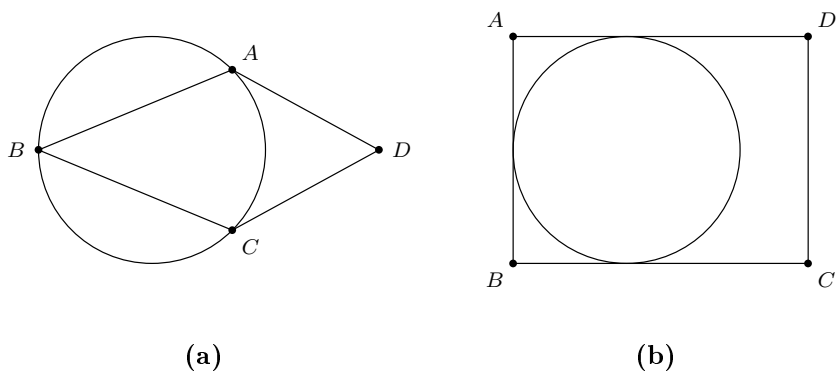


Figura 1.15 – (a) Quadrilatero non inscritto. (b) Quadrilatero non circoscritto.

lati di un poligono hanno un punto in comune, esso risulta equidistante dai vertici del poligono. Quindi la circonferenza, che ha centro in questo punto e passa per uno dei vertici del poligono, necessariamente contiene anche tutti gli altri vertici, risultando così circoscritta al poligono (si veda la Figura 1.16).

Riassumendo, possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 1.6 (Condizione di inscrivibilità). *Un poligono è inscritto in una circonferenza se e solo se gli assi dei suoi lati si incontrano in uno*

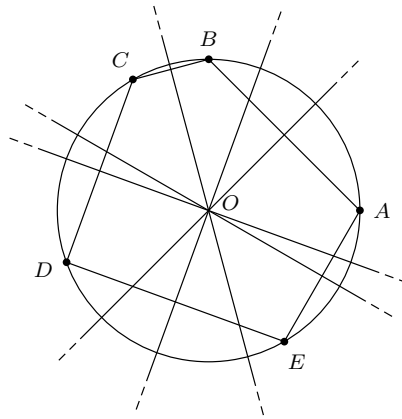


Figura 1.16 – Pentagono (non regolare) inscritibile.

stesso punto (che è il centro della circonferenza circoscritta).

Se un poligono è circoscritto ad una circonferenza, ogni coppia di lati consecutivi costituisce la coppia di segmenti di tangente condotti alla circonferenza dal loro punto di intersezione, quindi le bisettrici degli angoli passano tutte nello stesso punto, il centro della circonferenza inscritta. Viceversa, se le bisettrici degli angoli di un poligono hanno un punto in comune, esso risulta equidistante dai lati del poligono, per cui la circonferenza che ha centro in questo punto e raggio pari a tale distanza è inscritta nel poligono (si veda la Figura 1.17).

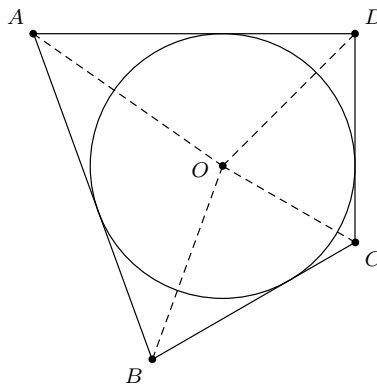


Figura 1.17 – Quadrilatero circoscrittibile.

Tutto ciò può essere riassunto nel seguente teorema.

Teorema 1.7 (Condizione di circoscrivibilità). *Un poligono è circoscrivibile ad una circonferenza se e solo le bisettrici dei suoi angoli si incontrano in uno stesso punto (che è il centro della circonferenza inscritta).*

Come già accennato nell'introduzione, abbiamo la seguente definizione.

Definizione 1.8. Un poligono si dice *regolare* quando ha tutti i lati e tutti gli angoli congruenti, ossia quando è equilatero ed equiangolo.

Nelle Figure 1.18 sono illustrati alcuni primi esempi di poligoni regolari: il lettore può constatare che, in ognuno dei quattro casi rappresentati, effettivamente gli assi dei lati e le bisettrici degli angoli hanno un punto in comune. Infatti, per i poligoni regolari, vale il seguente teorema che enunciamo senza dimostrazione.

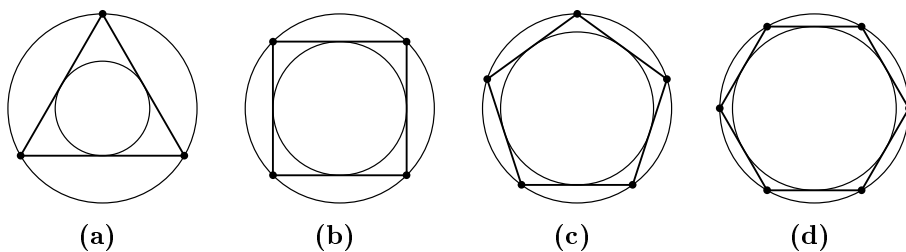


Figura 1.18 – Esempi di poligoni regolari: (a) triangolo equilatero, (b) quadrato, (c) pentagono regolare, (d) esagono regolare.

Teorema 1.8. *Un poligono regolare è sia inscrittibile sia circoscrivibile ad una circonferenza, ed il centro della circonferenza inscritta coincide con quello della circonferenza circoscritta.*

Il centro della circonferenza circoscritta (o della circonferenza inscritta) ad un poligono regolare è detto *centro del poligono*. Il raggio della circonferenza circoscritta si dice *raggio del poligono*; il raggio della circonferenza inscritta si chiama invece *apotema* del poligono (si veda la Figura 1.19). Un'altra importante classe di poligoni, per i quali esistono sempre sia la circonferenza inscritta sia quella circoscritta, è costituita dai triangoli. Si può affermare ciò in base al seguente classico teorema, che ci limitiamo ad enunciare.

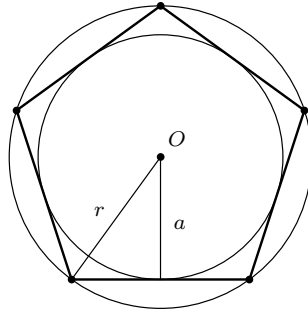


Figura 1.19 – Apotema, centro e raggio di un poligono regolare.

Teorema 1.9 (Punti notevoli di un triangolo). *In un triangolo:*

- (i) *gli assi dei lati si incontrano in uno stesso punto, detto circocentro (Figura 1.20a);*
- (ii) *le bisettrici degli angoli si incontrano in uno stesso punto, detto incentro (Figura 1.20b);*
- (iii) *le mediane si incontrano in uno stesso punto, detto baricentro (Figura 1.21a);*
- (iv) *le rette che contengono le altezze dei lati si incontrano in uno stesso punto, detto ortocentro (Figura 1.21b).*

È importante fare alcuni commenti al teorema precedente.

1. L'esistenza della circonferenza circoscritta per ogni triangolo segue dal punto (i) e dal Teorema 1.6. Il punto che hanno in comune gli assi dei lati di un triangolo si chiama circocentro proprio perché è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.

2. L'esistenza della circonferenza inscritta per ogni triangolo segue dal punto (ii) e dal Teorema 1.7. Il punto che hanno in comune le bisettrici degli angoli di un triangolo si chiama incentro proprio perché è il centro della circonferenza inscritta al triangolo.

3. In generale, circocentro, incentro, ortocentro e baricentro non coincidono tra loro. In particolare, il centro della circonferenza inscritta non necessariamente coincide con quello della circonferenza circoscritta.

4. L'incentro e il baricentro sono sempre interni al triangolo, perché tali sono bisettrici e mediane. Invece, il circocentro e l'ortocentro possono

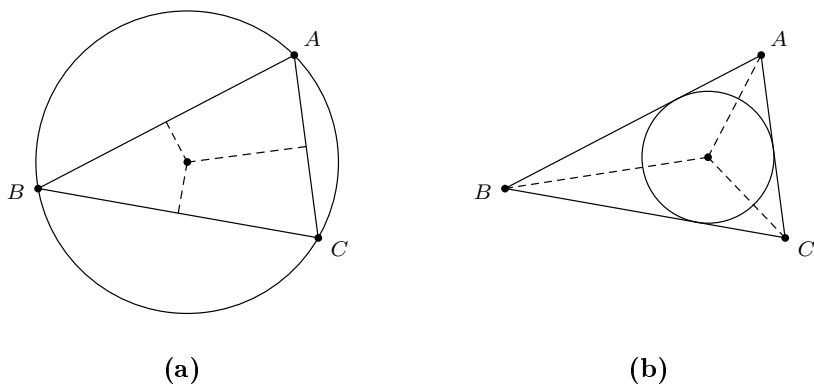


Figura 1.20 – (a) Circocentro. (b) Incentro.

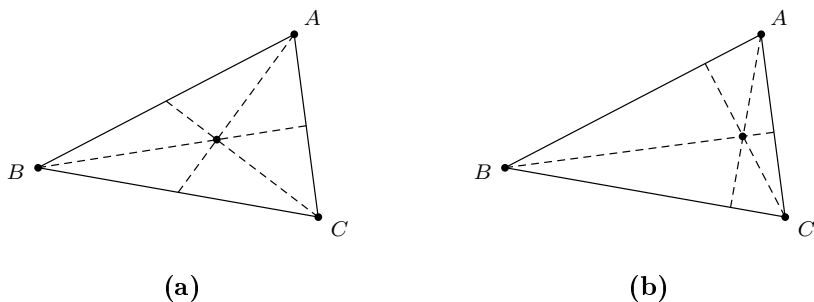


Figura 1.21 – (a) Baricentro. (b) Ortocentro.

cadere sia internamente al triangolo, sia esternamente, sia sui lati stessi del triangolo. Ad esempio, nella Figura 1.22b vediamo che il circocentro O si trova sul lato \overline{AB} : necessariamente, O risulta essere il punto medio del lato \overline{AB} e tale lato è un diametro della circonferenza circoscritta; inoltre, l'altezza rispetto al lato \overline{AB} deve essere congruente alla metà di \overline{AB} stesso. Nella Figura 1.22a l'ortocentro O è esterno al triangolo.

5. Il baricentro gode anche della seguente sorprendente proprietà, che enunciamo senza dimostrazione nel seguente teorema.

Teorema 1.10. *Il baricentro divide ciascuna mediana in due parti, di cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.*

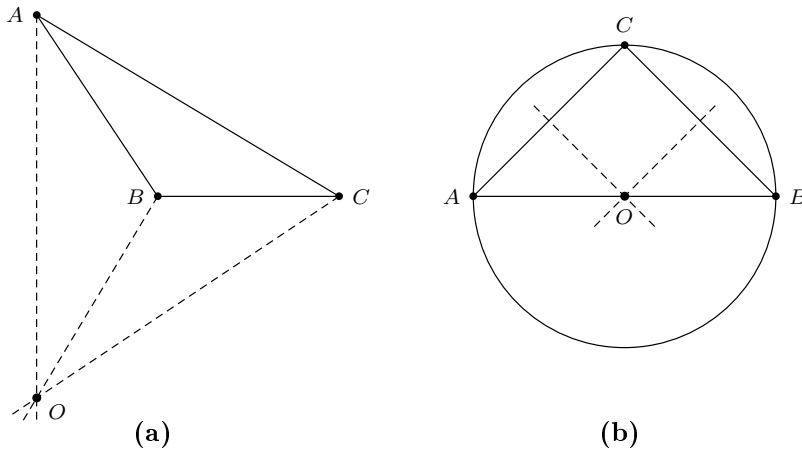


Figura 1.22 – (a) Ortocentro esterno. (b) Circocentro su un lato.

1.2 Il Teorema di Pitagora

Il Teorema di Pitagora è da molti considerato come il primo grande teorema della matematica: la sua dimostrazione, dovuta appunto a Pitagora o a qualche allievo della sua scuola, risale al VI secolo a.C., ma pare che l'enunciato del teorema fosse già noto ai Babilonesi intorno al 1600 a.C. Per inquadrare questo teorema in un contesto opportuno, premettiamo alcune considerazioni sul concetto di area.

L'area \mathcal{A} di un rettangolo, notoriamente, è data dalla formula

$$\mathcal{A} = \text{base} \times \text{altezza} ,$$

sulla quale vale la pena di riflettere un attimo con riferimento alla Figura 1.23. In particolare, supponendo che l'unità di misura delle lunghezze sia, ad esempio, il centimetro, diventa evidente il significato di esprimere \mathcal{A} in centimetri al quadrato.

Da un punto di vista operativo, diventa importante ragionare sul concetto di *figure equivalenti*, dove per equivalenti intendiamo aventi la stessa area. Un primo risultato elementare, ma fondamentale, è l'equivalenza tra un qualunque triangolo ed un opportuno rettangolo: più precisamente, abbiamo il seguente teorema.

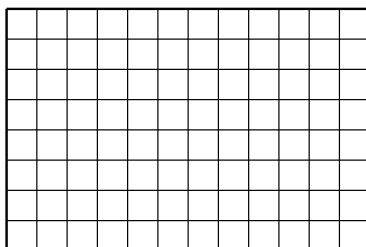


Figura 1.23 – Rettangolo con base e altezza misurate in centimetri.

Teorema 1.11. *Ogni triangolo è equivalente ad un rettangolo avente per base un lato qualunque del triangolo, e per altezza la metà dell'altezza relativa a quel lato.*

Dimostrazione. Dato un triangolo $\triangle ABC$ come in Figura 1.24, tracciamo l'altezza \overline{CH} relativa ad \overline{AB} , indicando con M il suo punto medio. Poi costruiamo le proiezioni A' e B' di A e B sulla retta parallela ad \overline{AB} e passante per M . Dobbiamo dimostrare che il triangolo $\triangle ABC$ è equivalente al rettangolo $ABB'A'$. Sempre riferendoci alla Figura 1.24, analizziamo i due triangoli rettangoli $\triangle AA'D$ e $\triangle DMC$: abbiamo

$$\overline{AA'} \cong \overline{CM},$$

in quanto questi due segmenti sono congruenti alla metà di \overline{CH} . Inoltre,

$$\widehat{A'DA} \cong \widehat{CDM},$$

in quanto opposti al vertice. Quindi, applicando il Corollario 1.1, concludiamo che anche $\widehat{A'AD}$ e \widehat{DCM} sono congruenti. Riassumendo, i due triangoli rettangoli $\triangle AA'D$ e $\triangle DMC$ hanno uguali gli angoli e un lato, e pertanto, per il secondo criterio di congruenza per i triangoli, sono congruenti. In modo analogo, si verifica che anche i 2 triangoli rettangoli $\triangle CME$ e $\triangle EB'B$ sono congruenti, dalla qual cosa la tesi discende facilmente. \square

Ora possiamo senz'altro passare all'illustrazione del Teorema di Pitagora.

Teorema 1.12 (Teorema di Pitagora). *L'area del quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo coincide con la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.*

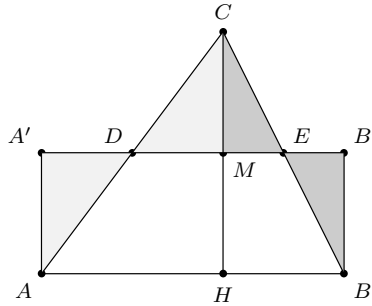


Figura 1.24 – Equivalenza tra un triangolo ed un opportuno rettangolo.

