

1) Calcolare il flusso di radiazione emesso nell'unità di tempo da un filamento di tungsteno di 0.13mm di diametro e 70 cm di lunghezza alla temperatura di 2750°C assumendo un valore di emissività ϵ pari a 0.39; calcolare il valore della lunghezza d'onda λ per cui si ha il massimo della potere emissivo monocromatico e il valore che assume in corrispondenza del massimo, supponendo che il filamento sia un corpo grigio. Il filamento emette radiazione luminosa?

L'esercizio chiede di calcolare la quantità di radiazione termica che si libera da un corpo in virtù della sua temperatura. Sapendo che questo flusso coincide con il potere emissivo emisferico di un corpo grigio moltiplicato per l'area della sua superficie allora:

$$\Phi_{\text{filamento}} = A_{\text{filamento}} \cdot E_{\text{corpo grigio}}(T_{\text{filamento}}) = A_{\text{filamento}} \cdot \epsilon_{\text{filamento}} \cdot E_{\text{nero}}(T_{\text{filamento}}); \text{ dalla legge di Stefan Boltzmann}$$

$$\Phi_{\text{filamento}} = (\pi \cdot D \cdot L) \epsilon_{\text{filamento}} \cdot \sigma \cdot T^4 = 528 \text{ W. } (T_{\text{filamento}} \text{ è espressa in K})$$

La lunghezza d'onda a cui corrisponde il massimo di emissione del potere emissivo monocromatico del filamento, essendo un corpo grigio, è la stessa di quella relativa ad un corpo nero avente la medesima temperatura del filamento. Questa lunghezza d'onda può essere ottenuta dalla legge di Wien.

$$\lambda_{\text{max}} T_{\text{filamento}} = 2898 \mu\text{mK}, \text{ da cui si ricava con } T_{\text{filamento}} = (2750 + 273.15) \text{ K} = 3023.15 \text{ K}$$

$$\lambda_{\text{max}} = 0.96 \mu\text{m}$$

Il valore che assume il potere emissivo monocromatico in corrispondenza di λ_{max} lo possiamo determinare dalla legge di Planck che ci fornisce l'espressione analitica dell'andamento del potere emissivo monocromatico, in funzione della lunghezza d'onda e della temperatura del corpo nero. Pur essendo il filamento un corpo grigio e quindi non nero il valore del massimo sarà posizionato alla stessa lunghezza d'onda e sarà pari a quello del corpo nero ridotto dell'emissività del filamento.

$$E_{\text{filamento}}(\lambda, T_{\text{filamento}}) = \epsilon_{\text{filamento}} \cdot E_{\text{nero}}(\lambda, T_{\text{filamento}}) = \epsilon_{\text{filamento}} \cdot (2 \cdot \pi \cdot h \cdot c^2) / [(\lambda^5_{\text{filamento}}) \cdot (e^{(h \cdot c) / (K \cdot \lambda \cdot T)} - 1)]; E_{\text{filamento}}(\lambda, T_{\text{filamento}}) = 0.39 \cdot 3.25 \cdot 10^6 \text{ [W/m}^2 \cdot \mu\text{m}] = 1.27 \cdot 10^6 \text{ [W/m}^2 \cdot \mu\text{m}]$$

dove si ricorda

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ [J} \cdot \text{s]} \text{ è la costante di Planck}$$

$$K = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ [J/K]} \text{ è la costante di Boltzman}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} \text{ celerità della luce;}$$

possiamo porre:

$$C_1 = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot c^2 = 3.741 \cdot 10^{-16} \text{ [W} \cdot \text{m}^2]$$

$$C_2 = (h \cdot c / K) = 1.439 \cdot 10^{-2} \text{ [m} \cdot \text{K]}.$$

Sicuramente il filamento presenta uno spettro con componente nel visibile basta valutare l'integrale del potere emissivo monocromatico tra $[0.38 \text{ } 0.78] \mu\text{m}$.

2) Si consideri un materiale isolante la cui faccia calda non può superare i 300°C. La parete è costituita da materiale refrattario con $\lambda = 0.8 \text{ kcal/hmK}$ e spessore 24 cm. Quale dovrà essere lo spessore di isolante affinché la faccia calda dell'isolante a contatto con il materiale refrattario non superi i 300°C con $\lambda = 0.1 \text{ kcal/hmK}$ e la

faccia fredda dell'isolante sia a 20°C? Tracciare in un diagramma l'andamento delle temperatura lungo lo spessore della copertura mettendo in ordinata la temperatura e in ascissa lo spessore della parete.

In condizioni di regime stazionario possiamo affermare che il flusso specifico di calore attraverso il materiale refrattario sarà uguale al flusso specifico attraverso il materiale isolante. Pertanto.

