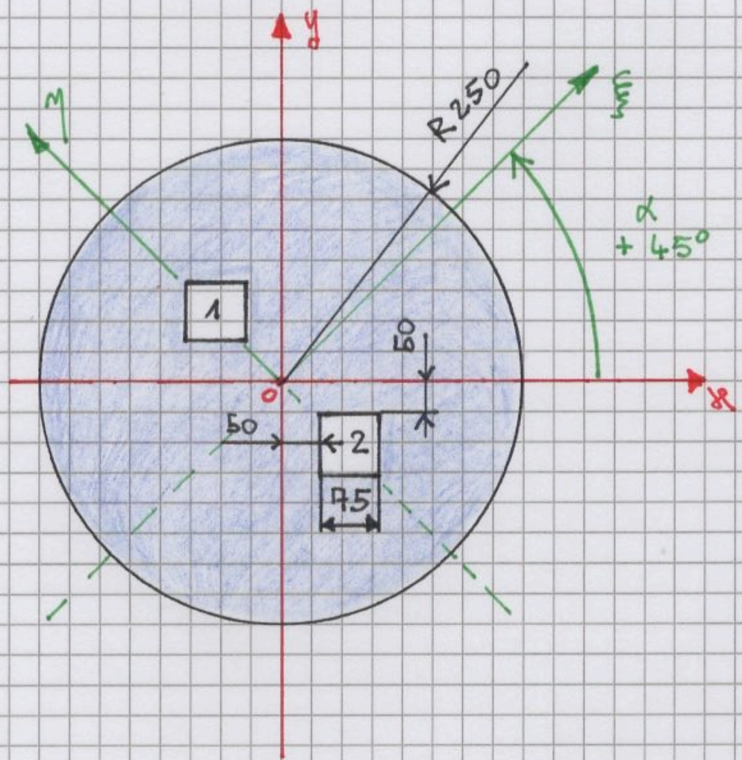
GEOMETRIA DELLE AREE 29/10/2018 ①

ES. A/64 "Engineering Mechanics, STATICS" Kraige, Meriam, Bolton



Si tratta di un cerchio in cui sono stati praticati due fori quadrati di lato 75 mm e distanti dal centro come indicato.
$l_\square = 75\,mm$

CALCOLO DEL BARICENTRO.

Per calcolare le coordinate del baricentro si sfruttano le proprietà del momento statico.

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \int_A y\, dA \\ S_y &= \int_A x\, dA \end{aligned}\right\} \text{MOMENTI STATICI} \qquad \bar{y}_G = \frac{S_x}{A} \qquad \bar{x}_G = \frac{S_y}{A}$$

Calcoliamo le caratteristiche di tutte le geometrie.

$$\underbrace{A_\square}_{\text{quadrato}} = 75^2 = 5625\ mm^2 \qquad \underbrace{A_O}_{\text{cerchio}} = 196349.5408\ mm^2$$

$S_{x_O} = S_{y_O} = \emptyset \rightarrow$ perché il sistema $\{Oxy\}$ è centrato nel baricentro del cerchio

$$\boxed{1}\begin{cases} S_{x_{\square_1}} = A_\square \cdot \left(50 + \frac{75}{2}\right) = 492187.5\ mm^3 \\ S_{y_{\square_1}} = A_\square \left[-\left(50 + \frac{75}{2}\right)\right] = -492187.5\ mm^3 \end{cases}$$

$$\boxed{2}\begin{cases} S_{x_{\square_2}} = A_\square \left[-\left(50 + \frac{75}{2}\right)\right] = -492187.5\ mm^3 \\ S_{y_{\square_2}} = A_\square \left(50 + \frac{75}{2}\right) = 492187.5\ mm^3 \end{cases}$$