Dimostrazione. Rappresentiamo il Teorema mediante la Figura 1.25, in cui $\triangle ABC$ è un triangolo rettangolo, Q_a e Q_b sono i quadrati costruiti sui cateti, mentre Q è il quadrato costruito sull'ipotenusa.

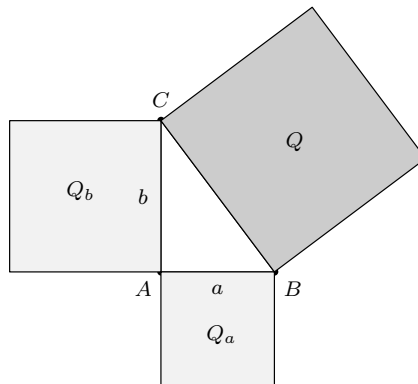


Figura 1.25 – Teorema di Pitagora: $\text{Area}(Q) = \text{Area}(Q_a) + \text{Area}(Q_b)$.

Per dimostrare il teorema costruiamo il quadrato di lato $a + b$ e lo scomponiamo in due modi diversi, cioè come indicato rispettivamente nelle Figure 1.26a e 1.26b.

Gli otto triangoli rettangoli **1–8** nelle Figure 1.26a e 1.26b sono tutti equivalenti perché, per costruzione, hanno i 2 lati a , b , e l'angolo (retto) tra essi compreso congruenti: quindi sono congruenti per il Teorema 1.1. Inoltre, il quadrilatero equilatero Q è effettivamente un quadrato, in quanto i suoi quattro angoli risultano retti per il Corollario 1.1. A questo punto il lettore dovrebbe riconoscere che la conclusione della dimostrazione è immediata.

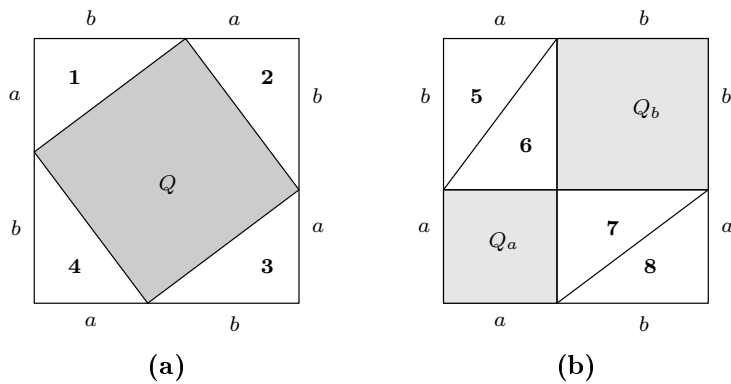


Figura 1.26 – 1–8 sono tutti triangoli rettangoli equivalenti.

□

Vediamo adesso alcune applicazioni del Teorema di Pitagora.

▷ **Esercizio 1.1.** Due torri, alte rispettivamente 30 e 40 metri, distano fra loro 50 metri. Tra le due torri si trova una fontana, verso la quale discendono contemporaneamente due uccelli, uno da ogni torre, alla stessa velocità. Sapendo che i due uccelli raggiungono la fontana nello stesso momento, determinare la distanza della fontana dalle due torri.

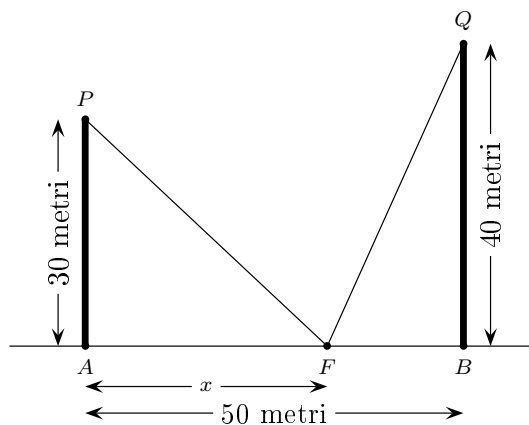


Figura 1.27 – Problema della fontana e delle torri.

Soluzione. Il problema può essere schematizzato come nella Figura 1.27, in cui \overline{AP} e \overline{QB} rappresentano le due torri, mentre F indica la posizione (non nota) della fontana. Inoltre, indichiamo con x la distanza di F dalla torre \overline{AP} , per cui la distanza di F dalla torre \overline{QB} risulta essere pari a $(50 - x)$. Visto che i due uccelli si muovono alla stessa velocità, la condizione da imporre per determinare la posizione di F è

$$\overline{PF} \cong \overline{QF} . \quad (1.2.1)$$

Ora, applicando il Teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli $\triangle PAF$ e $\triangle QBF$, deduciamo che la (1.2.1) equivale a

$$\sqrt{x^2 + 30^2} = \sqrt{(50 - x)^2 + 40^2} . \quad (1.2.2)$$

Elevando al quadrato si trova

$$x^2 + 30^2 = 50^2 + x^2 - 100x + 40^2 ,$$

da cui

$$x = \frac{50 \cdot 50 + 40 \cdot 40 - 30 \cdot 30}{10 \cdot 10} = 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 25 + 16 - 9 = 32 .$$

Il centro della fontana dista 32 metri dalla torre \overline{AP} e 18 metri dall'altra. \triangleleft

\triangleright **Esercizio 1.2.** Consideriamo la Figura 1.28. Assumendo che la lunghezza di \overline{AO} sia pari a r , esprimere la lunghezza del raggio della circonferenza con centro in O_3 in funzione di r .

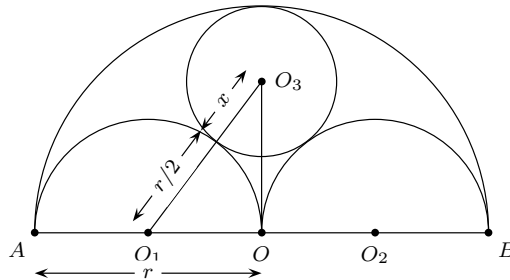


Figura 1.28 – Illustrazione relativa all'Esercizio 1.2.

Soluzione. Per prima cosa impostiamo il problema come in Figura 1.28, dove x è il raggio incognito che dobbiamo determinare. Ora possiamo applicare il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo $\triangle O_1OO_3$, ottenendo

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 + (r - x)^2 = \left(\frac{r}{2} + x\right)^2 . \quad (1.2.3)$$

Sviluppando i calcoli in (1.2.3), si trova

$$r^2 - 3xr = r(r - 3x) = 0$$

la cui unica soluzione è

$$x = \frac{r}{3},$$

che è accettabile in quanto compresa tra 0 e $r/2$.

◁

1.3 Teorema di Talete e concetto di similitudine

Ingrandire o rimpicciolire oggetti, mantenendo inalterate le proporzioni, è alla base di molte attività diversissime fra loro. Gli architetti si servono spesso di un plastico per riprodurre un modello in scala di un progetto. I biologi utilizzano ingrandimenti per esplorare le cellule o per studiare gli insetti. In questa sezione vedremo come formalizzare, da un punto di vista matematico e geometrico, queste idee di cui abbiamo dato una prima descrizione: in particolare, arriveremo al concetto di *figure simili*, cioè, a parole, figure aventi la stessa forma, anche se non necessariamente congruenti.

Il punto di partenza è il Teorema di Talete, sicuramente uno dei più importanti della geometria euclidea piana.

Teorema 1.13 (Teorema di Talete). *Dato un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, il rapporto tra le misure di due segmenti \overline{AB} e \overline{CD} , individuati dal fascio su una trasversale, è uguale al rapporto tra le misure dei loro corrispondenti $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ sull'altra trasversale.*

Omettiamo la dimostrazione di questo teorema, ma riteniamo che sia molto importante per il lettore capirne pienamente il significato osservando la Figura 1.29. In particolare, identificando i segmenti con la loro misura, possiamo scrivere che la conclusione del Teorema di Talete può essere espressa mediante l'uguaglianza dei due seguenti rapporti:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}. \quad (1.3.1)$$

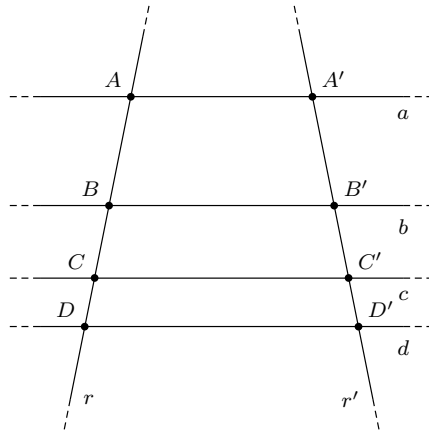


Figura 1.29 – Fascio di rette parallele tagliate da due trasversali.

Per uso futuro, è anche utile notare che la precedente equazione è equivalente alla seguente *proporzione*:

$$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{A'B'} : \overline{C'D'} . \quad (1.3.2)$$

Ora possiamo introdurre il concetto di *similitudine tra triangoli*.

Definizione 1.9. Diremo che due triangoli sono *simili* se:

- (a) hanno gli angoli ordinatamente congruenti;
- (b) il rapporto tra le misure dei lati opposti ad angoli congruenti è costante.

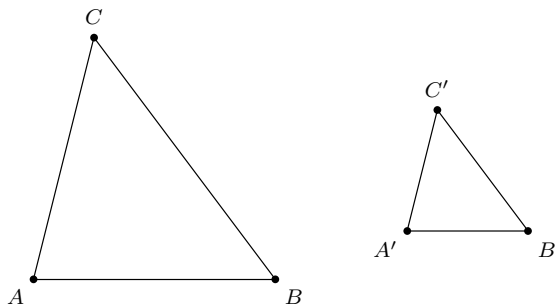


Figura 1.30 – Due triangoli simili.

Con riferimento alla Figura 1.30, la definizione di similitudine fra triangoli equivale alle condizioni:

$$\hat{A} \cong \hat{A}', \hat{B} \cong \hat{B}', \hat{C} \cong \hat{C}' \quad \text{e} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}. \quad (1.3.3)$$

Il numero reale

$$k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad (1.3.4)$$

in (1.3.3) viene chiamato *rapporto di similitudine*: in particolare, se $k = 1$, i due triangoli sono congruenti; se $k < 1$ il triangolo $\triangle A'B'C'$ risulta più piccolo rispetto a $\triangle ABC$; infine, se $k > 1$, il triangolo $\triangle A'B'C'$ è allora più grande rispetto a $\triangle ABC$.

Per indicare che due triangoli sono simili useremo la scrittura seguente:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Nelle applicazioni risultano molto utili i seguenti cosiddetti *criteri di similitudine*, per la cui dimostrazione lo strumento principale è il Teorema di Talete. Per illustrare meglio questa affermazione forniremo la dimostrazione del primo criterio.

Teorema 1.14 (Primo criterio di similitudine). *Se due triangoli hanno due angoli ordinatamente congruenti, allora sono simili.*

Dimostrazione. Con riferimento alla Figura 1.31, l'ipotesi è:

$$\hat{A} \cong \hat{A}' \quad \text{e} \quad \hat{B} \cong \hat{B}',$$

mentre la tesi è $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Osserviamo preliminarmente che, dalle ipotesi e dal Corollario 1.1, si ricava immediatamente che

$$\hat{C} \cong \hat{C}'.$$

Sovrapponiamo i due triangoli in modo che abbiano un vertice in comune, diciamo $A = A'$, e i lati a coppie paralleli, come illustrato mediante la Figura 1.32: grazie al Teorema di Talete deduciamo che

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'}.$$

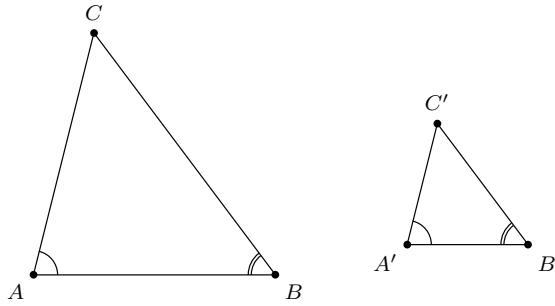


Figura 1.31 – Due triangoli simili.

In modo simile (il lettore verifichi come esercizio questa affermazione) la precedente proporzione può essere completata arrivando a

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} .$$

In conclusione, abbiamo così ottenuto tutte le condizioni richieste dalla Definizione 1.9, per cui la dimostrazione è completa. \square

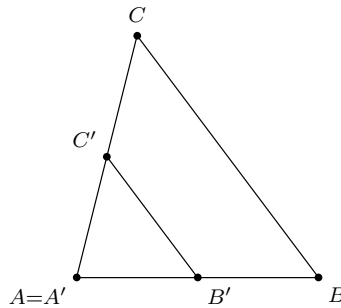


Figura 1.32 – Dimostrazione del primo criterio di similitudine.

Teorema 1.15 (Secondo criterio di similitudine). *Se due triangoli hanno due lati proporzionali e l'angolo compreso congruente, allora sono simili.*

Teorema 1.16 (Terzo criterio di similitudine). *Se due triangoli hanno i lati proporzionali, allora sono simili.*

Come prima importante conseguenza dei precedenti criteri possiamo illustrare due risultati molto utili, noti col nome di Teoremi di Euclide.

Teorema 1.17 (Primo Teorema di Euclide). *In un triangolo rettangolo ciascun cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa.*

Dimostrazione. Con riferimento alla Figura 1.33, dobbiamo dimostrare le seguenti proporzioni:

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BH} \quad (1.3.5)$$

$$\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{HC} . \quad (1.3.6)$$

A tal fine, possiamo osservare che, come conseguenza del primo criterio di similitudine (Teorema 1.14) i due triangoli $\triangle BAC$ e $\triangle BHA$ sono simili, da cui la (1.3.5) segue immediatamente. In modo analogo, dalla similitudine di $\triangle BAC$ e $\triangle AHC$ si ricava la (1.3.6). \square

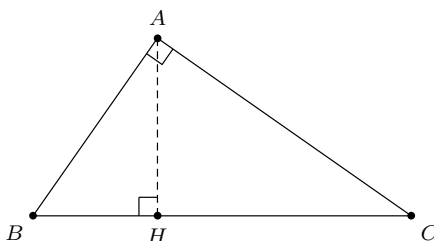


Figura 1.33 – \overline{AH} è l'altezza relativa all'ipotenusa in un triangolo rettangolo.

Teorema 1.18 (Secondo Teorema di Euclide). *In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*

Dimostrazione. Sempre con riferimento alla Figura 1.33, dobbiamo provare la seguente proporzione:

$$\overline{HC} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{BH} .$$

La dimostrazione è molto simile a quella del teorema precedente, per cui i dettagli vengono lasciati al lettore come esercizio. \square

A beneficio del lettore riassumiamo, attraverso la Figura 1.34, le principali relazioni metriche fra gli elementi di un triangolo rettangolo:

- (i) $a^2 + b^2 = c^2$ (Teorema di Pitagora);
- (ii) $a^2 = p_1 c$ e $b^2 = p_2 c$ (Primo Teorema di Euclide);
- (iii) $h^2 = p_1 p_2$ (Secondo Teorema di Euclide).