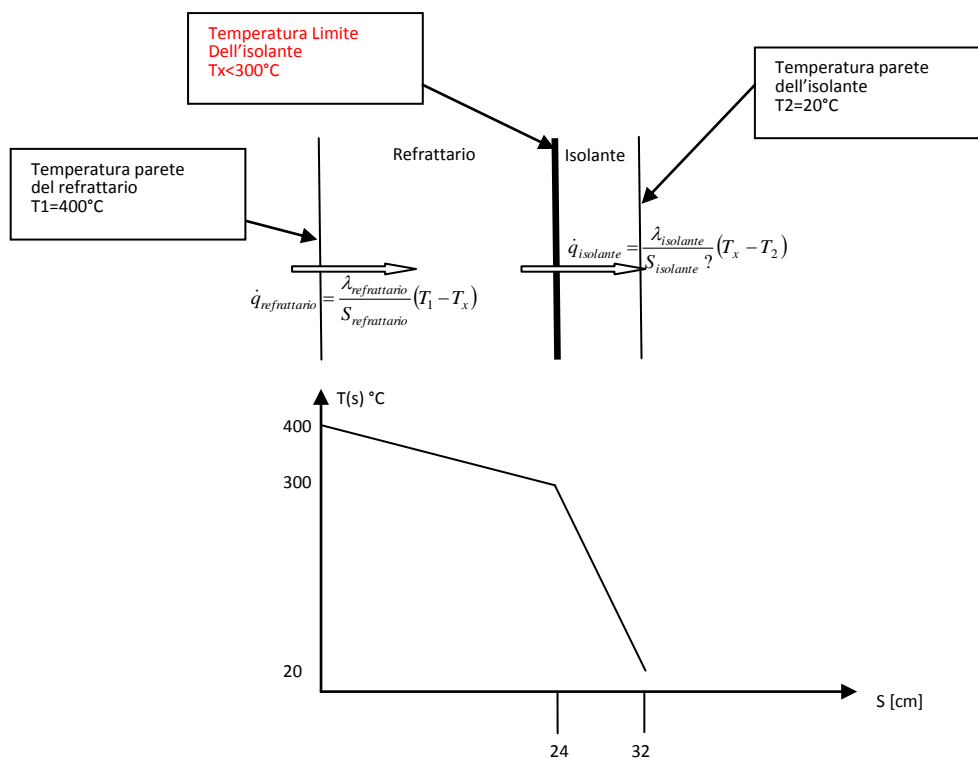
$$\dot{q}_{\text{refrattario}} = \frac{\lambda_{\text{refrattario}}}{S_{\text{refrattario}}}(T_1 - T_x) = \frac{\lambda_{\text{isolante}}}{S_{\text{isolante}}}(T_x - T_2) = \dot{q}_{\text{isolante}} \text{ in regime stazionario}$$

La prima equazione ci permette allora di determinare il flusso che si instaura in regime stazionario e unidimensionale quando la temperatura T_x nel punto di contatto tra isolante e refrattario è pari a 300°C. Così facendo ci poniamo nella condizione limite.

$$\dot{q}_{\text{refrattario}} = \frac{\lambda_{\text{refrattario}}}{S_{\text{refrattario}}}(T_1 - T_x) = \frac{0.8}{0.24}(400 - 300) = 333.33 \left[\frac{\text{kcal}}{\text{hm}^2} \right]$$

Questo stesso flusso deve attraversare le due superfici del materiale isolante che si trovano fra 300°C e 20°C

$$333.33 \left[\frac{\text{kcal}}{\text{hm}^2} \right] = \dot{q}_{\text{isolante}} = \frac{\lambda_{\text{isolante}}}{S_{\text{isolante}}}(T_x - T_2) \Rightarrow S_{\text{isolante}} = \frac{0.1}{333.33}(300 - 20) = 0.084 \text{ [m]}$$



Qualora decidessimo di scegliere uno spessore maggiore dell'isolante, allora il flusso di calore attraverso i due materiali refrattario e isolante sarebbe sicuramente inferiore a quello corrispondente a 8,4cm. Pertanto questo nuovo flusso quando attraversa lo spessore di materiale refrattario produrrà una "caduta di temperatura" tra le

due pareti estreme del refrattario, a partire da 400°C, inferiore rispetto al caso precedente che era pari a (400-300)°C.

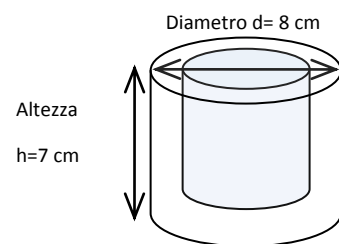
Pertanto la parte calda del materiale isolante che è a contatto con la parte più fredda del materiale refrattario si troverà ad una temperatura superiore a 300°C.

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{S_{\text{refrattario}}}{\lambda_{\text{refrattario}}} + \frac{S_{\text{isolante}}}{\lambda_{\text{isolante}}}} < 333.333$$

$$(T_1 - T_x) < \frac{S_{\text{refrattario}}}{\lambda_{\text{refrattario}}}$$

$$\dot{q} = \frac{\lambda_{\text{refrattario}}}{S_{\text{refrattario}}} (400 - T_x) < \frac{\lambda_{\text{refrattario}}}{S_{\text{refrattario}}} (400 - 300) \Rightarrow T_x > 300^\circ\text{C}$$

4) Si abbia un vaso Dewar (termos) di forma cilindrica (diametro $d = 8$ cm; altezza $h = 7$ cm) in cui viene introdotta dell'acqua (massa $m = 250$ g) alla temperatura $t_i = 0^\circ\text{C}$ e alla pressione atmosferica. L'acqua è inizialmente tutta in fase solida. Se la temperatura dell'involucro esterno è $t_e = 20^\circ\text{C}$, calcolare dopo quanto tempo tutto il ghiaccio si è sciolto per effetto degli scambi termici con l'ambiente. Supporre nulli gli scambi termici per convezione e per conduzione; supporre inoltre che le superfici affacciate dei due involucri siano grigie con $\alpha = 0,25$; pressione costantemente uguale a quella atmosferica. (Si tenga presente che per fondere un kg di ghiaccio occorrono circa 80kcal)



L'acqua presente all'interno del Thermos allo stato solido, imporrà la sua temperatura alla parete interna di contenimento, cioè imporrà 0°C . Questa parete è affacciata alla seconda parete più esterna del termos, parete più calda alla temperatura di 20°C . A causa dello scambio di radiazione netta tra parete interna ed esterna, la parete interna, essendo a temperatura inferiore, guadagna radiazione e quindi si svolgerà lo scioglimento del ghiaccio. Tutto il processo sarà caratterizzato dall'essere a temperatura costante, visto che il processo di fusione del ghiaccio si svolge lungo la isoterma-barica a 0°C . Quindi durante il processo di fusione la parete interna si manterrà costantemente a temperatura di 0°C , mentre la parete esterna sarà mantenuta a 20°C dall'ambiente esterno. Siamo allora pronti per scrivere il bilancio netto di radiazione tra le due superfici.