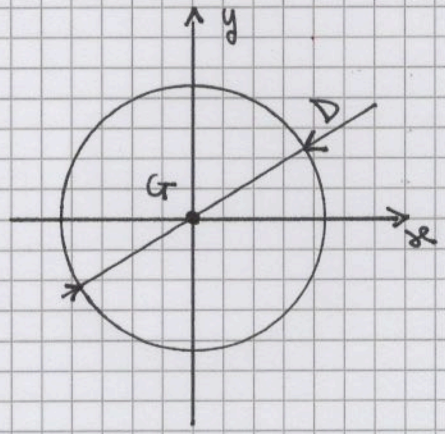
CALCOLO DEL BARICENTRO

$$S_x^{TOT} = S_{x_O} - S_{x_{\square_1}} - S_{x_{\square_2}} = \emptyset$$

$$S_y^{TOT} = S_{y_O} - S_{y_{\square_1}} - S_{y_{2\square}} = \emptyset$$

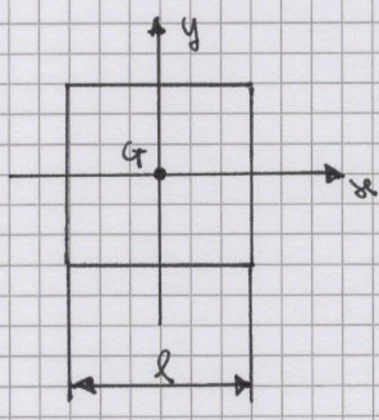
Possiamo dedurre quindi che il punto O sia il baricentro G dell'intera sezione, quindi diciamo che $\{Oxy\}$ è un sistema di riferimento <u>CENTRALE</u>.

CALCOLO DEI MOMENTI DI INERZIA



CERCHIO

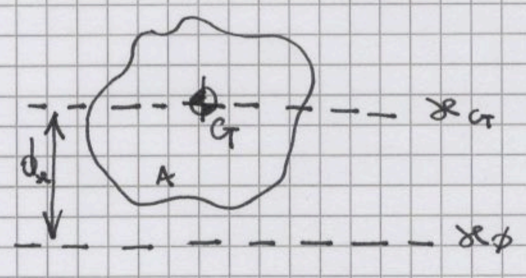
$$\begin{cases} I_x = \dfrac{\pi D^4}{64} = I_y \\ I_{xy} = \emptyset \end{cases} \qquad J = \frac{\pi D^4}{32}$$



QUADRATO

$$\begin{cases} I_x = I_y = \dfrac{l^4}{12} \\ I_{xy} = \emptyset \end{cases} \qquad J = \frac{l^4}{6}$$

Teorema di HUYGENS - STEINER (o dell'asse parallelo).



$$I_{x_\emptyset} = I_{x_G} + A\, d_x^2$$

$$I_{y_\emptyset} = I_{y_G} + A\, d_y^2$$

$$I_{x_\emptyset y_\emptyset} = I_{x_G y_G} + A\, d_x d_y$$

In questo caso lavoriamo per sottrazione di aree.

$$I_x = I_{x_O} - \left[I_{x_{\square_1}} + A_{\square_1} \left(50 + \frac{75}{2}\right)^2 \right] - \left[I_{x_{\square_2}} + A_{\square_2} \left(-50 - \frac{75}{2}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{\pi D^4}{64} - 2\left[\frac{l^4}{12} + A_{\square} (87.5)^2 \right] = 2'976'555'325,7713 \ mm^4$$

CALCOLO DEI MOMENTI DI INERZIA

$$I_y = I_{y_0} - \left[I_{y\square_1} + A_{\square_1} \left(-50 - \frac{75}{2}\right)^2 \right] - \left[I_{y\square_2} + A_{\square_2} \left(50 + \frac{75}{2}\right)^2 \right] =$$

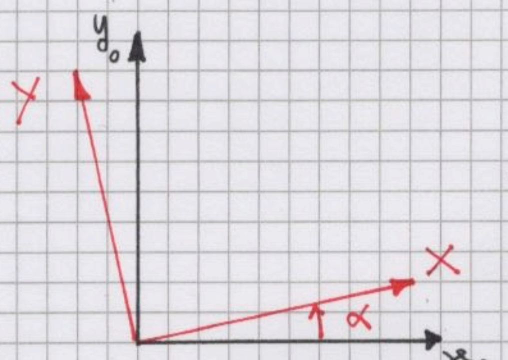
$$= \frac{\pi D^4}{64} - 2\left[\frac{l^4}{12} + A_{\square} (87.5)^2 \right] = 2'976'555'325,7713 \ mm^4$$

$$I_{xy} = \underbrace{I_{xy_0}}_{\varnothing} - \left[\underbrace{I_{xy\square_1}}_{\varnothing} + A_{\square_1} \underbrace{\left(50 + \frac{75}{2}\right)}_{\Delta y} \underbrace{\left(-50 - \frac{75}{2}\right)}_{\Delta x} \right] +$$