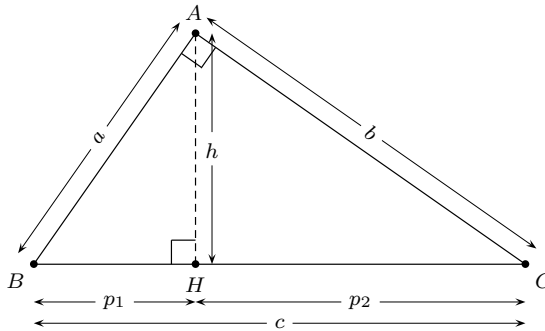


Figura 1.34 – Elementi fondamentali di un triangolo rettangolo.

Passiamo ora ad alcune applicazioni di questi concetti.

▷ **Esercizio 1.3** (Teorema delle secanti). Dimostrare la seguente affermazione: se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono due semirette secanti e si considerano i quattro segmenti che hanno un estremo nel punto esterno e l'altro nei punti di intersezione delle secanti con la circonferenza, il prodotto delle misure dei due segmenti appartenenti a una secante è uguale al prodotto delle misure dei due segmenti appartenenti all'altra secante.

Soluzione. Come primo passo, il lettore è invitato a costruire una rappresentazione grafica del contenuto di questo esercizio; il risultato da ottenere è illustrato nella Figura 1.35, attraverso la quale bisogna riconoscere che la tesi da verificare è semplicemente:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

Ora, verifichiamo che i due triangoli $\triangle APD$ e $\triangle BPC$ sono simili: infatti, \widehat{ABC} e \widehat{ADC} sono congruenti in quanto angoli alla circonferenza che insistono

sullo stesso arco; poi, l'angolo \widehat{APC} è comune, quindi la nostra affermazione è un'immediata conseguenza del primo criterio di similitudine. Ne deduciamo che

$$\overline{PD} : \overline{PB} = \overline{PA} : \overline{PC} ,$$

da cui la tesi è immediata. ◁

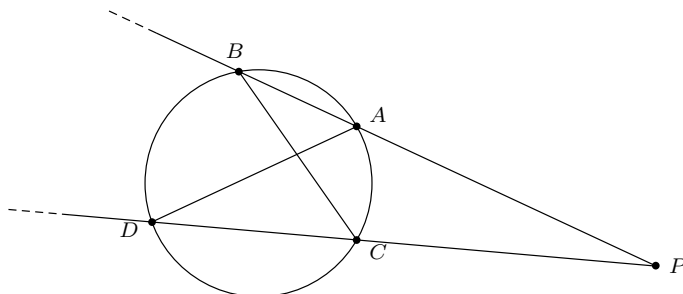


Figura 1.35 – Illustrazione dell'Esercizio 1.3.

▷ **Esercizio 1.4** (Teorema della secante e della tangente). Dimostrare la seguente affermazione: se da un punto esterno ad una circonferenza si tracciano una semiretta tangente ed una secante, il prodotto delle misure dei due segmenti che hanno un estremo nel punto esterno e l'altro nei punti di intersezione della secante con la circonferenza è uguale al quadrato della misura del segmento di tangenza.

Soluzione. Come per l'esercizio precedente, per prima cosa costruiamo un'appropriata rappresentazione grafica (si veda la Figura 1.36). Ora, la tesi da verificare è:

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} .$$

Dato che i ragionamenti richiesti sono analoghi a quelli dell'esercizio precedente, il lettore è invitato a completare autonomamente la dimostrazione, verificando, in particolare, la similitudine tra i due triangoli $\triangle APT$ e $\triangle TPB$. (Suggerimento: osservare che \widehat{ATP} e \widehat{TBA} sono congruenti, in quanto entrambi sono angoli alla circonferenza che insistono sull'arco \widehat{AT}). ◁

Secondo i resoconti di Plutarco, Talete sbalordì i sapienti sacerdoti egiziani per il modo in cui riuscì a determinare l'altezza della piramide di Cheope

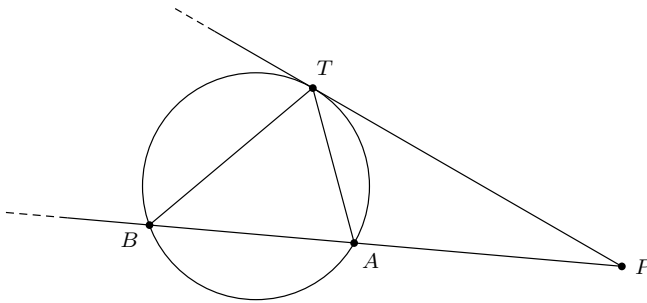


Figura 1.36 – Illustrazione dell'Esercizio 1.4.

mediante l'uso di un semplice bastone e la valutazione delle ombre (dati di facile misurazione): questa applicazione del concetto di similitudine è contenuta nell'esercizio seguente.

▷ **Esercizio 1.5.** Si osservi la Figura 1.37: dedurre l'altezza della piramide attraverso un uso opportuno del concetto di similitudine.

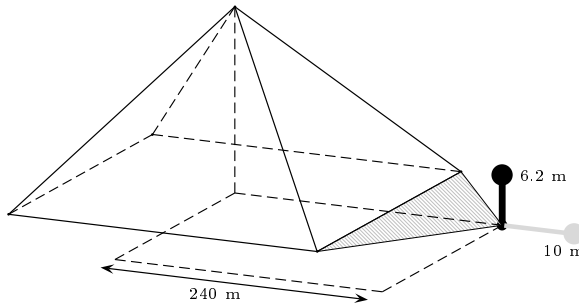


Figura 1.37 – Illustrazione dell'Esercizio 1.5: la piramide di Cheope ed il bastone di Talete.

Soluzione. Il problema può essere schematizzato attraverso la rappresentazione di una sezione della piramide, come in Figura 1.38. In questa figura, le rette contenenti \overline{CF} e \overline{EG} rappresentano raggi del sole, mentre \overline{EF} rappresenta il bastone. Data la lontananza del sole, si può supporre che i raggi siano paralleli e quindi che \overline{CF} sia parallelo a \overline{EG} . Sempre con riferimento alla Figura 1.38, il problema di partenza diventa quindi equivalente al seguente: note le misure di \overline{HF} , \overline{EF} e \overline{FG} , determinare la lunghezza di \overline{CH} .

Osserviamo che i due triangoli rettangoli $\triangle CHF$ e $\triangle EFG$ sono simili grazie al primo criterio, in quanto

$$\widehat{CFH} \cong \widehat{EGF}$$

perché corrispondenti rispetto a due rette parallele tagliate dalla trasversale \overline{AG} .
Ne segue la validità della seguente proporzione:

$$\overline{CH} : \overline{EF} = \overline{HF} : \overline{FG} ,$$

da cui, usando i dati

$$\overline{HF} = 240 \text{ m.} \quad \overline{EF} = 6,2 \text{ m.} \quad \overline{FG} = 10 \text{ m.} ,$$

è facile ricavare che l'altezza \overline{CH} misura circa 148,8 m.

◁

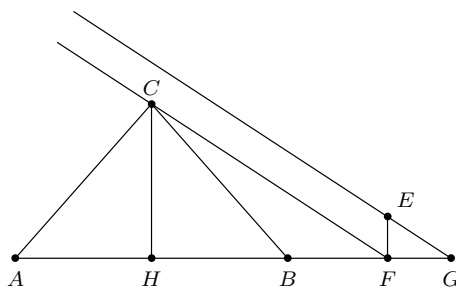


Figura 1.38 – Sezione della piramide di Cheope.

1.4 Esercizi di riepilogo

▷ **Esercizio 1.6.** In un triangolo $\triangle ABC$ si consideri un punto D su \overline{AC} tale che $\overline{AB} = \overline{AD}$. Mostrare che $\widehat{CBD} \cong \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$.

Soluzione. Riferendoci alla Figura 1.39a, si ha $\widehat{CBD} \cong \widehat{ABC} - \widehat{ABD}$. Essendo $\overline{AB} = \overline{AD}$ segue che $\widehat{ABD} \cong \widehat{ADB}$. Quindi

$$\widehat{CBD} \cong \widehat{ABC} - \widehat{ADB} . \quad (1.4.1)$$

Inoltre, \widehat{ADB} è un angolo esterno al triangolo $\triangle BCD$, da cui segue, per il Teorema 1.2,

$$\widehat{ADB} \cong \widehat{CBD} + \widehat{ACB} . \quad (1.4.2)$$

Sostituendo (1.4.2) in (1.4.1) si trova $\widehat{CBD} \cong \widehat{ABC} - \widehat{CBD} - \widehat{ACB}$, da cui la tesi.

◁

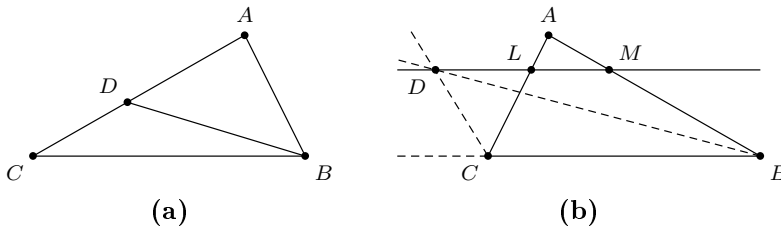


Figura 1.39 – (a) Illustrazione dell'Esercizio 1.6. (b) Illustrazione dell'Esercizio 1.7.

▷ **Esercizio 1.7.** Sia $\triangle ABC$ un triangolo con $\overline{AB} > \overline{AC}$. La bisettrice dell'angolo \widehat{ABC} e la bisettrice dell'angolo esterno in C si incontrano in un punto D . Siano L e M i punti di intersezione della retta per D parallela a \overline{CB} con \overline{AC} e \overline{AB} rispettivamente. Mostrare che $\overline{LM} = \overline{MB} - \overline{LC}$.

Soluzione. La rappresentazione del problema è illustrata in Figura 1.39b. Per costruzione si ha $\widehat{ABD} \cong \widehat{DBC}$. Inoltre, $\widehat{DBC} \cong \widehat{BDM}$ essendo angoli alterni interni rispetto alle rette parallele individuate da \overline{CB} e \overline{DM} tagliate dalla trasversale \overline{DB} . Per la transitività della relazione di congruenza $\widehat{ABD} \cong \widehat{BDM}$, da cui $\triangle DMB$ è un triangolo isoscele. Segue che

$$\overline{DM} = \overline{MB} . \quad (1.4.3)$$

In modo analogo si dimostra che

$$\overline{DL} = \overline{LC} . \quad (1.4.4)$$

Sostituendo (1.4.3) e (1.4.4) in $\overline{DM} = \overline{DL} + \overline{LM}$ si perviene al risultato. ◁

▷ **Esercizio 1.8.** Sia $\triangle ABC$ un triangolo rettangolo e siano D , E e F rispettivamente il piede dell'altezza rispetto all'ipotenusa \overline{AB} , l'intersezione dell'ipotenusa con la bisettrice dell'angolo retto e il punto medio dell'ipotenusa. Mostrare che $\widehat{DCE} \cong \widehat{ECF}$.

Soluzione. Si consideri il triangolo rettangolo $\triangle ABC$ inscritto in una semicirconferenza come mostrato in Figura 1.40. Estendiamo \overline{CE} sino ad incontrare la circonferenza in G . Essendo, per costruzione, $\widehat{ACG} \cong \widehat{BCG}$, segue che i corrispondenti angoli al centro sono congruenti, ovvero:

$$\widehat{AFG} \cong \widehat{BFG} .$$

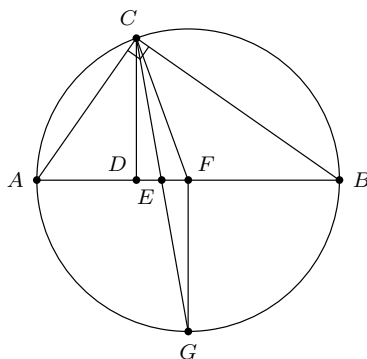


Figura 1.40 – Illustrazione dell'Esercizio 1.8.

Quindi \overline{FG} è perpendicolare a \overline{AB} e, conseguentemente, parallelo a \overline{CD} . I due angoli \widehat{DCE} e \widehat{FGE} sono quindi congruenti (essendo angoli alterni interni rispetto a rette parallele). Osservando, infine, che $\overline{CF} = \overline{FG}$ si ha che il triangolo $\triangle CFG$ è isoscele, da cui $\widehat{ECF} \cong \widehat{FGE} \cong \widehat{DCE}$. \triangleleft

▷ **Esercizio 1.9.** In un triangolo $\triangle ABC$ si estenda l'altezza relativa a \overline{AC} sino ad un punto G tale che $\overline{EG} = \overline{CF}$, dove E ed F rappresentano i piedi delle altezze relative a \overline{AC} e \overline{AB} rispettivamente. Sia H l'intersezione della retta per G , perpendicolare a \overline{BG} , con il prolungamento di \overline{AB} . Mostrare che $\overline{AH} = \overline{AC}$.

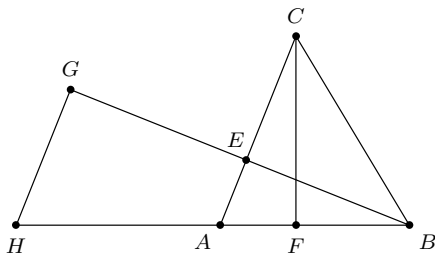


Figura 1.41 – Illustrazione dell'Esercizio 1.9.

Soluzione. Per costruzione (si veda la Figura 1.41) il lettore dovrebbe dedurre che $\widehat{GHA} \cong \widehat{BAC}$. Adesso, $\widehat{BGH} \cong \widehat{AFC}$ in quanto entrambi angoli retti, per cui segue dal Teorema 1.14 che i due triangoli $\triangle AFC$ e $\triangle HGB$ sono simili. Possiamo quindi scrivere

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{GB}}. \quad (1.4.5)$$

In $\triangle BHG$, \overline{AE} è parallelo a \overline{HG} , da cui, per il Teorema 1.13,

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{GB}}. \quad (1.4.6)$$

Dalle (1.4.5) e (1.4.6), tenendo conto che $\overline{EG} = \overline{CF}$, si conclude. \triangleleft

▷ **Esercizio 1.10.** Sia $\triangle ABC$ un triangolo qualunque e sia E un punto sull'altezza relativa a \overline{CB} . Mostrare che $\overline{AC}^2 - \overline{CE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{EB}^2$.

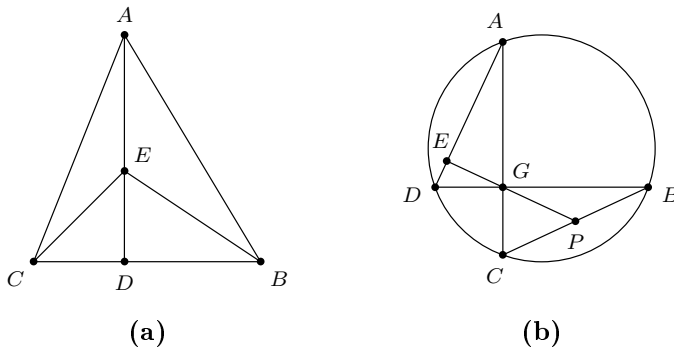


Figura 1.42 – (a) Illustrazione dell'Esercizio 1.10. (b) Illustrazione dell'Esercizio 1.11.