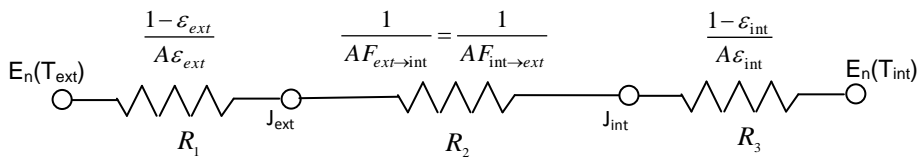
$$\Phi_{\text{parete est} \leftrightarrow \text{parete int}} = \frac{A_{\text{ext}} \epsilon_{\text{ext}}}{1 - \epsilon_{\text{ext}}} (E_n(T_{\text{ext}}) - J_{\text{ext}}) = A_{\text{ext}} (J_{\text{ext}} - J_{\text{int}}) F_{\text{ext} \rightarrow \text{int}}$$

$$\Phi_{\text{parete int} \leftrightarrow \text{parete est}} = \frac{A_{\text{int}} \epsilon_{\text{int}}}{1 - \epsilon_{\text{int}}} (E_n(T_{\text{int}}) - J_{\text{int}}) = A_{\text{int}} (J_{\text{int}} - J_{\text{ext}}) F_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}$$

Al fine di poter effettivamente trascurare la convezione tra l'aria residua presente nell'intercapedine e le due superfici affacciate in essa, bisogna che lo spessore dell'intercapedine sia sufficientemente piccolo. Questa precisazione ci permette di poter approssimare l'area della superficie interna con quella esterna.

$$A_{\text{int}} \cong A_{\text{ext}} = A$$

Le 4 equazioni di bilancio permettono di individuare il circuito termico radiativo equivalente dello scenario di scambio di radiazione. La prima equazione permette di tracciare il tratto di circuito che collega il potere emissivo di quel corpo nero avente la stessa temperatura della parete esterna con la sua radiosità (R_1), la seconda equazione interpreta il tratto successivo in serie, che collega la radiosità della parete esterna con la radiosità della parete interna (R_2). La terza equazione è consente di tracciare il tratto successivo di circuito in serie al precedente che collega la radiosità della cavità con il potere emissivo di quel corpo nero avente la stessa temperatura della cavità (R_3). La quarta equazione è equivalente alla seconda.



In base all'analogia con la legge di Ohm è possibile interpretare il circuito in figura secondo le opportune corrispondenze (differenza di potenziale \rightarrow differenza dei poteri emissivi di corpo nero o di radiosità, intensità di corrente \rightarrow flusso specifico di radiazione scambiato tra le superfici dei corpi) oppure anche in base alle stesse equazioni di bilancio 1,2,3,4 possiamo giungere a esprimere il flusso netto di radiazione perduto dalla superficie interna del thermos nel seguente modo:

$$\Phi_{\text{parete int} \leftrightarrow \text{parete ext}} = \frac{(E_n(T_{\text{int}}) - E_n(T_{\text{ext}}))}{\frac{1 - \epsilon_{\text{int}}}{A \epsilon_{\text{int}}} + \frac{1}{A F_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}} + \frac{1 - \epsilon_{\text{ext}}}{A \epsilon_{\text{ext}}}} = \frac{A(E_n(T_{\text{int}}) - E_n(T_{\text{ext}}))}{\frac{1}{\epsilon_{\text{int}}} + \frac{(1 - \epsilon_{\text{ext}})}{\epsilon_{\text{ext}}}} = \frac{\pi \cdot d \cdot h \cdot \sigma (T_{\text{int}}^4 - T_{\text{ext}}^4)}{\frac{1}{\epsilon_{\text{int}}} + \frac{(1 - \epsilon_{\text{ext}})}{\epsilon_{\text{ext}}}} = \frac{176 \cdot 10^{-4} \cdot 5.67 \cdot (2.7316^4 - 2.9316^4)}{\frac{1}{0.25} + \frac{(1 - 0.25)}{0.25}} \quad 1$$

$$\Phi_{\text{parete int} \leftrightarrow \text{parete ext}} = -2.59 \cdot 10^{-1} \text{ [W]} \equiv -0.860 \cdot 2.59 \cdot 10^{-1} \left[\frac{\text{kcal}}{\text{h}} \right] = -2.23 \cdot 10^{-1} \left[\frac{\text{kcal}}{\text{h}} \right];$$

Possiamo osservare che la potenza radiante perduta dalla superficie è negativa; significa che la parete interna anziché perdere nettamente radiazione riceve radiazione, come d'altronde era facile prevedere. Il risultato appena ottenuto sta ad indicare che ogni secondo la parete interna riceve dalla parete esterna $2.23 \cdot 10^{-1} \text{ J}$. Poiché il thermos contiene $250 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ di ghiaccio e per far fondere 1 kg di ghiaccio occorrono 80kcal, allora per far fondere tutto il ghiaccio presente nel thermos occorrono

$$Q_{\text{tot}} = m_{\text{ghiaccio H}_2\text{O}} \cdot Q_{\text{latente fusione H}_2\text{O}} = 250 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 80 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} = 20 \text{ kcal}$$

Adesso siamo in grado di determinare il tempo necessario per sciogliere completamente quei $250 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ di ghiaccio. Infatti è sufficiente determinare quanto tempo è necessario affinché la parete interna riceva 20kcal, dal momento che ogni ora riceve $2.23 \cdot 10^{-1} \text{ kcal}$.

$$\Phi_{\text{parete ext} \leftrightarrow \text{parete int}} \cdot \tau = 2.23 \cdot 10^{-1} \left[\frac{\text{kcal}}{\text{h}} \right] \cdot \tau = 20 [\text{kcal}] \Rightarrow \tau = 89.67 [\text{h}].$$

¹ Si ricordi che per la legge di Kirchoff l'emissività monocromatica è numericamente uguale alla assorbività monocromatica, $\epsilon_\lambda = \alpha_\lambda$. L'uguaglianza per i valori monocromatici si estende anche per i valori totali, $\epsilon = \alpha$, qualora si tratti di corpi grigi