$$+ - \left[\underbrace{I_{xy\square_2}}_{\varnothing} + A_{\square_2} \underbrace{\left(-50 - \frac{75}{2}\right)}_{\Delta y} \underbrace{\left(50 + \frac{75}{2}\right)}_{\Delta x} \right] =$$

$$= -2\left[75^2 (-87.5)(87.5) \right] = 86'132'812,5 \ mm^4$$

FORMULE DI ROTAZIONE DEI MOMENTI DI INERZIA



$$\begin{cases} I_X = \dfrac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} - \dfrac{I_{y_0} - I_{x_0}}{2} \cos(2\alpha) - I_{xy_0} \sin(2\alpha) \\ I_Y = \dfrac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} + \dfrac{I_{y_0} - I_{x_0}}{2} \cos(2\alpha) + I_{xy_0} \sin(2\alpha) \\ I_{XY} = I_{xy_0} \cos(2\alpha) - \left(\dfrac{I_y - I_x}{2}\right) \sin(2\alpha) \end{cases}$$

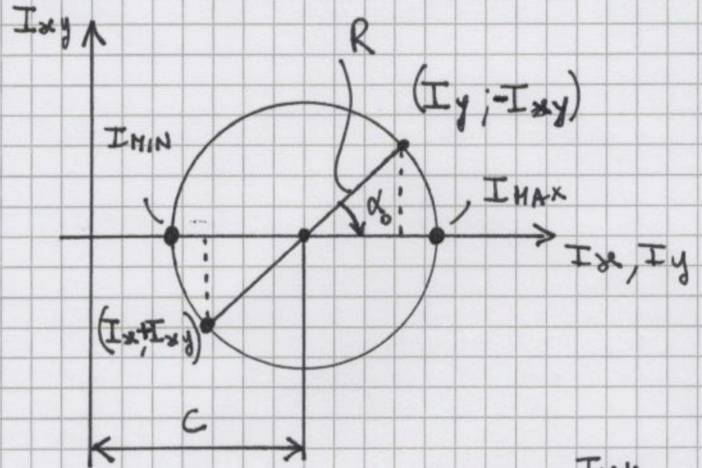
Queste sono le formule di rotazione per i momenti di inerzia. Siamo interessati a trovare la coppia di assi coordinati per i quali $I_{xy} = \varnothing$: questa è la condizione per cui i momenti I_x e I_y saranno principali (ovvero uno massimo e l'altro minimo, con il centrifugo nullo). Derivando $I_y(\alpha)$ rispetto ad α e annullando la derivata si ottiene il valore α_0 che rende stazionario $I_y(\alpha)$.

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2 I_{xy_0}}{I_{y_0} - I_{x_0}} \right) \qquad -\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$$

$\hookrightarrow I_{xy}(\alpha_0) = \varnothing$

CERCHIO DI MOHR

Per ottenere direzioni e momenti di inerzia principali ci si serve del cerchio di Mohr, la cui dimostrazione si può reperire facoltativamente dagli appunti del docente.



$$C = \frac{I_x + I_y}{2}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_x)^2 + (2 I_{xy})^2}$$

$$I_{MIN}^{MAX} = C \pm R$$

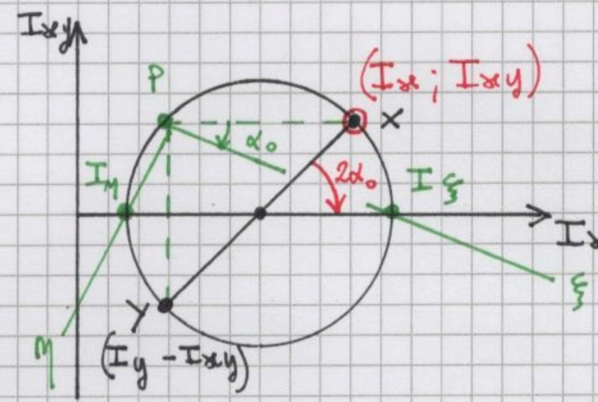
CASI TIPICI

- $I_x > I_y$; $I_{xy} > \emptyset$

$\alpha_0 < \emptyset \rightarrow$ C.W.