Soluzione. Sia D il piede dell'altezza relativa a \overline{AB} (si veda la Figura 1.42a). Applicando il Teorema di Pitagora ai triangoli $\triangle ADC$ e $\triangle EDC$ si trova:

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 &= \overline{AC}^2, \\ \overline{CD}^2 + \overline{ED}^2 &= \overline{EC}^2. \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro queste due relazioni si trova

$$\overline{AD}^2 - \overline{ED}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{EC}^2. \quad (1.4.7)$$

In modo analogo, considerando i triangoli $\triangle ADB$ e $\triangle EDB$, si perviene a

$$\overline{AD}^2 - \overline{ED}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{EB}^2. \quad (1.4.8)$$

Infine, combinando (1.4.7) e (1.4.8) si ha la tesi. \triangleleft

▷ **Esercizio 1.11.** Due corde \overline{AC} e \overline{DB} di una circonferenza sono tra loro perpendicolari e si intersecano in un punto G . Si estenda l'altezza relativa a \overline{AD} del triangolo $\triangle ADG$, sino ad incontrare \overline{BC} in un punto P . Mostrare che $\overline{BP} = \overline{CP}$.

Soluzione. Per prima cosa rappresentiamo il problema come mostrato in Figura 1.42b. Nel triangolo rettangolo $\triangle AEG$ l'angolo \widehat{DAG} è complementare a \widehat{AGE} , il quale è complementare a \widehat{EGD} . Segue che $\widehat{DAG} \cong \widehat{EGD}$. Inoltre, osserviamo che $\widehat{EGD} \cong \widehat{BGP}$. Gli angoli \widehat{DAC} e \widehat{DBC} sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco e quindi sono congruenti. Segue che $\widehat{CBG} \cong \widehat{BGP}$, da cui $\overline{BP} = \overline{GP}$. In modo analogo si dimostra che $\overline{CP} = \overline{GP}$.

◁

▷ **Esercizio 1.12.** Si consideri un cubo di lato pari a $\sqrt{3}$ cm. Calcolare la misura delle diagonali (ovvero, i segmenti che congiungono due vertici non appartenenti alla stessa faccia).

Soluzione. Indichiamo con ℓ la lunghezza del lato del cubo. Applicando il Teorema di Pitagora, deduciamo che la diagonale D_{faccia} di una faccia del cubo misura:

$$D_{\text{faccia}} = \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \sqrt{2} \ell .$$

Adesso possiamo calcolare la misura della diagonale del cubo D_{cubo} applicando ancora il Teorema di Pitagora:

$$D_{\text{cubo}} = \sqrt{D_{\text{faccia}}^2 + \ell^2} = \sqrt{2\ell^2 + \ell^2} = \sqrt{3} \ell .$$

Nella nostra situazione abbiamo $\ell = \sqrt{3}$ cm, per cui:

$$D_{\text{cubo}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \text{ cm} = 3 \text{ cm} .$$

◁

▷ **Esercizio 1.13.** Calcolare il rapporto tra la diagonale di un quadrato e la lunghezza della circonferenza in esso inscritta.

Soluzione. Indichiamo con ℓ la lunghezza del lato del quadrato. Allora la diagonale del quadrato, come conseguenza del Teorema di Pitagora, misura:

$$D_{\text{quadrato}} = \sqrt{2} \ell .$$

Poiché ℓ è anche il diametro della circonferenza inscritta, il rapporto richiesto vale:

$$\frac{\sqrt{2}\ell}{\pi\ell} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

◁

1.5 Elementi di geometria solida

In questo paragrafo presentiamo le formule per il calcolo dell'area e del volume di alcuni solidi notevoli. Prima di far questo ricordiamo le formule per il calcolo dell'area di un poligono regolare e del cerchio.

Con riferimento alla Figura 1.43 si ricava immediatamente che l'area di un poligono regolare con n lati (in figura un pentagono) è pari a n volte (nel caso del pentagono 5 volte) l'area del triangolo avente base di lunghezza ℓ ed altezza l'apotema a . Quindi, denotato con P_n un poligono regolare con n lati, la sua area è:

$$\mathcal{A}(P_n) = n \frac{\ell \cdot a}{2} = \frac{p \cdot a}{2}, \quad (1.5.1)$$

dove con $p = n\ell$ abbiamo indicato il perimetro del poligono.

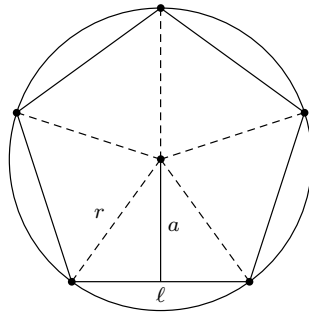


Figura 1.43 – Pentagono regolare.

Sempre con riferimento alla Figura 1.43, il lettore non dovrebbe aver difficoltà a comprendere che, man mano che il numero n dei lati aumenta, il poligono regolare tende ad approssimare il cerchio circoscritto. Il perimetro del poligono tenderà quindi alla lunghezza della circonferenza, cioè

$2\pi r$, mentre l'apotema si avvicinerà al raggio r . Usando la (1.5.1) si intuisce che l'area di un cerchio di raggio r vale πr^2 .

Ricordiamo adesso le definizioni di alcuni solidi notevoli.

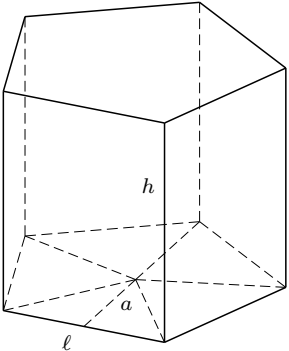
1. Si chiama *prisma* un poliedro avente come basi due poligoni congruenti posti su piani paralleli, e come facce laterali dei parallelogrammi. Un prisma che ha gli spigoli laterali perpendicolari alle basi si dice *retto*. Infine, un prisma retto si dice *regolare* quando le basi sono dei poligoni regolari. Un prisma con base rettangolare si chiama *parallelepipedo*.

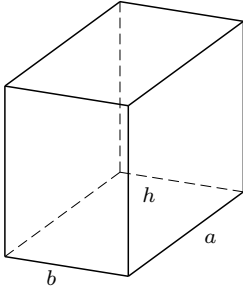
2. Si chiama *piramide* un poliedro i cui vertici, tranne uno, appartengono ad uno stesso piano chiamato *piano della base*. Il vertice esterno alla base è detto *vertice della piramide*. Una piramide si dice *regolare* se i vertici appartenenti alla base descrivono un poligono regolare e il vertice della piramide si trova sulla retta perpendicolare alla base passante per il centro del poligono.

3. Si chiama *cono circolare retto* il solido ottenuto dalla rotazione di un segmento attorno ad una retta passante per uno, ed uno solo, dei suoi estremi.

4. Si chiama *cilindro circolare retto* il solido ottenuto dalla rotazione di un segmento attorno ad una retta ad esso parallela.

Siamo ora pronti per richiamare le principali formule per il calcolo dell'area e del volume dei solidi appena definiti.

<p>Prisma regolare con base un n-gono regolare</p> 	<p>Area laterale</p> $\mathcal{A}_\ell = n(\ell \cdot h)$ <p>Area totale</p> $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + 2\mathcal{A}_b = n(\ell \cdot h) + n(\ell \cdot a) = n\ell(h+a)$ <p>Volume</p> $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = n \frac{l \cdot a \cdot h}{2}$
--	---

Parallelepipedo

Area laterale

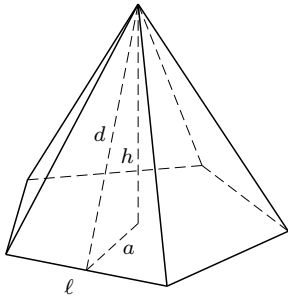
$$\mathcal{A}_\ell = 2(a \cdot h) + 2(b \cdot h) = 2(a + b) \cdot h$$

Area totale

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + 2\mathcal{A}_b = 2(a + b) \cdot h + 2(a \cdot b)$$

Volume

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = a \cdot b \cdot h$$

Piramide regolarecon base un n -gono regolare

Area laterale

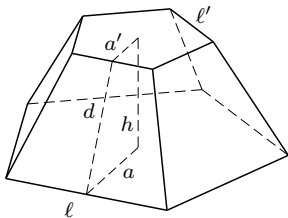
$$\mathcal{A}_\ell = n \frac{\ell \cdot d}{2}$$

Area totale

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_b = n \frac{\ell \cdot d}{2} + n \frac{\ell \cdot a}{2} = \frac{n\ell}{2}(d + a)$$

Volume

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = n \frac{\ell \cdot a \cdot h}{6}$$

Tronco di piramide regolarecon base un n -gono regolare

Area laterale

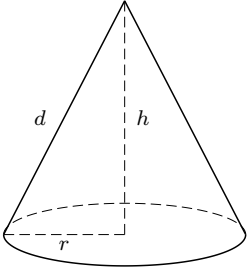
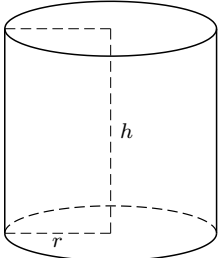
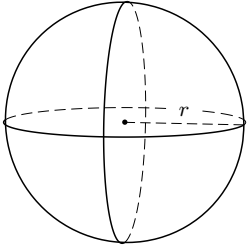
$$\mathcal{A}_\ell = n \frac{(\ell + \ell') \cdot d}{2}$$

Area totale

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_b + \mathcal{A}_{b'}$$

Volume

$$\mathcal{V} = \frac{(\mathcal{A}_b + \mathcal{A}_{b'} + \sqrt{\mathcal{A}_b \cdot \mathcal{A}_{b'}}) \cdot h}{3}$$

<p>Cono circolare retto</p> 	<p>Area laterale</p> $\mathcal{A}_\ell = \pi r \cdot d$ <p>Area totale</p> $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_b = \pi r \cdot d + \pi r^2$ <p>Volume</p> $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$
<p>Cilindro circolare retto</p> 	<p>Area laterale</p> $\mathcal{A}_\ell = 2\pi r \cdot h$ <p>Area totale</p> $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + 2\mathcal{A}_b = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$ <p>Volume</p> $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \pi r^2 \cdot h$
<p>Sfera</p> 	<p>Area</p> $\mathcal{A} = 4\pi r^2$ <p>Volume</p> $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Alcune di queste formule hanno una spiegazione piuttosto semplice ed intuitiva. Per esempio, è facile convincersi che il volume di un parallelepipedo sia pari all'area della base moltiplicata per l'altezza. Concettualmente molto più profonde sono invece le formule necessarie a calcolare il volume di una piramide o di una sfera. Nei prossimi due esercizi, rivolti a Studenti che abbiano un minimo di familiarità con il *concetto di limite* e con il *principio di induzione*, ne daremo una dimostrazione intuitiva e sostanzialmente completa.

▷ **Esercizio 1.14.** Dimostrare che il volume di una piramide regolare è

$$V = \frac{A \cdot h}{3},$$

dove con A abbiamo indicato l'area di base e con h l'altezza.

Soluzione. Consideriamo, per semplicità espositiva, il caso di una piramide regolare con base quadrata. L'idea è di approssimare la piramide con una pila di parallelepipedi come mostrato nella Figura 1.44, dove riportiamo una sezione piana della suddivisione. Sia n il numero di parti in cui abbiamo suddiviso la piramide e siano $(n-1)$ i parallelepipedi costruiti come in Figura 1.44. Si noti che la parte più alta della piramide non contiene alcun parallelepipedo. La somma dei volume dei parallelepipedi non sarà il volume della piramide ma, man mano che aumenta il numero n delle suddivisioni, questa *tenderà* al volume della piramide⁷.

Le aree A_1, \dots, A_{n-1} delle basi dei parallelepipedi P_1, \dots, P_{n-1} sono proporzionali all'area A della base della piramide secondo le proporzioni seguenti (si osservi la Figura 1.44):

$$\begin{aligned} A_1 &: \left(\frac{h}{n}\right)^2 = A : h^2 \\ A_2 &: \left(\frac{2h}{n}\right)^2 = A : h^2 \\ &\vdots \\ A_{n-1} &: \left(\frac{(n-1)h}{n}\right)^2 = A : h^2. \end{aligned}$$

⁷Questo argomento è esattamente quello utilizzato da Eudosso di Cnido nel quarto secolo a.C.

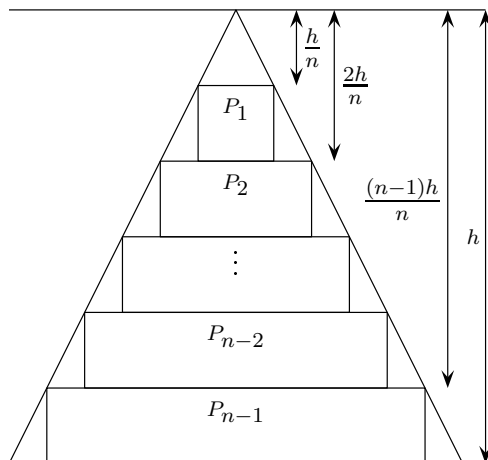


Figura 1.44 – Approssimazione della piramide con i parallelepipedi P_1, \dots, P_{n-1} .

Da ciò si deduce che:

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A} \frac{k^2}{n^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Detti $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_{n-1}$ i volumi dei parallelepipedi P_1, \dots, P_{n-1} si trova

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_{n-1} &= \mathcal{A}_1 \cdot \frac{h}{n} + \dots + \mathcal{A}_{n-1} \cdot \frac{h}{n} \\ &= \frac{\mathcal{A} \cdot h}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2). \end{aligned}$$

Adesso, utilizzando il principio di induzione, si può verificare che

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}.$$

Segue che

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_{n-1} &= \mathcal{A} \cdot h \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \\ &= \mathcal{A} \cdot h \left(\frac{2n^3}{6n^3} - \frac{n^2}{2n^3} + \frac{n}{6n^3} \right) \\ &= \mathcal{A} \cdot h \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right). \end{aligned}$$

Per finire il lettore deve convincersi (provando a valutare queste espressioni numeriche) che per valori di n molto grandi si trova:

$$\frac{1}{2n} \approx 0, \quad \frac{1}{6n^2} \approx 0.$$

Matematicamente, queste approssimazioni possono essere rese rigorose mediante il concetto di *limite* (che non tratteremo però in questo libro). \triangleleft

Osservazione 1.2. Con un procedimento analogo a quello visto nell'Esercizio 1.14, approssimando un cono con una pila di cilindri si perviene alla formula per il calcolo del volume di un cono.

▷ **Esercizio 1.15.** Dimostrare che il volume di un tronco di piramide regolare è

$$\mathcal{V} = \frac{(\mathcal{A}_b + \mathcal{A}_{b'} + \sqrt{\mathcal{A}_b \cdot \mathcal{A}_{b'}}) \cdot h}{3},$$

dove con \mathcal{A}_b e $\mathcal{A}_{b'}$ abbiamo indicato rispettivamente l'area della base inferiore e superiore del tronco di piramide, mentre con h l'altezza.