5) Un collettore solare piano disposto orizzontalmente di forma quadrata (lato 2 m) si trova all'aria aperta in un sito soggetto a vento (velocità 6m/s) e temperatura dell'aria $T = 3^{\circ}\text{C}$. La volta celeste verso la quale la piastra irraggia può essere pensata, durante la notte, come un corpo alla temperatura di 255K se vigono condizioni di cielo sereno. Per questa situazione semplificata, si richiede di determinare la temperatura raggiunta dalla superficie superiore della piastra (corpo grigio di emissività $\epsilon = 0.85$) in seguito agli scambi termici convettivi e radianti. Si assuma che la superficie inferiore della piastra sia adiabatica. Si adotti la correlazione, $Nu = 0.664 Re^{0.5} Pr^{0.33}$ verificando la condizione di regime di moto laminare.

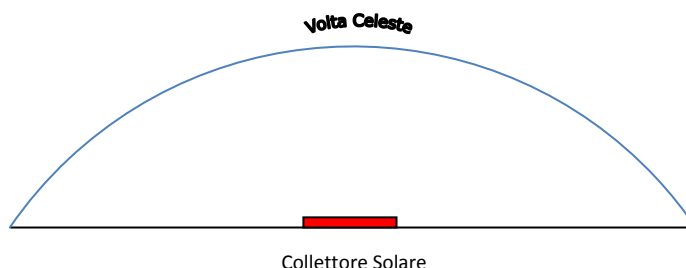
Il collettore solare si porterà ad una temperatura in corrispondenza della quale la potenza termica scambiata per convezione forzata con l'aria eguaglierà la potenza termica radiante scambiata con la volta celeste. Questa è la temperatura che il problema richiede di determinare. Prima ancora di impostare l'equazione di bilancio per il regime stazionario del collettore, possiamo certamente escludere che la temperatura di equilibrio sia superiore a quella dell'aria ($T_{\text{collettore}} > 3^{\circ}\text{C}$). Infatti se così fosse il collettore nei confronti dell'ambiente circostante perderebbe esclusivamente potenza termica, sia nei confronti dell'aria per convezione, sia nei confronti della volta celeste per irraggiamento, senza ricevere alcuna altra potenza termica di bilanciamento. Questa condizione non sarebbe compatibile con la realizzazione del regime stazionario e quindi con la temperatura di equilibrio richiesta dal problema. In questa condizione qualsiasi temperatura del collettore superiore a quella dell'aria è condannata a diminuire al trascorrere del tempo, in presenza di un ambiente circostante costituito da aria in movimento a 3°C e della volta celeste a -18.16°C (255K). Stesso discorso si può condurre per una temperatura del collettore inferiore a quella della volta celeste, cioè $<$ di 255K (-18.15°C). Qualsiasi temperatura del collettore inferiore a -18.15°C è condannata ad aumentare al trascorrere del tempo, in presenza di un ambiente circostante costituito da aria in movimento a 3°C e della volta celeste a -18.15°C .

Sulla base di queste considerazioni di contorno, possiamo essere certi che la temperatura del collettore all'equilibrio avrà un valore intermedio compreso tra quello della volta celeste e quello dell'aria $[-18.15 \div 3]^{\circ}\text{C}$. La condizione di regime stazionario che si instaura quando la potenza termica netta entrante nel collettore è uguale a quella netta uscente, viene espressa dalla seguente equazione.

$$\dot{Q}_{\text{entrante}} = \dot{Q}_{\text{uscente}} \Rightarrow A_{\text{coll}} h_{\text{coll}} (T_{\text{aria}} - T_{\text{coll}}) = A_{\text{coll}} \epsilon_{\text{coll}} \sigma (T_{\text{coll}}^4 - T_{\text{volta celeste}}^4) \cdot (1)^2$$

Le considerazioni di premessa sviluppate in precedenza aiutano a capire il perché nell'equazione 1 si sia identificata la potenza entrante con la potenza convettiva e quella uscente con quella radiativa.

Il bilancio di radiazione tra il collettore e la volta celeste deve essere scritto come compare in (1). Infatti possiamo ipotizzare il collettore come un corpo immerso in una grande cavità, la volta celeste, la cui superficie è molto maggiore della superficie del collettore.



² Nell'equazione 1 conviene esprimere tutte le temperature in Kelvin, in modo tale da non avere per la temperatura del collettore due variabili, una in Celsius e l'altra in Kelvin.

Il bilancio di radiazione tra il collettore e la volta celeste si può quindi scrivere nel seguente modo:

$$\Phi_{coll \rightarrow volta cel} = \frac{(E_n(T_{coll}) - E_n(T_{volta cel}))}{\frac{1 - \epsilon_{coll}}{A_{coll} \epsilon_{coll}} + \frac{1}{A_{coll} F_{coll \rightarrow volta cel}} + \frac{1 - \epsilon_{volta cel}}{A_{volta cel} \epsilon_{volta cel}}} = \frac{A_{coll} (E_n(T_{coll}) - E_n(T_{volta cel}))}{\frac{1}{\epsilon_{coll}} + \frac{A_{coll} (1 - \epsilon_{volta cel})}{A_{volta cel} \epsilon_{volta cel}}} = A_{coll} \epsilon_{coll} \sigma (T_{coll}^4 - T_{volta cel}^4) \quad (2)$$

Si giunge alla forma finale della 2 se si tiene presente che il fattore di vista del collettore rispetto alla volta celeste è pari a 1 e che l'emissività della volta celeste è 1 essendo approssimabile ad un corpo nero alla temperatura di 255K. All'espressione finale della (2) si può giungere anche per una via più diretta. Il collettore solare in virtù della sua temperatura emette, perdendo, una quantità di radiazione pari a:

$$\Phi_{coll} = \epsilon_{coll} \sigma T_{coll}^4$$

Questa quantità di radiazione viene persa dal corpo e sarà quella che causerà una diminuzione dell'energia interna del collettore. Allo stesso tempo il collettore riceve dalla volta celeste una quantità di radiazione pari:

$$\Phi_{volta cel \rightarrow coll} = A_{volta cel} \sigma T_{volta cel}^4 F_{volta cel \rightarrow coll} \cdot$$