$I_x = I_\xi \qquad I_y = I_\eta$

$I_\xi > I_\eta$



$I_\xi = C + R \qquad I_\eta = C - R$

Nelle figure è riportata la costruzione del polo: questa è comoda per visualizzare immediatamente le direzioni principali ξ ed η. Si conduce per il punto X la parallela all'asse I_x e per il punto ~~Y~~ Y la parallela all'asse I_{xy}.
Il loro punto d'incontro identifica il polo P per le direzioni principali. Se si conducono da tale polo due rette passanti per il punto $(I_\xi, \emptyset)$ e per il punto $(I_\eta, \emptyset)$ queste ~~sono~~ sono indicative delle direzioni principali.
L'asse ξ risulta inclinato rispetto alla parallela all'asse I_x dell'angolo α_0. Questo risulta dal teorema secondo il quale un angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco su cui insiste anche un angolo al centro è la metà di quest'ultimo.

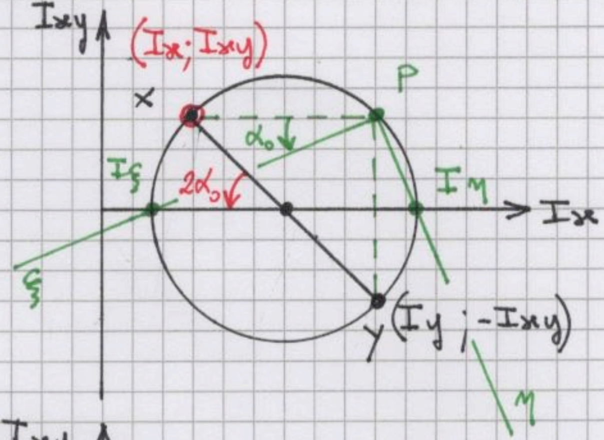
CERCHIO DI MOHR (CASI TIPICI)