Soluzione. Con riferimento alla Figura 1.45 il volume del tronco di piramide è dato dalla differenza tra i volumi di due piramidi. Indicando con $h+x$ l'altezza della piramide completa, si ha che il volume del tronco di piramide è

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot (x+h)}{3} - \frac{\mathcal{A}_{b'} \cdot x}{3} = \frac{1}{3} [x(\mathcal{A}_b - \mathcal{A}_{b'}) + h\mathcal{A}_b]. \quad (1.5.2)$$

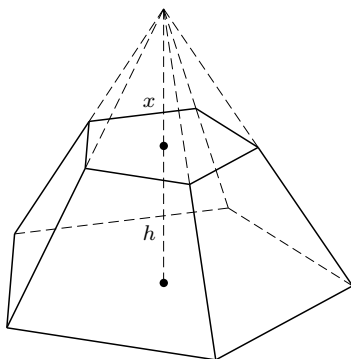


Figura 1.45 – Il volume di un tronco di piramide è la differenza tra i volumi di due piramidi.

Adesso, le aree \mathcal{A}_b e $\mathcal{A}_{b'}$ sono proporzionali secondo la proporzione

$$\mathcal{A}_b : (x + h)^2 = \mathcal{A}_{b'} : x^2 .$$

Segue che x è soluzione dell'equazione

$$(\mathcal{A}_b - \mathcal{A}_{b'})x^2 - 2h\mathcal{A}_{b'}x - h^2\mathcal{A}_{b'} = 0$$

che ammette la soluzione positiva

$$x = h \frac{\mathcal{A}_{b'} + \sqrt{\mathcal{A}_b \mathcal{A}_{b'}}}{\mathcal{A}_b - \mathcal{A}_{b'}} .$$

Sostituendo, nella (1.5.2), il valore di x trovato si ha immediatamente la tesi.

◁

▷ **Esercizio 1.16.** Dimostrare che il volume di una sfera di raggio r è

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

Soluzione. Si consideri una semi-sfera S di raggio r e la si circoscriva con un cilindro con altezza pari al raggio della sfera. Si consideri poi un cono circolare retto con il vertice nel centro della sfera e base il cerchio superiore del cilindro. Nella Figura 1.46 mostriamo una sezione verticale della costruzione descritta sopra.

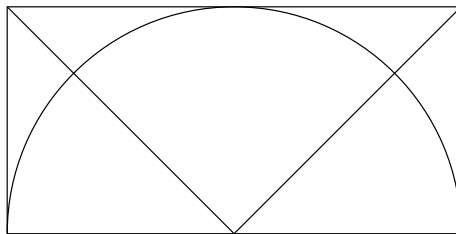


Figura 1.46 – Illustrazione dell'Esercizio 1.16.

Adesso dimostriamo la seguente affermazione:

In ogni piano orizzontale che interseca la configurazione dei tre solidi, l'area della sezione di semi-sfera è pari all'area della sezione del cilindro meno l'area della sezione del cono.

Dimostrazione. Supponiamo che il piano orizzontale sia ad una certa quota h . Il raggio della sezione S_h di semi-sfera sarà, usando il Teorema di Pitagora, $r_{S_h} = \sqrt{r^2 - h^2}$. Quindi l'area di S_h diventa $\mathcal{A}(S_h) = \pi \cdot (r^2 - h^2)$. L'area della sezione di cilindro non dipende da h ed è sempre pari all'area della base, cioè $\pi \cdot r^2$. Il piano orizzontale interseca il cono in una circonferenza di raggio h (si costruisca un opportuno triangolo isoscele per verificare questa proprietà). Segue che l'area della sezione di cono è $\pi \cdot h^2$. Calcolando ora l'area della sezione di cilindro meno l'area della sezione di cono si ottiene:

$$\pi \cdot r^2 - \pi \cdot h^2 = \pi \cdot (r^2 - h^2) = \mathcal{A}(S_h).$$

□

Per concludere utilizziamo il seguente principio del volume:

Se due solidi hanno tutte le sezioni orizzontali di pari area, allora i solidi hanno lo stesso volume.

Usando questo criterio deduciamo che il volume della semi-sfera è la differenza del volume del cilindro meno il volume del cono:

$$\mathcal{V}(S) = \pi \cdot r^2 \cdot r - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot r}{3} = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3.$$

Il volume della sfera, essendo due volte quello della semisfera, è proprio dato dalla formula cercata. ◁

1.6 Esercizi proposti

▷ **Esercizio 1.17.** In un quadrato $ABCD$, sia M il punto medio di \overline{AB} . Una retta per M , perpendicolare a \overline{MC} , incontra \overline{AD} in un punto K . Mostrare che $\widehat{BCM} \cong \widehat{KCM}$.

▷ **Esercizio 1.18.** Dato un quadrato $ABCD$ sia E un punto interno tale che $\widehat{EDC} \cong \widehat{ECD} = 15^\circ$, mostrare che $\triangle ABE$ è equilatero.

▷ **Esercizio 1.19.** Sia $\triangle ABC$ un triangolo rettangolo retto in C . Siano D e E due punti su \overline{AB} tali che $\overline{BD} = \overline{BC}$ e $\overline{AE} = \overline{AC}$. Indicata con G la proiezione ortogonale di D su \overline{AC} e con F la proiezione ortogonale di E su \overline{BC} , mostrare che $\overline{DE} = \overline{EF} + \overline{DG}$.

▷ **Esercizio 1.20.** La misura della base maggiore \overline{DC} di un trapezio A, B, C, D è 97. La misura del segmento che unisce i punti medi E e F delle diagonali misura 3. Determinare la misura della base minore \overline{AB} .

▷ **Esercizio 1.21.** Due pali di una linea elettrica sono alti 40 e 60 metri rispettivamente. Dei cavi di supporto sono tirati dalla cima di ogni palo alla base dell'altro. A che altezza h dal suolo si trova il punto di intersezione dei due cavi?

▷ **Esercizio 1.22.** Una circonferenza è inscritta in un triangolo isoscele di base 12 e altezza 8. Una seconda circonferenza è inscritta in modo da risultare tangente alla prima circonferenza e ai lati uguali del triangolo. Determinare il raggio r della seconda circonferenza.

▷ **Esercizio 1.23.** Una piramide retta a base quadrata ha l'area della superficie totale di 800 cm^2 . Sapendo che l'area della superficie di base è $8/17$ dell'area della superficie laterale, calcolare il volume del solido.

▷ **Esercizio 1.24.** La misura del perimetro di un trapezio rettangolo è di 42 cm; il lato obliquo è 10 cm e la differenza delle basi è 6 cm. Calcolare l'area totale ed il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore.

1.7 Commenti

Il notissimo V postulato della geometria euclidea classica, nella sua formulazione più moderna, risulta equivalente alla seguente asserzione:

Per un punto passa una ed una sola parallela ad una retta data.

Nel corso dei secoli, numerosi matematici tentarono di dimostrare che il V postulato era conseguenza dei primi quattro (Proclo, Posidonio, Tolomeo, e inoltre alcuni matematici arabi). Nel 1733, il matematico Giovanni Gerolamo Saccheri credette di aver dimostrato il V postulato, ragionando nel seguente ordine di idee: se si assumono solo i primi quattro postulati, la geometria (alternativa a quella euclidea) che ne deriva è contraddittoria. In realtà, nei ragionamenti di Saccheri non era presente alcuna contraddizione e il suo lavoro altro non fece che spianare la strada allo sviluppo delle cosiddette *geometrie non euclidee*: in particolare, in *geometria iperbolica* le parallele sono infinite (modello del disco di Poincaré), mentre nella *geometria ellittica* (modello della sfera di Riemann) due rette distinte hanno

sempre due punti in comune. Le geometrie non euclidee hanno importanti applicazioni in vari campi, come ad esempio l'architettura (*geometria proiettiva e descrittiva*).

Forse non sorprende che la formula per il calcolo del volume di una piramide o di una piramide tronca fosse già nota agli antichi egizi. Però meraviglia che nel famoso *papiro di Rhind* (anche noto come *papiro di Ahmes* dal nome dello scriba che lo trascrisse verso il 1650 a.C) sia indicata una dimostrazione rigorosa di queste formule.

Non è molto noto nei paesi occidentali che nel secolo III il grande matematico cinese Liu Hui arrivò, utilizzando il metodo *costruttivo* (*algoritmico*), a molti dei risultati della geometria ellenica, quali il Teorema di Pitagora o il calcolo del volume di una piramide.

2

Elementi di trigonometria

2.0 Scopi del capitolo

La trigonometria rappresenta uno degli strumenti più utili all'interno del cosiddetto *calculus*, termine di origine latina impiegato nella lingua inglese per indicare l'insieme delle aree fondamentali intorno alle quali si sviluppa la matematica moderna: analisi matematica, geometria analitica e algebra lineare. In questo capitolo verranno esposti i concetti introduttivi relativi alle principali funzioni trigonometriche: $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$. Vedremo poi alcune applicazioni di questi concetti allo studio di problemi di natura geometrica. In un contesto avanzato, l'acquisizione di maturità scientifica accresce la consapevolezza della sostanziale unità dei vari rami della matematica e, più generalmente, delle scienze matematiche, fisiche e dell'area chimico-biologica. In questo ordine di idee, attraverso lo studio di questo capitolo, il lettore inizierà a percepire direttamente il collegamento diretto tra i concetti di base della geometria euclidea classica (Capitolo 1), la nozione di funzione classica dell'analisi matematica e la geometria analitica.

2.1 Le funzioni trigonometriche fondamentali

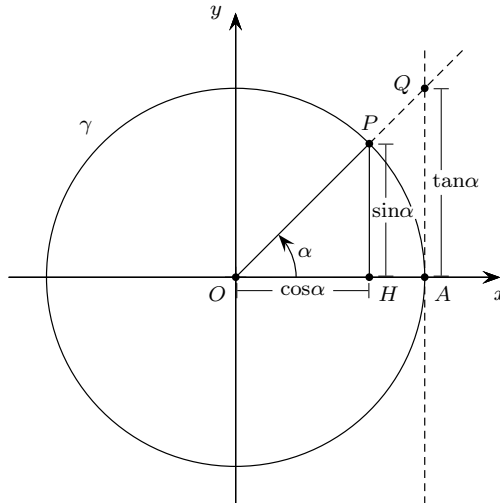


Figura 2.1 – La circonferenza trigonometrica (di raggio unitario).

Facciamo riferimento alla Figura 2.1: A è il punto di coordinate $[1, 0]$. Dunque la circonferenza in Figura 2.1, che chiamiamo γ , ha centro O e raggio 1. Tutti gli angoli saranno misurati in *radianti*: in particolare, ricordiamo che la misura in radianti dell'angolo α è data dalla lunghezza del corrispondente arco di circonferenza, cioè \widehat{AP} , divisa per la lunghezza del raggio \overline{OA} . Sinteticamente, ciò equivale a dire

$$\alpha = \frac{\widehat{AP}}{\overline{OA}} .$$

Da questa scrittura deduciamo che la misura in radianti di α , essendo il rapporto tra due lunghezze, è adimensionale o, in termini equivalenti, è semplicemente un numero reale.

Supponiamo ora di far variare il punto P su γ , percorrendola a partire da A in senso *antiorario*. Quando P avrà percorso un intero giro, il corrispondente angolo α sarà cresciuto da 0 a 2π : ciò conduce a definire le prime due funzioni trigonometriche fondamentali, cioè il *seno* e il *coseno* di α , che denoteremo rispettivamente $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$.

Definizione 2.1. Dato un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$, definiamo

$$\sin \alpha = \text{ordinata di } P, \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi] \quad (2.1.1)$$

$$\cos \alpha = \text{ascissa di } P, \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi]. \quad (2.1.2)$$

Ragioniamo sulla funzione seno guardando la Figura 2.1. Possiamo osservare che, quando α cresce da 0 a $\pi/2$, $\sin \alpha$ cresce dal valore 0 al valore 1. Se poi α passa da $\pi/2$ a π , $\sin \alpha$ decresce da 1 a 0. In modo simile, quando α cresce da π a $3\pi/2$, $\sin \alpha$ decresce da 0 a -1 , per poi crescere da -1 a 0 quando α passa da $3\pi/2$ a 2π . Una volta capito ciò, non dovrebbe sorprendere che la funzione seno, sull'intervallo $[0, 2\pi]$, abbia l'andamento della Figura 2.2.

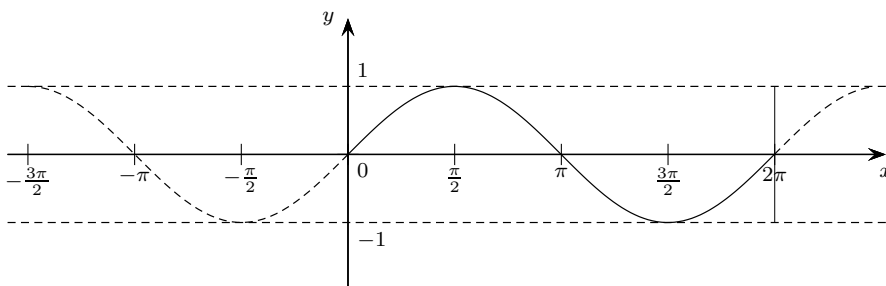


Figura 2.2 – Il grafico di $\sin x$.

Si noti che, per uniformità di trattazione, in questa figura abbiamo chiamato x l'argomento della funzione seno (cioè abbiamo scritto $\sin x$ invece di $\sin \alpha$). Inoltre, pensando che P compia un numero infinito di giri lungo γ , abbiamo esteso la definizione di $\sin x$ a ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione risulta quindi essere una *funzione periodica* su \mathbb{R} di periodo $T = 2\pi$, cioè, in formule,

$$\sin(x) = \sin(x + T), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.1.3)$$

Sottolineiamo che è molto importante, a questo punto, aver capito bene il legame tra la Figura 2.1, la definizione (2.1.1) e il grafico di $\sin x$ della Figura 2.2. Si dovrebbero poi riconoscere, ragionando sulla Figura 2.3, le ulteriori seguenti proprietà, valide $\forall x \in \mathbb{R}$:

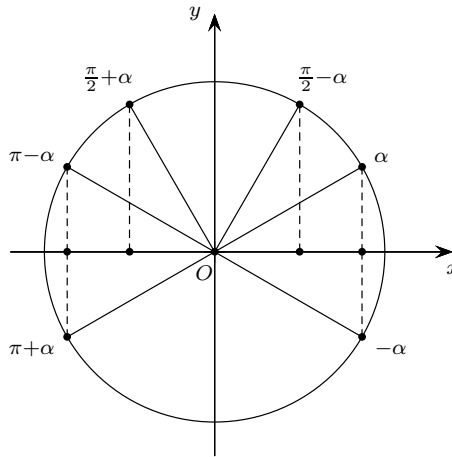


Figura 2.3 – Angoli complementari e supplementari.

$$(i) \quad \sin(-x) = -\sin x$$

$$(ii) \quad \sin(x + \pi) = -\sin x \quad (2.1.4)$$

$$(iii) \quad \sin(\pi - x) = \sin x .$$

La (i) evidenzia che $\sin x$ è una funzione dispari.

▷ **Esercizio 2.1.** Verificare che:

$$(i) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(ii) \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.1.5)$$

$$(iii) \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} .$$

Nota: $\sin^2 x$ significa $(\sin x)^2$ e non $\sin(x^2)$.