Di questa quantità che riesce a raggiungere il collettore, solo la frazione α_{coll} viene assorbita, per cui la porzione totale di radiazione che viene assorbita dal collettore è pari a

$$\alpha_{coll} \Phi_{volta cel \rightarrow coll} = \alpha_{coll} (A_{volta cel} \sigma T_{volta cel}^4 F_{volta cel \rightarrow coll}) \cdot$$

Questa quantità è quella che è in grado di far aumentare l'energia interna del collettore. Il bilancio netto di radiazione in uscita dal collettore, cioè la quantità di radiazione che lasciando il corpo ne provocherebbe una diminuzione di energia interna, sottratta della radiazione che entrando nel corpo ne farebbe aumentare l'energia interna, si può quindi esprimere³:

$$\Phi_{coll \rightarrow volta cel} = A_{coll} \epsilon_{coll} \sigma T_{coll}^4 - \alpha_{coll} A_{volta cel} F_{volta cel \rightarrow coll} \sigma T_{volta cel}^4 = A_{coll} \epsilon_{coll} \sigma T_{coll}^4 - A_{coll} \epsilon_{coll} F_{coll \rightarrow volta cel} \sigma T_{volta cel}^4 = A_{coll} \epsilon_{coll} \sigma (T_{coll}^4 - T_{volta cel}^4) \quad (3)$$

Il risultato finale della (3) coincide con il risultato finale della (2).

L'equazione (1) permette di stabilire il valore della temperatura del collettore in corrispondenza della quale si raggiunge l'equilibrio. Per poter risolvere la (2) rispetto alla T_{coll} occorre però conoscere il valore del coefficiente dello scambio termico convettivo h_{coll} . Il suo valore può essere ricavato dall'espressione del numero di Nusselt fornita dal testo dell'esercizio:

$$Nu = \frac{h_{coll} l_{coll}}{\lambda_{aria}} = 0.664 Re^{0.5} Pr^{0.33} \quad (4); \quad \text{con } Re = \frac{\rho_{aria} l_{coll} W_{vento}}{\mu_{aria}} = \frac{l_{coll} W_{vento}}{v_{aria}} \quad \text{numerodi Reynolds e } Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad \text{numerodi Prandtl}$$

$$Re = \frac{\rho_{aria} l_{coll} W_{vento}}{\mu_{aria}} = \frac{l_{coll} W_{vento}}{v_{aria}} \quad ; \quad Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$$

La relazione fornita è coerente con il fenomeno dello scambio termico in regime di convezione forzata di una lastra piana lambita parallelamente da un fluido. Nel nostro caso il fluido è l'aria e la forzante è il vento.

Verifichiamo la presenza del regime laminare.

Le proprietà dell'aria (viscosità dinamica μ , cinematica v , densità ρ , calore specifico a pressione costante c_p e conducibilità termica λ) che definiscono i numeri adimensionali che compaiono nella (4) bisogna determinarle in corrispondenza della temperatura media di convezione tra l'aria e il collettore, all'equilibrio.

³ Si ricordi il teorema di reciprocità in base al quale possiamo scrivere che $A_{volta cel} F_{volta cel \rightarrow coll} = A_{coll} F_{coll \rightarrow volta cel}$. Si ricordi inoltre che per la legge di Kirchhoff l'emissività monocromatica è numericamente uguale alla assorbività monocromatica, $\epsilon_\lambda = \alpha_\lambda$. L'uguaglianza per i valori monocromatici si estende anche per i valori totali, $\epsilon = \alpha$, qualora si tratti di corpi grigi

$$T_{media} = \frac{T_{aria} + T_{coll}}{2}; \quad (5) \Rightarrow \quad v = v(T_{media}), \quad c_{p\,aria} = c_{p\,aria}(T_{media}), \quad \lambda_{aria} = \lambda_{aria}(T_{media})$$

Il problema che si pone è che la temperatura del collettore all'equilibrio, (T_{coll}), che compare nella temperatura media (T_{media}) espressa dalla (5) è proprio quella che dobbiamo determinare e quindi rimane anche indeterminata la temperatura media che ci permetterebbe di determinare il coefficiente di convezione. Quindi il problema è questo: l'equazione che ci permette di determinare la temperatura del collettore all'equilibrio, l'equazione (1)

$$A_{coll} h_{coll}(T_{aria} - T_{coll}) = A_{coll} \varepsilon_{coll} \sigma (T_{coll}^4 - T_{volta\,celeste}^4) \quad (1)$$

In realtà dovremmo scriverla nel seguente modo, espresso dalla (6) :

$$A_{coll} \frac{Nu \lambda_{aria}}{l_{coll}} (T_{aria} - T_{coll}) = A_{coll} \varepsilon_{coll} \sigma (T_{coll}^4 - T_{volta\,celeste}^4)$$

$$A_{coll} 0.664 \cdot Re^{0.5} Pr^{0.33} \frac{\lambda_{aria}(T_{aria}, T_{coll})}{l_{coll}} (T_{aria} - T_{coll}) = A_{coll} \varepsilon_{coll} \sigma (T_{coll}^4 - T_{volta\,celeste}^4)$$

$$A_{coll} 0.664 \left(\frac{W_{vent} l_{coll}}{v_{aria}(T_{aria}, T_{coll})} \right)^{0.5} \left(\frac{c_{p\,aria}(T_{aria}, T_{coll})}{\lambda(T_{aria}, T_{coll})} \right)^{0.33} \frac{\lambda_{aria}(T_{aria}, T_{coll})}{l_{coll}} (T_{aria} - T_{coll}) = A_{coll} \varepsilon_{coll} \sigma (T_{coll}^4 - T_{volta\,celeste}^4) \quad (6)$$

Così scritta (6), l'equazione (1) mostra che l'incognita da determinare compare non solo nel delta T del fenomeno convettivo, ($T_{aria} - T_{coll}$), e radiativo ($T_{coll}^4 - T_{volta\,celeste}^4$), ma compare anche nella dipendenza sperimentale delle proprietà termotecniche del fluido (viscosità dinamica μ , cinematica v , densità ρ , calore specifico a pressione costante c_p e conducibilità termica λ) dalla temperatura media aria collettore, (T_{media}). Sebbene l'equazione (6) abbia come unica incognita la T_{coll} , essa non è analiticamente risolvibile. In questi casi si percorre un procedimento numerico iterativo di risoluzione.