- $I_x < I_y \; ; \; I_{xy} > 0$

  $\alpha_0 > 0 \longrightarrow$ CCW

  $I_\xi = C - R \qquad I_\eta = C + R$

  $I_\xi < I_\eta$

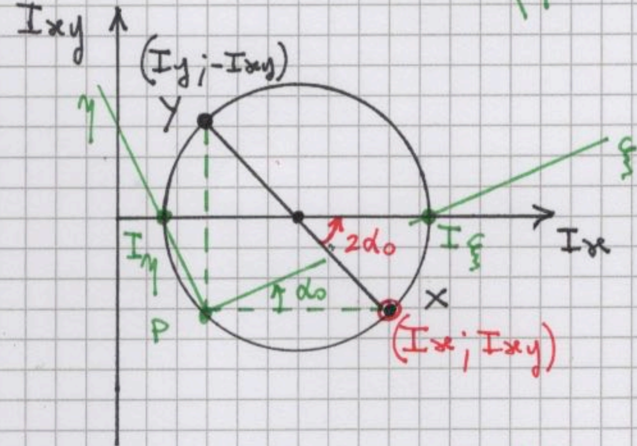


- $I_x > I_y \; ; \; I_{xy} < 0$

  $\alpha_0 > 0 \longrightarrow$ CCW

  $I_\xi = C + R \qquad I_\eta = C - R$

  $I_\xi > I_\eta$

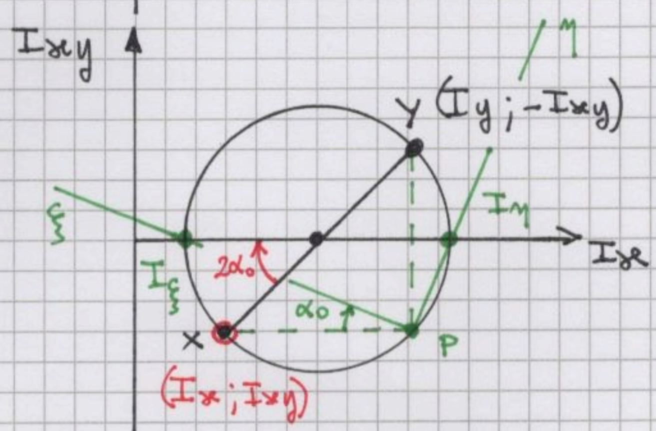


- $I_x < I_y \; ; \; I_{xy} < 0$

  $\alpha_0 < 0 \longrightarrow$ CW

  $I_\xi = C - R \qquad I_\eta = C + R$

  $I_\xi < I_\eta$

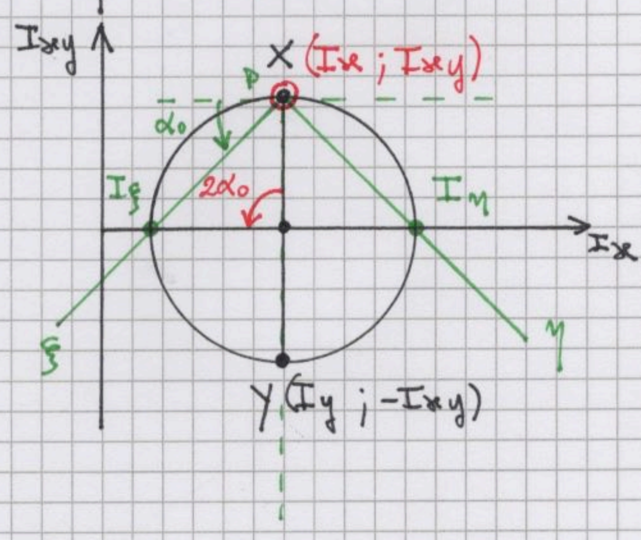


- $I_x = I_y \; ; \; I_{xy} > 0$

  $\alpha_0 = +45° > 0 \rightarrow$ CCW

  $I_\xi = C - R \qquad I_\eta = C + R$

  $I_\xi < I_\eta$



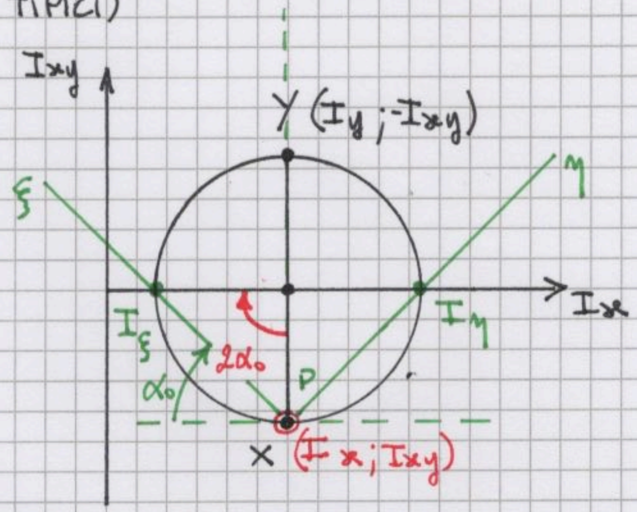
CERCHIO DI MOHR (CASI TIPICI)

- $I_x = I_y$; $I_{xy} < \emptyset$

  $\alpha_0 = -45° < \emptyset \rightarrow CW$

  $I_\xi = C - R \quad I_\eta = C + R$

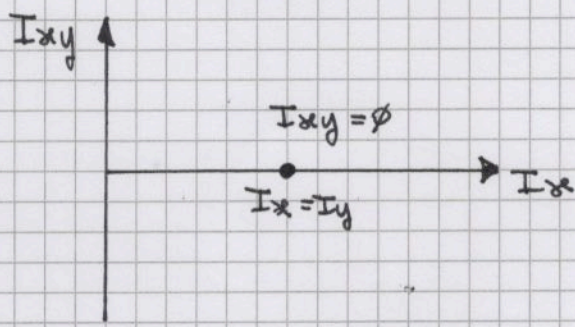
  $I_\xi < I_\eta$



- $I_x = I_y \quad I_{xy} = \emptyset$

  $R = \emptyset$

  Il cerchio degenere in un punto: tutte le direzioni sono principali



Nel nostro caso abbiamo:

$I_x = I_y = 2'976'555'325,7713 \ mm^4 \qquad I_{xy} = 86'132'812,5 > \emptyset \ mm^4$

$C = I_x = I_y \qquad R = I_{xy}$

$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{atan}(\infty) = +45° \rightarrow CCW$

$I_\xi = C - R = 2\,890\,422\,513,2713 \ mm^4$

$I_\eta = C + R = 3'062'688'138,2713 \ mm^4$