Soluzione. La (i) segue dall'applicazione del Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo $\triangle OHP$ in Figura 2.1.

Per verificare la (ii), si può osservare che $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$. Sostituendo questa relazione nella (i), si ottiene $2\sin^2(\pi/4) = 1$, da cui la conclusione è immediatamente deducibile.

Per quanto riguarda la (iii), il lettore deve riconoscere che $\triangle OHP$, quando $\alpha = \pi/6$, è la metà di un opportuno triangolo equilatero con lato di lunghezza 1. \triangleleft

Ragionando in modo analogo a quanto fatto per $\sin x$, si arriva alle seguenti proprietà di $\cos x$, valide $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \cos x &= \cos(x + 2\pi) \\ \text{(ii)} \quad \cos x &= \cos(-x) \\ \text{(iii)} \quad \cos(x + \pi) &= -\cos x \\ \text{(iv)} \quad \cos(\pi - x) &= -\cos x . \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

La (ii) mostra che $\cos x$ è una funzione pari. Inoltre, sempre ragionando sulla Figura 2.3, è utile rendersi conto che valgono anche le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \\ \text{(ii)} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \\ \text{(iii)} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \text{(iv)} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x . \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Il grafico di $\cos x$ è illustrato nella Figura 2.4. A questo punto, riteniamo opportuno un chiarimento sul metodo di studio: ragionare sulla Figura 2.1 (ampliandone, all'occorrenza, i dettagli) in relazione alle formule e ai grafici fino a Figura 2.4 è un esercizio molto formativo e utile. Al contrario, riteniamo che sia poco produttivo memorizzare le varie identità trigonometriche: conviene piuttosto consultare un formulario ed imparare ad utilizzarlo.

In genere, con il termine *risoluzione dei triangoli* si indica il processo che conduce alla determinazione completa del valore dei tre angoli e delle lunghezze dei tre lati di un dato triangolo. Il prossimo esercizio consente di

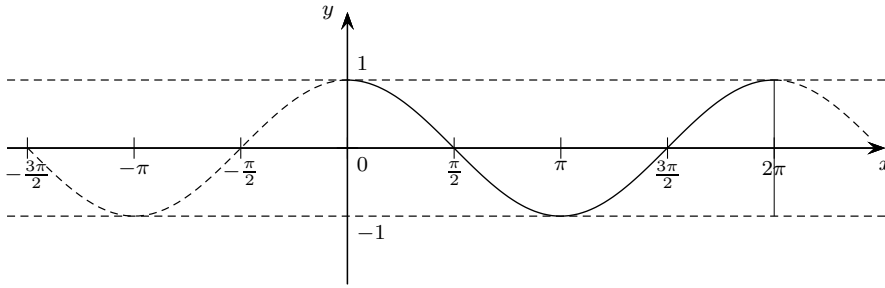
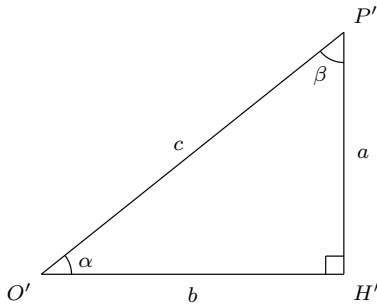


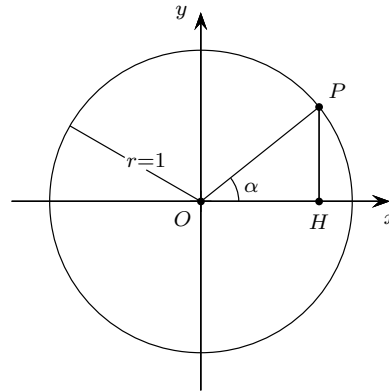
Figura 2.4 – Il grafico di $\cos x$.

concludere che la risoluzione di un triangolo rettangolo è possibile quando si conoscano un lato ed un angolo α ($\alpha \neq \pi/2$).

▷ **Esercizio 2.2.** Si consideri il triangolo rettangolo in Figura 2.5a. Le lettere a , b , c indicano le lunghezze dei lati, mentre α e β sono i due angoli opposti rispettivamente ai lati a e b . Dimostrare che valgono le seguenti



(a)



(b)

Figura 2.5 – Relazioni fra angoli e lati in un triangolo rettangolo.

relazioni:

$$(i) \quad b = c \cos \alpha \quad (ii) \quad a = c \sin \alpha \quad (iii) \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} . \quad (2.1.8)$$

Soluzione. Dal confronto di (a) e (b) in Figura 2.5 deduciamo che i due triangoli rettangoli $\triangle OHP$ e $\triangle O'H'P'$ sono simili. Dunque possiamo scrivere la seguente proporzione:

$$\overline{O'H'} : \overline{OH} = \overline{O'P'} : \overline{OP},$$

che equivale a:

$$b : \cos \alpha = c : 1,$$

da cui si ricava immediatamente la (2.1.8)(i). La (2.1.8)(ii) è simile, mentre la (2.1.8) (iii) è diretta conseguenza di (2.1.8)(i)–(ii). \triangleleft

L'esercizio precedente ci offre anche lo spunto per un'osservazione generale: l'origine greca della parola *trigono-metria* (triangolo-misura) richiama, nello spirito già evidenziato nel §2.0, il fatto che l'essenza di questa branca della matematica consiste nel fornire uno strumento di misurazione e calcolo che nasce direttamente dall'applicazione di concetti, quali la similitudine tra opportuni triangoli, nati nell'ambito della geometria euclidea classica (dopo queste considerazioni il lettore riprovi eventualmente la verifica delle formule (2.1.7)).

Ora possiamo passare all'altra funzione trigonometrica fondamentale, cioè la funzione *tangente* di α , denotata $\tan \alpha$. Più precisamente, la (2.1.8)(iii) suggerisce di definire:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (2.1.9)$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\cos \alpha \neq 0$, cioè $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dalla similitudine dei triangoli rettangoli $\triangle OHP$ e $\triangle OAQ$ in Figura 2.1 deduciamo che $\tan \alpha$ coincide con l'ordinata del punto Q : in particolare, quando l'angolo α varia da $-\pi/2$ a $\pi/2$, la funzione $\tan \alpha$ cresce da $-\infty$ a $+\infty$. Quindi, estendendo a tutti gli $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, abbiamo il grafico della funzione $\tan x$ riportato nella Figura 2.6.

Osservazione 2.1. La tangente dell'angolo θ , compreso tra una retta r e l'asse x (parte positiva), coincide con il coefficiente angolare m della retta stessa. Per verificare questa proprietà si consideri la Figura 2.7. Applicando (2.1.8)(iii) al triangolo $\triangle OQP$ si trova

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = m.$$

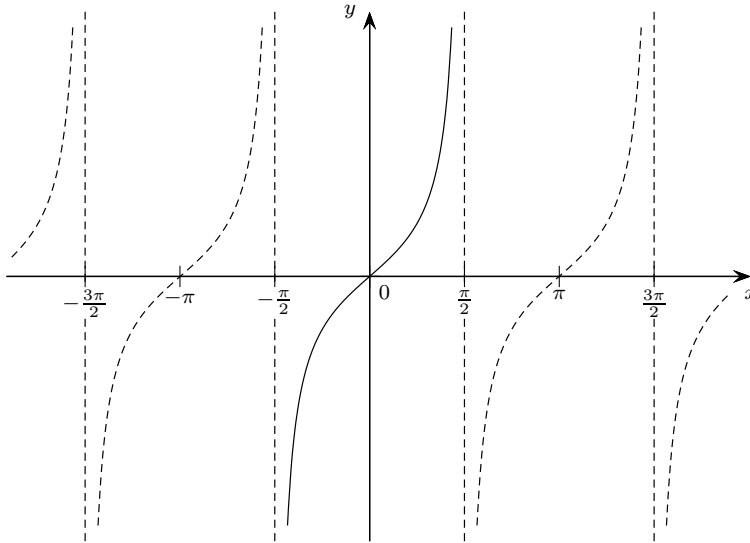


Figura 2.6 – Il grafico di $\tan x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

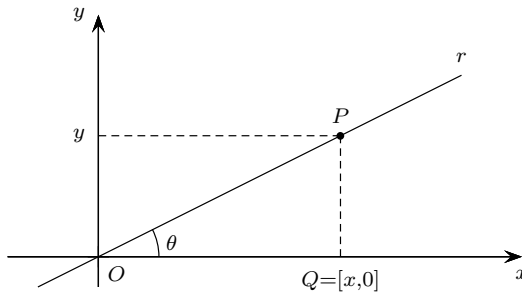


Figura 2.7 – Interpretazione del coefficiente angolare di una retta.

Anche se in questo libro non ne faremo uso segnaliamo, per completezza, la definizione delle seguenti funzioni, chiamate rispettivamente *cotangente*,

secante e cosecante:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{(ii)} \quad \sec x &= \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{(iii)} \quad \csc x &= \frac{1}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

2.2 Ulteriori esempi di identità trigonometriche

Nelle sezioni precedenti abbiamo preso confidenza con le principali funzioni trigonometriche ed abbiamo verificato una prima serie di identità di notevole importanza, quali le (2.1.4)–(2.1.8). Fornire un quadro completo di tutte le identità trigonometriche che trovano impiego in matematica, fisica e ingegneria è, comprensibilmente, un obiettivo ben al di là dei nostri scopi. In questa e nella successiva sezione ci proponiamo piuttosto di discutere solo alcune importanti identità, introducendo però anche quei ragionamenti geometrici che stanno alla base della loro dimostrazione: questo dovrebbe contribuire a consolidare, nel lettore, la percezione dello strettissimo legame tra trigonometria e geometria euclidea classica.

Iniziamo con le cosiddette formule di addizione e sottrazione che, apparentemente, sembra che fossero già note a Tolomeo nel 150 d.C.:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (2.2.1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2.2.2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (2.2.3)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad (2.2.4)$$

dove α e β sono angoli qualsiasi. Spieghiamo ora, per prima cosa, da quale argomentazione geometrica derivi la (2.2.1): osserviamo la Figura 2.8. Dato che $A = [1, 0]$, segue direttamente dalla definizione delle funzioni seno e coseno che le coordinate dei punti P , Q e R sono rispettivamente:

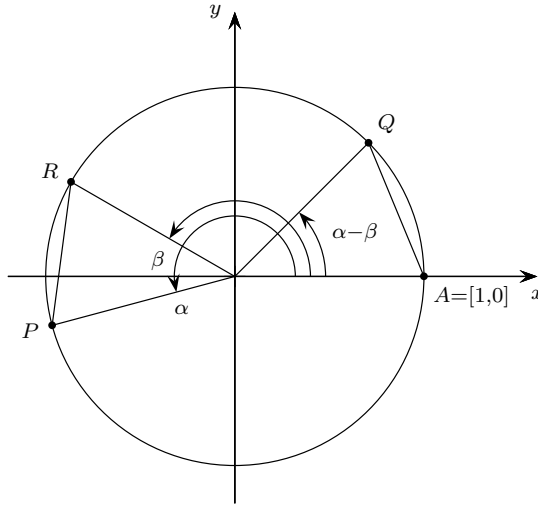


Figura 2.8 – Dimostrazione della (2.2.1).

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & P = [\cos \alpha, \sin \alpha] \\
 \text{(ii)} \quad & Q = [\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)] \\
 \text{(iii)} \quad & R = [\cos \beta, \sin \beta] .
 \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Ora osserviamo che i segmenti \overline{PR} e \overline{QA} hanno la stessa lunghezza, in quanto si tratta di due corde sottese ad angoli uguali, in quanto entrambi di ampiezza pari a $(\alpha - \beta)$. Pertanto, utilizzando le coordinate (2.2.5) dei vari punti, è facile verificare, applicando la formula della distanza tra due punti, che la relazione di uguaglianza

$$[\text{dist}(P, R)]^2 = [\text{dist}(Q, A)]^2$$

equivale a

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + \sin^2(\alpha - \beta) . \tag{2.2.6}$$

Svolgendo i calcoli in (2.2.6) e tenendo conto della relazione fondamentale (2.1.5)(i) si perviene a

$$2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) \tag{2.2.7}$$

che, effettuate le ovvie semplificazioni, dà proprio (2.2.1). \triangleleft

▷ **Esercizio 2.3.** Usando la (2.2.1), verificare le relazioni (2.2.2), (2.2.3) e (2.2.4).

Soluzione. La (2.2.2) segue dalla (2.2.1) sostituendo β con $-\beta$ e usando le simmetrie seguenti:

$$\cos \beta = \cos(-\beta) ; \quad \sin(-\beta) = -\sin \beta .$$

In modo simile, si ottiene la (2.2.4) dalla (2.2.3). Per verificare la (2.2.3) osserviamo che, usando (2.1.7)(ii), si ha:

$$\sin(\alpha + \beta) = -\cos\left(\left(\alpha + \beta\right) + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\alpha + \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right) . \quad (2.2.8)$$

Usando ora la (2.2.2) in (2.2.8) deduciamo che

$$\sin(\alpha + \beta) = -\left[\cos \alpha \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) - \sin \alpha \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right] . \quad (2.2.9)$$

Applicando ancora (2.1.7) arriviamo a

$$\sin(\alpha + \beta) = -[\cos \alpha (-\sin \beta) - \sin \alpha \cos \beta] , \quad (2.2.10)$$

che equivale a (2.2.3). ◁

▷ **Esercizio 2.4** (Formule di duplicazione). Verificare che

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \text{(ii)} \quad \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha . \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Soluzione. La (i) segue immediatamente da (2.2.2), con $\alpha = \beta$, mentre (ii) discende da (2.2.3), sempre con $\alpha = \beta$. ◁

▷ **Esercizio 2.5.** Verificare che

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \\ \text{(ii)} \quad \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) . \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Soluzione. Per la (i) usiamo la (2.2.11)(i). Otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) &= \frac{1}{2}[1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha] = \frac{1}{2}[(1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha] \\ &= \frac{1}{2}[2 \cos^2 \alpha] = \cos^2 \alpha . \end{aligned}$$

La verifica della (ii) è analoga e pertanto lasciata al lettore. ◁

2.3 Esercizi di riepilogo

▷ **Esercizio 2.6.** Verificare i valori della seguente tabella

x	$\cos x$	$\sin x$
0	1	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	0	1

Soluzione. I valori del seno sono stati calcolati nell'Esercizio 2.1 tranne $\sin(\pi/3)$. Si osservi che, essendo $\sin(\pi/6) = 1/2$, si ottiene dalla (2.1.5)(i) che $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. Da quest'ultima, utilizzando la (2.1.7)(iii) si trova $\sin(\pi/3) = \sin(\pi/2 - \pi/6) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. In modo analogo si trovano i rimanenti valori del coseno.

◁

▷ **Esercizio 2.7.** Verificare la validità della seguente disuguaglianza:

$$\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha, \quad \forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.3.1)$$

Suggerimento: con riferimento alla Figura 2.9, ricondurre la (2.3.1) alla seguente, geometricamente ovvia, disuguaglianza di aree:

$$\text{Area}(\triangle OAP) < \text{Area}\left(\widehat{OAP}\right) < \text{Area}(\triangle OAQ), \quad (2.3.2)$$

dove \widehat{OAP} denota il settore circolare individuato da O , A e P .