Nell'equazione (6) si considera un valore di primo tentativo della temperatura del collettore, (T_{coll})_i, che però viene assegnato solo alla T_{coll} che compare nelle proprietà dell'aria, al fine di toglierne l'indeterminatezza, e alla T_{coll} che compare alla quarta potenza nell'espressione ($T_{coll}^4 - T_{volta\,celeste}^4$) della (6), mentre si lascia come incognita la T_{coll} che compare nella differenza di temperatura ($T_{aria} - T_{coll}$). A questo punto l'equazione (6) è esplicitabile rispetto alla T_{coll} . L'esplicitazione porta ad un valore di $T_{coll} = (T_{coll})_x$ che potrà essere uguale o diverso a quello ipotizzato nel primo tentativo (T_{coll})_i. Se i valori corrispondono, ($T_{coll})_x = (T_{coll})_i$, allora significa che il valore di primo tentativo, fortunatamente, è la soluzione, se invece non corrispondono allora si considera un valore di T_{coll} di secondo tentativo pari al valore ottenuto dalla prima esplicitazione (T_{coll})_{ii} = (T_{coll})_x. A questo punto il processo si ripete tale e quale in modo iterativo, fino alla coincidenza dei due valori.

Operativamente si procede nel seguente modo.

- 1) Con il valore della temperatura del collettore dell'iesimo tentativo, (T_{coll})_i si può determinare, tramite l'equazione (5), la temperatura media relativa all'iesimo tentativo, (T_{media})_i, del fenomeno della convezione;
- 2) in tal modo è possibile, tramite la consultazione della tabella delle proprietà termotecniche dell'aria⁴, determinare i numeri adimensionali di Reynolds e di Prandtl, entrando in tabella con il valore della temperatura media (T_{media})_i;

⁴ Tabelle disponibili nell'Appendice III del manuale "Kreith"

- 3) con i valori dei numeri adimensionali determinati, si può allora calcolare, tramite l'uso della (4), il valore del numero di Nusselt, $(Nu)_i$.
- 4) dal numero di Nusselt si determina il valore del coefficiente convettivo del collettore $(h_{coll})_i$;
- 5) il valore appena trovato del coefficiente di convezione termica aria – collettore, $(h_{coll})_i$, lo dobbiamo inserire nell'equazione (1) del bilancio di energia. A questo punto l'equazione (1) è esplicitabile rispetto alla T_{coll} , avendo per tempo assegnato alla T_{coll} contenuta nell'espressione $(T_{coll}^4 - T_{volta\ celeste}^4)$ il valore di iesimo tentativo, $(T_{coll})_i$. Il valore che si ottiene dalla esplicitazione della (1) lo indichiamo con $(T_{coll})_{i+1}$.

$$T_{coll} = T_{aria} + \frac{\varepsilon_{col}\sigma}{h_{coll}((T_{media})_i)} T_{volta\ celeste}^4 - \frac{\varepsilon_{col}\sigma}{h_{coll}((T_{media})_i)} (T_{coll})_i^4 = (T_{coll})_{i+1} \quad (7) \quad \text{dove} \quad h_{col}((T_{media})_i) = h_{coll}((T_{coll})_i + T_{aria}/2)$$

- 6) Il valore fornito dalla (7), $(T_{coll})_{i+1}$, deve essere confrontato con quello dell'iesimo tentativo $(T_{coll})_i$. Qualora $(T_{coll})_{i+1} = (T_{coll})_i$ allora siamo giunti alla soluzione. Se invece $(T_{coll})_{i+1} \neq (T_{coll})_i$ allora dobbiamo reiterare i calcoli, da 1) fino a 6), per svolgere il tentativo numero $i+1$, utilizzando al punto 1) il valore finale $(T_{coll})_{i+1}$ trovato al punto 6) della precedente iesima iterazione,

L'iterazione si ripete fino a quando il valore della t_{coll} , ottenuto all'iterazione (i), $(T_{coll})_{i+1}$, risulta coincidente con il valore della temperatura relativo all'iterazione (i+1).

Consideriamo un valore iniziale di primo tentativo per la temperatura del collettore $(t_{coll})_1$ pari al valore medio della temperatura dell'aria e della volta celeste.

$$(t_{coll})_1 = \frac{t_{aria} + t_{volta\ celeste}}{2} = \frac{3^\circ C + (-18^\circ C)}{2} = -7.58;$$

Con questa scelta tramite l'equazione (5) possiamo determinare il valore della temperatura media di convezione tra l'aria e il collettore.

$$(t_{media})_1 = \frac{t_{coll} + t_{aria}}{2} = \frac{-7.575^\circ C + (3^\circ C)}{2} = -2.29^\circ C$$

Consultando le tabelle dell'aria in corrispondenza di $-2.29^\circ C$ è possibile determinare i valori della viscosità dinamica e cinematica, della densità, della conducibilità termica e del calore specifico.

Nel Kreith sono forniti i valori di μ , di ν , di ρ , di c_p e di λ in corrispondenza di $-18^\circ C$ e di $0^\circ C$. Mentre i valori in corrispondenza di $-2.29^\circ C$ possono essere ricavati per interpolazione. Le rette interpolatrici hanno le seguenti equazioni:

$$\mu_{aria}(t_{media}) = \frac{\mu_{aria}(t_0) - \mu_{aria}(t_{-18})}{t_0 - t_{-18}} t_{media} + \mu_{aria}(t_0) = 45.55 \cdot 10^{-9} \cdot t_{media} + 1.732 \cdot 10^{-5}$$

$$\nu_{aria}(t_{media}) = \frac{\nu_{aria}(t_0) - \nu_{aria}(t_{-18})}{t_0 - t_{-18}} t_{media} + \nu_{aria}(t_0) = 7.77 \cdot 10^{-8} \cdot t_{media} + 0.135 \cdot 10^{-4}$$

$$\rho_{aria}(t_{media}) = \frac{\rho_{aria}(t_0) - \rho_{aria}(t_{-18})}{t_0 - t_{-18}} t_{media} + \rho_{aria}(t_0) = -42.222 \cdot 10^{-4} \cdot t_{media} + 1.296$$

$$c_{p\,aria}(t_{media}) = \frac{c_{p\,aria}(t_0) - c_{p\,aria}(t_{-18})}{t_0 - t_{-18}} t_{media} + c_{p\,aria}(t_0) = 0.555 \cdot 10^{-4} \cdot t_{media} + 0.240$$

$$\lambda_{aria}(t_{media}) = \frac{\lambda_{aria}(t_0) - \lambda_{aria}(t_{-18})}{t_0 - t_{-18}} t_{media} + \lambda_{aria}(t_0) = 0.555 \cdot 10^{-4} \cdot t_{media} + 0.0208$$

In corrispondenza di $(t_{media})_1 = -2.29^\circ\text{C}$ le rette forniscono i seguenti valori di μ , di ν , di ρ , di c_p e di λ :

$$\mu(-2.288^\circ\text{C}) = 1.722 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \quad \nu(-2.288^\circ\text{C}) = 1.332 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad \rho(-2.288^\circ\text{C}) = 1.306 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$c_{p\text{aria}}(-2.288^\circ\text{C}) = 0.24 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \quad \lambda_{aria}(-2.288^\circ\text{C}) = 0.0207 \frac{\text{kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}}$$

$$\text{Re} = \frac{l_{coll} W_{vento}}{\mu_{aria} / \rho_{aria}} = \frac{2 \cdot 6}{0.12911 \cdot 10^{-4}} = 9.009 \cdot 10^5 \quad ; \quad \text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda} = 0.7213$$

$$\text{Nu} = \frac{h_{coll} \cdot l_{coll}}{\lambda_{aria}} = 0.664 \cdot \text{Re}^{0.5} \cdot \text{Pr}^{0.33} = 0.664 \cdot (9.009 \cdot 10^5)^{0.5} \cdot (0.7213)^{0.33} = 565.774 \Rightarrow h_{coll} = \left(\frac{575.48 \cdot 0.0204}{2} \right) = 5.85 \frac{\text{kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}} = 6.8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{C}}$$

Il valore appena trovato del coefficiente di convezione termica aria - collettore lo dobbiamo inserire nell'equazione (7) del bilancio di energia, per determinare il valore di $(T_{coll})_2$. Il termine $(T_{coll})_4$ viene sostituito con il valore $(273.15 - 7.58)_4$.

$$T_{coll} = T_{aria} + \frac{\varepsilon_{coll} \sigma}{h_{coll}((T_{media})_1)} T_{volutaeleste}^4 - \frac{\varepsilon_{coll} \sigma}{h_{coll}((T_{media})_1)} (T_{coll})_1^4 = (T_{coll})_2 \quad (7) \quad \text{dove} \quad h_{coll}((T_{media})_1) = h_{coll}((T_{coll})_1 + T_{aria}/2)$$

$$T_{coll} = (3 + 273.15)\text{K} + \frac{0.85 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}}{6.8} \cdot (255)^4 - \frac{0.85 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}}{6.8} \cdot ((265.575)^4)_1 = (T_{coll})_2 = 270.86\text{K} \equiv -2.29^\circ\text{C} \quad (7)$$

Il valore fornito dalla (7), $(t_{coll})_2 = -4.146^\circ\text{C}$, deve essere confrontato con quello di primo tentativo $(t_{coll})_1 = -7.575^\circ\text{C}$. Possiamo rilevare che i due valori differiscono, quindi il valore iniziale di primo tentativo non è la soluzione. Dobbiamo allora reiterare i calcoli, utilizzando come secondo valore tentativo di partenza il valore finale della prima iterazione, $(T_{coll})_2$

Così facendo, dopo 7 iterazioni, il valore di uscita della (7) si stabilizza in corrispondenza del seguente risultato:

$$T_{coll} = (T_{coll})_8 = 269\text{K} \equiv -4.15^\circ\text{C} : (T_{coll})_8 \approx (T_{coll})_n \quad \forall n \geq 9;$$

Questo valore di temperatura del collettore è la soluzione del problema che stiamo affrontando. Infatti permette di soddisfare l'equazione del bilancio di energia una volta che si calcola il coefficiente di convezione in corrispondenza della temperatura media tra la temperatura del collettore e quella dell'aria:

$$(t_{media})_8 = \frac{(t_{coll})_8 + t_{aria}}{2} = \frac{-4.15^\circ\text{C} + (3^\circ\text{C})}{2} = -0.57^\circ\text{C} \quad h_{coll}(-0.57) = 6.79 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

e si inserisce il valore di $(T_{coll})_8 = 269\text{K}$ nell'espressione della equazione (1) al posto di T_{coll} :

$$\dot{Q}_{entrante} = \dot{Q}_{uscite} \Rightarrow 4[\text{m}^2] \cdot 6.79 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right] \cdot (270.15 - 269)[\text{K}] = 4[\text{m}^2] \cdot 0.85 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4} \right] \cdot (269^4 - 255^4)[\text{K}^4]$$

$$\dot{Q}_{entrante} = \dot{Q}_{uscite} \Rightarrow 194.63[\text{W}] = 194.63[\text{W}]$$