Soluzione. Sempre con riferimento alla Figura 2.9,

$$P = [\cos \alpha, \sin \alpha] \quad \text{e} \quad Q = [1, \tan \alpha].$$

Le altezze dei due triangoli $\triangle OAP$ e $\triangle OAQ$, relative alla base \overline{OA} , valgono rispettivamente $\sin \alpha$ e $\tan \alpha$, per cui

$$\text{Area}(\triangle OAP) = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{PH} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha; \quad (2.3.3)$$

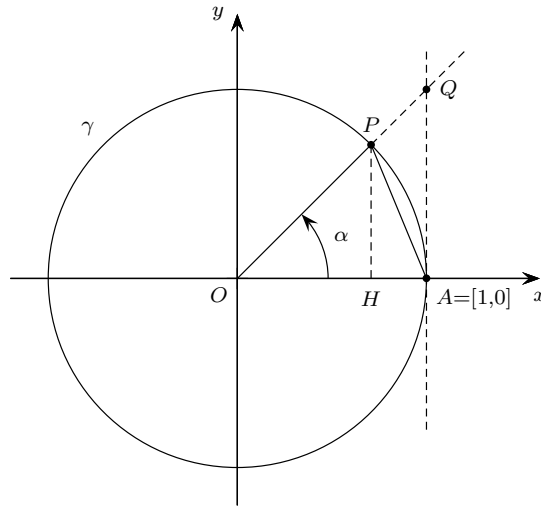


Figura 2.9 – Illustrazione relativa all'Esercizio 2.7.

$$\text{Area}(\triangle OAQ) = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AQ} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \alpha . \quad (2.3.4)$$

Per quanto riguarda l'area del settore circolare $O\widehat{AP}$ possiamo scrivere la seguente proporzione, in cui usiamo il fatto che l'area del disco delimitato da γ vale π , mentre la lunghezza totale della circonferenza γ misura 2π :

$$\pi : \text{Area}\left(O\widehat{AP}\right) = 2\pi : \alpha . \quad (2.3.5)$$

Dalla (2.3.5) si ricava

$$\text{Area}\left(O\widehat{AP}\right) = \frac{\alpha}{2} . \quad (2.3.6)$$

Ora, sostituendo le espressioni (2.3.3), (2.3.4) e (2.3.6) in (2.3.2) si ottiene immediatamente la (2.3.1). \triangleleft

Osservazione 2.2. Le tre funzioni coinvolte in (2.3.1) sono *dispari*, ovvero soddisfano la relazione

$$f(\alpha) = -f(-\alpha)$$

Quindi possiamo concludere che vale la seguente generalizzazione di (2.3.1):

$$|\sin \alpha| < |\alpha| < |\tan \alpha| , \quad \forall \alpha \quad \text{t.c.} \quad 0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2} . \quad (2.3.7)$$

▷ **Esercizio 2.8.** Assumendo la notazione fissata nella Figura 2.10a, verificare le seguenti identità di validità generale:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ \text{(ii)} \quad & \mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha \\ \text{(iii)} \quad & \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}, \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

dove \mathcal{A} denota l'area del triangolo.

Suggerimento: considerare il triangolo di partenza come l'unione di due triangoli rettangoli, come in Figura 2.10b.

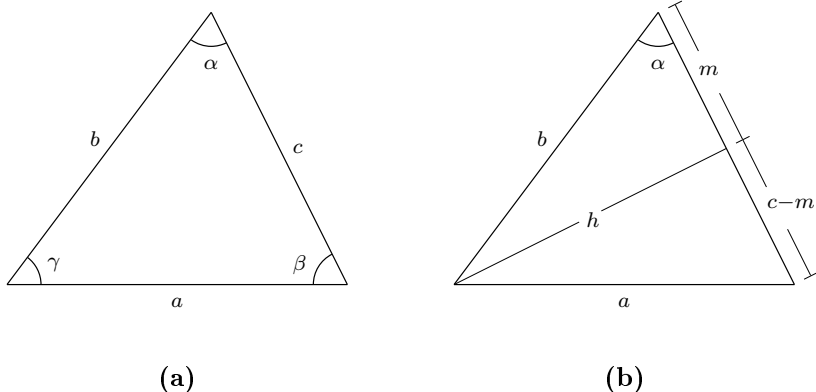


Figura 2.10 – (a) Triangolo generico (per l'Esercizio 2.8). (b) h è l'altezza rispetto al lato c .

Soluzione. (i) Usando il risultato dell'Esercizio 2.2, possiamo scrivere

$$m = b \cos \alpha ; \quad h = b \sin \alpha .$$

D'altra parte, per il Teorema di Pitagora,

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2 .$$

Ne segue che:

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \sin \alpha)^2 + (c - b \cos \alpha)^2 = b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha . \end{aligned}$$

(ii) Si trova immediatamente

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} cb \sin \alpha .$$

(iii) Moltiplicando per a la (2.3.8)(ii) si trova

$$a \mathcal{A} = \frac{1}{2} abc \sin \alpha$$

da cui

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} .$$

In analogia con il punto (ii) si trovano le seguenti espressioni per l'area del triangolo

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma ,$$

le quali implicano che

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} \quad \text{e} \quad \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} ,$$

da cui segue la tesi. ◁

Osservazione 2.3. La formula (2.3.8)(i) è nota come Teorema del coseno o Teorema di Carnot. Nel caso particolare in cui $\alpha = (\pi/2)$, la relazione (2.3.8) coincide con il risultato del Teorema di Pitagora. La formula (2.3.8)(iii) è nota come Teorema dei seni.

▷ **Esercizio 2.9.** Con riferimento alla Figura 2.11, come può un osservatore posto in A calcolare la distanza tra A e P senza attraversare il lago, ma con l'ausilio di un goniometro azimutale?

Soluzione. Scelto un secondo punto B dalla stessa sponda del lago (dal quale il punto P sia visibile), si calcolano la distanza c tra A e B e gli angoli α e β utilizzando il goniometro azimutale. Infine, applicando il Teorema dei seni al triangolo $\triangle ABP$, si trova

$$\frac{\overline{PA}}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} ,$$

da cui

$$\overline{PA} = \frac{c \sin \beta}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} .$$

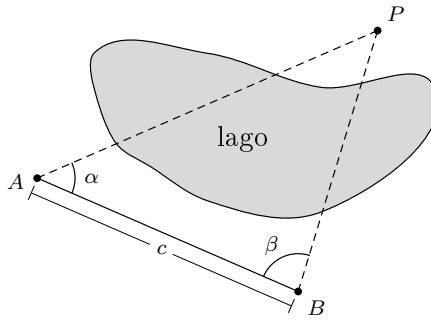


Figura 2.11 – Illustrazione dell'Esercizio 2.9.

◁

L'Esercizio 2.8 suggerisce una considerazione di carattere generale: spesso, durante lo studio di proprietà di oggetti geometrici, risulta conveniente suddividere la figura in un'unione di triangoli, eventualmente rettangoli. In questo ordine di idee, vediamo ora un'importante applicazione allo studio dei poligoni regolari. Come già illustrato nel Capitolo 1, ricordiamo che un *poligono regolare* è un poligono avente lati ed angoli uguali. Ricordiamo che per *raggio del poligono* si intende il raggio r del cerchio circoscritto, mentre l'*apotema* a è la lunghezza del segmento che unisce il centro con il punto medio di un lato. Ad illustrazione di quanto detto, nella Figura 2.12 abbiamo un poligono regolare con $n = 5$ lati (pentagono regolare).

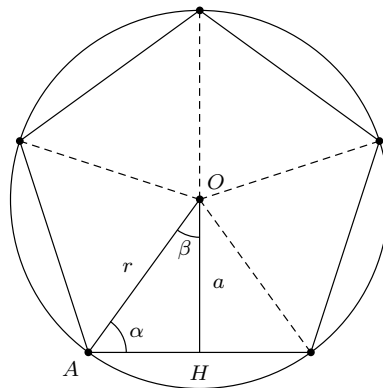


Figura 2.12 – Pentagono regolare.

▷ **Esercizio 2.10.** (i) Scrivere la formula che esprime l'apotema a in funzione di r e del numero n di lati di un poligono regolare.

(ii) Scrivere le formule che esprimono il lato ℓ e l'area \mathcal{A} del poligono regolare in funzione di r e n .

Soluzione. (i) La Figura 2.12 rappresenta il caso particolare $n = 5$, ma il lettore non dovrebbe avere difficoltà a generalizzarne l'idea, arrivando così a dedurre la seguente considerazione generale: i raggi che congiungono il centro O con i vertici del poligono regolare lo suddividono in n triangoli congruenti, ciascuno dei quali risulta unione di due triangoli rettangoli del tipo $\triangle AOH$ in Figura 2.12. In particolare, possiamo dire che, in funzione di n ,

$$(i) \quad \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{n} \right) = \frac{\pi}{n} \tag{2.3.9}$$

$$(ii) \quad \alpha = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \pi \left(\frac{n-2}{2n} \right).$$

Usando le (2.1.8) ora deduciamo che

$$a = r \cos \left(\frac{\pi}{n} \right). \tag{2.3.10}$$

(ii) Il lato ℓ , come deducibile dalla Figura 2.12, misura il doppio di \overline{AH} . Pertanto

$$\ell = 2r \sin \left(\frac{\pi}{n} \right). \tag{2.3.11}$$

L'area \mathcal{A} risulta dunque espressa da

$$\mathcal{A} = 2 \cdot n \cdot \text{Area}(\triangle AOH) = 2 \cdot n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot a. \tag{2.3.12}$$

Sostituendo ora (2.3.10) e (2.3.11) in (2.3.12) si conclude:

$$\mathcal{A} = \frac{n}{2} 2r \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) r \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) = \frac{nr^2}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right). \tag{2.3.13}$$

◁

Osservazione 2.4. Il lettore attento dovrebbe aver notato che la (2.3.12) equivale alla ben nota formula: area uguale perimetro per apotema diviso due.

Osservazione 2.5. Al crescere di n , l'area \mathcal{A} tenderà a coincidere con l'area del cerchio circoscritto, che vale πr^2 (si confronti con il §1.5). A beneficio dei lettori che già hanno familiarità con il concetto di limite e la relativa terminologia, riscriviamo ciò nel modo seguente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n r^2}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \pi r^2,$$

fatto che, analiticamente, equivale in pratica al noto limite fondamentale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

▷ **Esercizio 2.11.** Risolvere la seguente disequazione procedendo graficamente:

$$|\sin x| \geq \frac{1}{2}. \quad (2.3.14)$$

Soluzione. Nella Figura 2.13 vediamo il grafico della funzione (periodica di periodo $T = \pi$) $f(x) = |\sin x|$ e quello della funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/2, \forall x \in \mathbb{R}$ (cioè la funzione costante identicamente uguale a $(1/2)$).

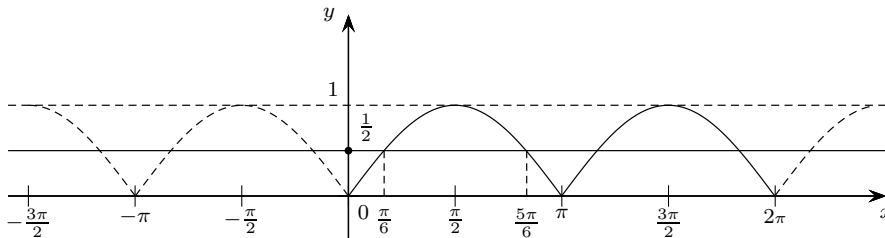


Figura 2.13 – I grafici di $f(x) = |\sin x|$ e di $g(x) \equiv (1/2)$.

Ne deduciamo che, limitatamente all'intervallo $0 \leq x \leq \pi$, le soluzioni della (2.3.14) sono $x_1 \leq x \leq x_2$, dove $x_1 = (\pi/6)$ e $x_2 = (5\pi/6)$. Ora, tenendo conto del fatto che $f(x) = |\sin x|$ ha periodo $T = \pi$, concludiamo che le soluzioni della (2.3.14), in \mathbb{R} , sono date da:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) \leq x \leq \left(\frac{5\pi}{6} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (2.3.15)$$

In pratica, A è un'unione di infiniti intervalli. Utilizzando maggior formalismo, si può riscrivere la (2.3.15) nel modo seguente:

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k,$$

dove

$$I_k = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left(\frac{\pi}{6} + k\pi \right) \leq x \leq \left(\frac{5\pi}{6} + k\pi \right) \right\} .$$

◁

2.4 Le funzioni trigonometriche inverse

Per completezza, in questa sezione descriviamo brevemente le funzioni inverse delle funzioni trigonometriche fondamentali. Si tratta di un argomento molto importante, che presuppone però che il lettore abbia familiarità con il concetto generale di funzione inversa. Iniziamo con lo studio dell'inversa del seno. Per poter invertire una data funzione è necessario poter precisare dominio e codominio in modo che la funzione considerata risulti bigettiva. Più precisamente, nel nostro caso prendiamo

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \sin x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] . \quad (2.4.1)$$

Questa funzione è bigettiva e la sua inversa, chiamata funzione *arcoseno*, si denota

$$\arcsin x, \quad x \in [-1, 1] .$$

Il grafico dell'arcoseno è in Figura 2.14b.

Si noti che $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(0) = 0$. L'arcoseno è una funzione dispari, strettamente crescente.

▷ **Esercizio 2.12.** Quanto valgono $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$?

Soluzione.

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} .$$

◁

L'inversa della funzione tangente si ottiene considerando la funzione bigettiva:

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan x, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) . \quad (2.4.2)$$

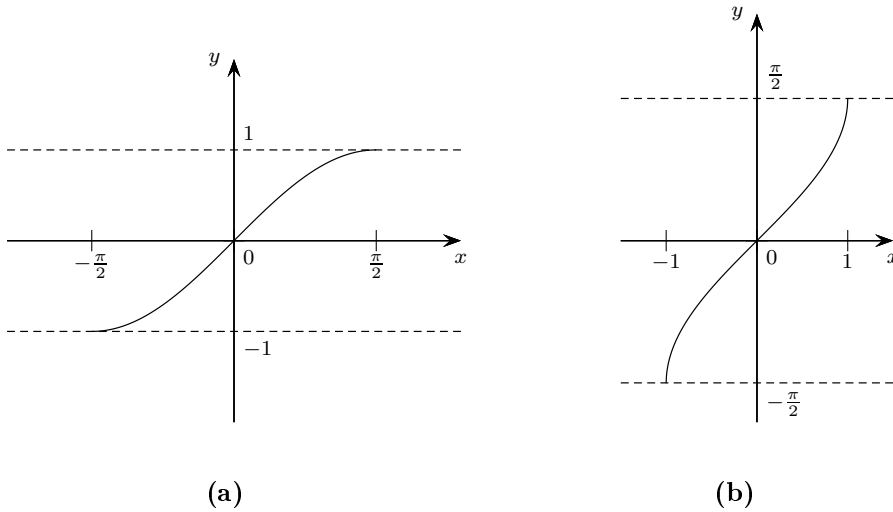


Figura 2.14 – (a) Grafico della funzione $\sin x$. (b) Grafico della funzione $\arcsin x$.

La sua inversa, detta *arcotangente*, si denota col simbolo $\arctan x$, $x \in \mathbb{R}$. È una funzione dispari, strettamente crescente, con grafico come in Figura 2.15b.

Per quanto riguarda l'inversa del coseno, chiamata *arcocoseno*, si procede considerando la funzione bigettiva:

$$f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \cos x, \quad \forall x \in [0, \pi]. \quad (2.4.3)$$

La funzione inversa, $\arccos x$, $x \in [-1, 1]$, è strettamente decrescente e ha grafico come in Figura 2.16b.

Il lettore è invitato a constatare, osservando i grafici delle funzioni seno, coseno, tangente e quelli delle rispettive inverse, che il grafico di $f(x)$ e quello di $f^{-1}(x)$ risultano essere uno il simmetrico dell'altro rispetto alla bisettrice $y = x$: questo è un fatto di validità generale, generalmente illustrato nei corsi di analisi matematica 1.

▷ **Esercizio 2.13.** Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la funzione bigettiva definita da

$$f(x) = \arctan(x^3 + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Determinare l'espressione di $f^{-1} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$.

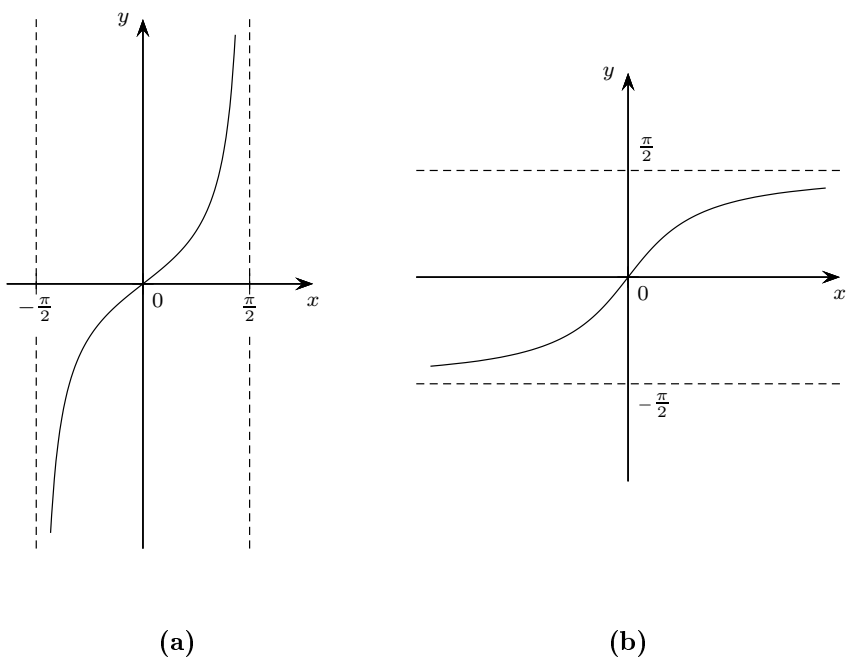


Figura 2.15 – (a) Grafico della funzione tangente. (b) Grafico della funzione arcotangente.

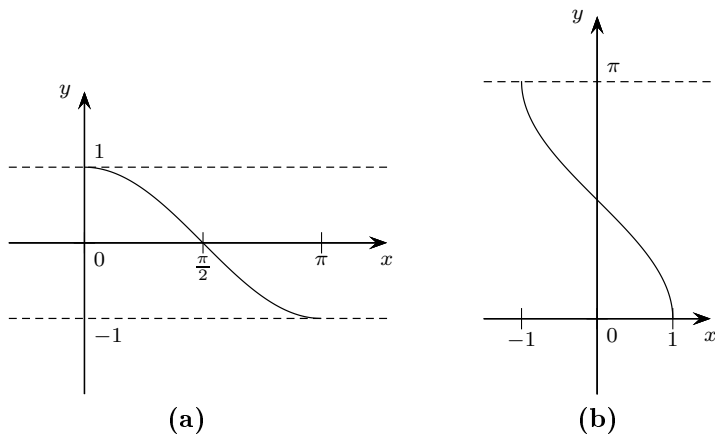


Figura 2.16 – (a) Grafico della funzione $\cos x$. (b) Grafico della funzione $\arccos x$.

Soluzione. Scrivendo $y = \arctan(x^3 + 1)$, ricaviamo $\tan y = x^3 + 1$ e poi $x = \sqrt[3]{(\tan y) - 1}$. Da questo deduciamo che

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{(\tan x) - 1}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

<

▷ **Esercizio 2.14.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = 1 - \sin(4x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(i) Stabilire se f è periodica e, in caso affermativo, determinarne il periodo T .

(ii) Disegnare il grafico di f relativamente all'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

Soluzione. (i) Sia $g(x)$ una funzione definita su \mathbb{R} , periodica di periodo T . Allora, se $c > 0$ è una costante fissata, la funzione

$$h_c(x) = g(cx), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

sarà a sua volta periodica, di periodo $T_c = (T/c)$. Infatti,

$$h_c(x + T_c) = g(c(x + T_c)) = g(cx + cT_c) = g(cx + T) = g(cx) = h_c(x),$$

dove la penultima uguaglianza è conseguenza della periodicità di $g(x)$ (inoltre, questa stessa periodicità assicura anche che T_c sia il più piccolo numero reale per cui vale la precedente catena di uguaglianze). Poiché sappiamo che la funzione $\sin x$ è periodica di periodo $T = 2\pi$, da quanto detto segue facilmente che la funzione $f(x)$ dell'esercizio è periodica con periodo T' dato da:

$$T' = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

(ii) Il lettore è ora invitato a ragionare autonomamente al fine di arrivare ad una realizzazione qualitativamente accettabile del grafico di $f(x)$: il risultato è riassunto in Figura 2.17.

<

▷ **Esercizio 2.15.** Determinare le soluzioni della seguente disequazione:

$$4 \cos^2 x + 2 \sin^2 x + \sin x - 3 \geq 0. \quad (2.4.4)$$

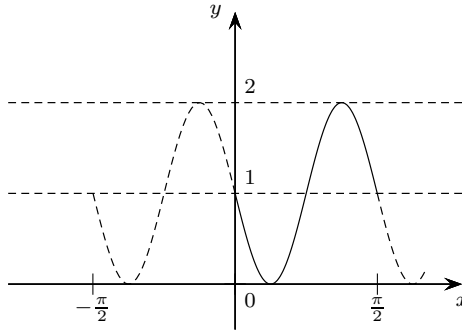


Figura 2.17 – Grafico della funzione $1 - \sin 4x$.

Soluzione. Usando la relazione $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ troviamo che la disequazione (2.4.4) è equivalente a:

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 \leq 0. \quad (2.4.5)$$

Ora, per comodità poniamo $y = \sin x$. In termini di y , la (2.4.5) diventa:

$$2y^2 - y - 1 \leq 0. \quad (2.4.6)$$

Studiando questa disequazione di secondo grado si perviene alla condizione

$$-\frac{1}{2} \leq y \leq 1,$$

ovvero:

$$-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1. \quad (2.4.7)$$

Infine, la (2.4.7) è soddisfatta in tutti i seguenti intervalli I_k , con $k \in \mathbb{Z}$ arbitrario:

$$I_k = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right\}.$$

◁

2.5 Esercizi proposti

▷ **Esercizio 2.16.** Calcolare la misura in radianti di un angolo di 20° .

▷ **Esercizio 2.17.** Determinare le soluzioni in \mathbb{R} di

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x + 2 - \sin^2 x = \cos^2 x.$$

▷ **Esercizio 2.18.** Determinare le soluzioni in \mathbb{R} di

$$1 - \sin^2 x + \cos x > 0 .$$

▷ **Esercizio 2.19.** Determinare le soluzioni in \mathbb{R} di

$$\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \geq 0 .$$

▷ **Esercizio 2.20.** Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definita da:

$$f(x) = \arctan \left(\sqrt[3]{x^5 + 1} \right) .$$

Determinare l'espressione che definisce l'inversa di f .

2.6 Commenti

La origini della trigonometria si perdono nella notte dei tempi. Già in epoca molto antica gli egiziani misuravano l'inclinazione di un piano rispetto ad un altro attraverso calcoli trigonometrici. Ancora una volta questi calcoli sono contenuti nel papiro di Rhind del quale abbiamo parlato nel Capitolo 1.

Sicuramente lo sviluppo della trigonometria è legato alle sue applicazioni in astronomia, come si evince dai lavori di Tolomeo, Ipparco e, più vicini a noi, Copernico.

Una sorprendente applicazione del calcolo trigonometrico permise ad Eratostene di misurare il meridiano terrestre.

Soluzioni degli esercizi proposti

Capitolo 1

Esercizio 1.17

Si estenda \overline{KM} sino ad incontrare il prolungamento di \overline{CB} in un punto G . Segue che $\triangle AMK$ è congruente a $\triangle BMG$. Quindi $\overline{KM} = \overline{MG}$. Segue infine che $\triangle KMC$ è congruente a $\triangle GMC$, da cui $\widehat{BCM} \cong \widehat{KCM}$.

Esercizio 1.18

Si costruisca un triangolo equilatero $\triangle DCF$ esterno al quadrato A, B, C, D con base \overline{CD} . Mostrare che $\triangle ADE$ è congruente a $\triangle FDE$. Dedurre che $\widehat{DAE} = 30$, da cui $\widehat{BAE} = 60$. Allo stesso modo si mostra che $\widehat{ABE} = 60$ da cui la tesi.

Esercizio 1.19

Sia P la proiezione ortogonale di C su \overline{AB} . Si mostri dapprima che $\triangle CPE$ è congruente a $\triangle CFE$, da cui segue che $\overline{PE} = \overline{FE}$. In modo analogo si mostri che $\triangle CPD$ è congruente a $\triangle CGD$, da cui $\overline{DP} = \overline{DG}$. Infine, essendo $\overline{DE} = \overline{DP} + \overline{PE}$ si conclude.

Esercizio 1.20

Si prolunghi \overline{FE} sino ad incontrare \overline{AD} in H . Si deduca, usando la similitudine dei triangoli $\triangle ACD$ e $\triangle AFH$, che $2\overline{HF} = \overline{DC}$. Allo stesso modo, considerando i due triangoli simili $\triangle ADB$ e $\triangle HDE$, si trova che $2\overline{HE} = \overline{AB}$. Segue che $\overline{AB} = 91$.

Esercizio 1.21

$$h = 24m$$

Esercizio 1.22

$$r = \frac{3}{4}$$

Esercizio 1.23

L'area di base e l'area laterale soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \mathcal{A}_b = \frac{18}{17} \mathcal{A}_\ell \\ \mathcal{A}_b + \mathcal{A}_\ell = 800 . \end{cases}$$

Segue che $\mathcal{A}_\ell = 544$ e $\mathcal{A}_b = 256$. Se a è la lunghezza del lato del quadrato di base, dalle formule viste a pag. 40, si trova:

$$a = \sqrt{256} = 16, \quad d = \frac{\mathcal{A}_\ell}{2a} = \frac{544}{32} = 17 .$$

Segue dal Teorema di Pitagora che

$$h = \sqrt{d^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 .$$

Il volume richiesto è quindi

$$\mathcal{V} = \frac{256 \cdot 15}{3} = 1280 \text{ cm}^3 .$$

Esercizio 1.24

Siano a e b rispettivamente la base maggiore e minore del trapezio. Dal Teorema di Pitagora l'altezza del trapezio è pari a $h = \sqrt{100 - 36} = 8$. Dalla $2b + h + 6 + 10 = 42$ segue che $b = 9$ e $a = b + 6 = 15$. Il solido che si ottiene dalla rotazione del trapezio è un cilindro circolare retto, di raggio $r = h = 8$ e altezza $b = 9$, con sopra un cono circolare retto avente lo stesso raggio e altezza 6. Il volume del solido, essendo la somma dei due volumi, diventa

$$\mathcal{V} = \pi \cdot 64 \cdot 9 + \frac{\pi \cdot 64 \cdot 6}{3} = 704 \pi \text{ cm}^3 .$$

L'area totale è data da: area laterale del cono, più area laterale e area di base del cilindro:

$$\mathcal{A}_t = \pi \cdot 8 \cdot 10 + 2\pi \cdot 8 \cdot 9 + \pi \cdot 64 = 288 \pi \text{ cm}^2 .$$

Capitolo 2

Esercizio 2.16

Un angolo di 20° misura in radianti $\pi/9$.

Esercizio 2.17

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi , \text{ con } k \in \mathbb{Z} ; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi , \text{ con } k \in \mathbb{Z} .$$

Esercizio 2.18

$$I_k = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\} , \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ arbitrario.}$$

Esercizio 2.19

$$I_k = \left\{ x \in \mathbb{R} : k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi \right\} , \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ arbitrario.}$$

Esercizio 2.20

$$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{(\tan x)^3 - 1} , \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) .$$

Indice analitico

- angoli alterni interni, 6
- angoli corrispondenti, 9
- angolo al centro, 7
- angolo alla circonferenza, 8
- angolo esterno, 4
- angolo interno, 4
- apotema, 17, 64
- area del cerchio, 39
- area di solidi notevoli, 38
- area di un poligono regolare, 38
- asse di un segmento, 6

- baricentro, 18

- calculus, 49
- cilindro, 39
- circocentro, 18
- circonferenza, 6
- circonferenza circoscritta, 14
- circonferenza inscritta, 14
- cono, 39
- Copernico, 72
- corda di una circonferenza, 6
- criteri di congruenza, 3
- criteri di similitudine, 27

- diametro di una circonferenza, 6

- disequazione, 66

- Eratostene, 72
- Euclide, 1

- formule di addizione e sottrazione, 57
- formule di duplicazione, 59
- funzione arcocoseno, 68
- funzione arcoseno, 67
- funzione arcotangente, 68
- funzione cosecante, 57
- funzione cotangente, 56
- funzione inversa, 67
- funzione periodica, 51
- funzione secante, 57
- funzione tangente, 55
- funzioni seno e coseno, 50

- geometrie non euclidee, 48

- Hilbert, 2

- identità trigonometriche, 57
- incentro, 18
- Ipparco, 72

- Liu Hui, 48

- lunghezza della circonferenza, 39 volume di solidi notevoli, 38
- ortocentro, 18
- papiro di Rhind, 48, 72
- parallelepipedo, 39
- piramide, 39
- Poincaré, 47
- poligono circoscritto, 14
- poligono inscritto, 14
- poligono regolare, 17, 64
- postulati di Euclide, 2
- prisma, 39
- quinto postulato, 47
- radianti, 50
- raggio di un poligono, 17, 64
- Riemann, 47
- risoluzione dei triangoli, 53
- Saccheri, 47
- sfera, 41
- similitudine, 25, 55
- similitudine (rapporto di), 27
- Teorema dei seni, 63
- Teorema del coseno, 63
- Teorema dell'angolo esterno, 4
- Teorema della secante e della tangente, 31
- Teorema delle secanti, 30
- Teorema di Carnot, 63
- Teorema di Pitagora, 2, 3, 20, 21, 24, 36, 37, 46, 48, 52, 62, 63
- Teorema di Talete, 3, 25, 27
- Teoremi di Euclide, 28
- Tolomeo, 72
- triangoli simili, 26