Adesso rimane da verificare la presenza del regime laminare in corrispondenza delle condizioni termodinamiche relative alla soluzione, al fine di giustificare la relazione che nel testo è stata assegnata per il calcolo del numero di Nusselt:

$$Nu = \frac{h_{coll} l_{coll}}{\lambda_{aria}} = 0.664 Re^{0.5} Pr^{0.33} \quad (4)$$

In corrispondenza della soluzione la temperatura media di convezione vale $t_{media} = -0.57^\circ C$. Il calcolo del numero di Reynolds porge:

$$Re = \frac{l_{coll} W_{vento}}{\mu_{aria} / \rho_{aria}} = \frac{2 \cdot 6}{0.12911 \cdot 10^{-4}} = 9.009 \cdot 10^5 \quad ; \quad Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} = 0.7213$$

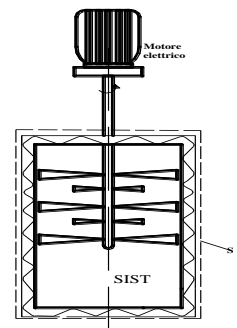
$$\mu(-2.288^\circ C) = 1.722 \cdot 10^{-5} \frac{Ns}{m^2} \quad \nu(-2.288^\circ C) = 1.332 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s} \quad , \quad \rho(-2.288^\circ C) = 1.306 \frac{kg}{m^3} \quad ,$$

$$Re = \frac{l_{coll} W_{vento}}{\mu_{aria} / \rho_{aria}} = \frac{2 \cdot 6}{0.12911 \cdot 10^{-4}} = 9.009 \cdot 10^5 \quad ; \quad Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} = 0.7213$$

6) In un recipiente a volume costante indeformabile con volume $V=0.1m^3$ è racchiusa aria a 20ata e 293 K. L'aria con una trasformazione isovolumica passa da 293K a 500K.

Si determinino:

a) le condizioni finali del sistema; b) il calore scambiato; c) la variazione di energia interna; la variazioni di entalpia. Nel caso in cui la trasformazione non sia più isovolumica, ripetere i calcoli per un processo adiabatico reversibile.



Dobbiamo calcolare il tempo necessario di funzionamento del motore affinché il fluido, contenuto nel recipiente adiabatico, subisca il processo termodinamico, caratterizzato dall'avere:

- Gli stati iniziale e finale ("i") ed ("f") sono stati di equilibrio termodinamico;
- volume specifico finale (" v_f ") uguale a quello iniziale (" v_i ");
- temperatura finale (" t_f ") maggiore di quella iniziale (" t_i ") di $28^\circ C$ ($t_f = t_i + 28^\circ C$).

Per risolvere l'esercizio, dobbiamo innanzitutto conoscere quanto lavoro d'elica è necessario per portare il sistema dallo stato iniziale a quello finale. Calcolato questo lavoro, allora possiamo calcolare quanto secondi deve funzionare il motore elettrico per erogare quel lavoro, sapendo che ogni secondo il motore fornisce 0.5 [kJ].

Il primo principio della termodinamica, mediante la funzione di stato "variazione di Energia Interna ΔU ", ci permette di quantificare le quantità delle entità di scambio (lavoro, calore, radiazione, portata massica) che devono entrare o abbandonare un sistema affinché compia un determinato processo desiderato. L'inquadramento termodinamico del sistema ci permette di identificare quali sono le grandezze che prendono parte al processo e quali invece possono essere escluse o trascurate. Partendo dalla condizione più generale in cui il sistema è potenzialmente in grado di scambiare quantità orarie di massa, di calore, di radiazione e di lavoro per variazione di volume e d'elica, con i rispettivi serbatoi di energia termica e di energia meccanica, Figura 1, successivamente, tramite l'applicazione delle specificazioni presentate nel testo del problema, Figura 2, si particularizza lo scenario termodinamico e si giunge alla reale condizione in cui il sistema è adiabatico al calore e alla radiazione, è chiuso allo scambio di massa, e può solo scambiare lavoro d'elica nei confronti dell'ambiente circostante, Figura 3.

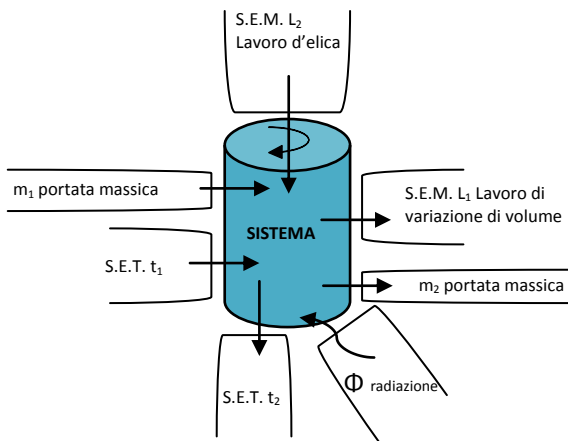


Figura 1

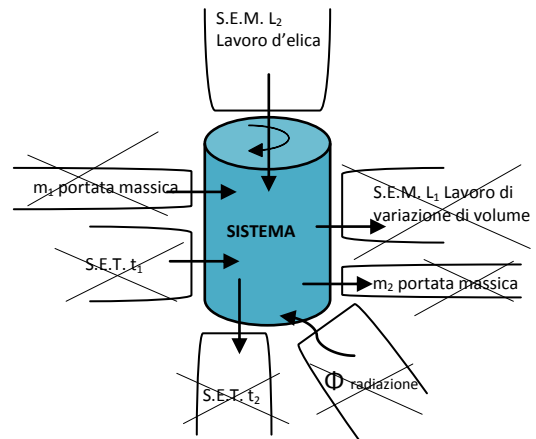


Figura 2

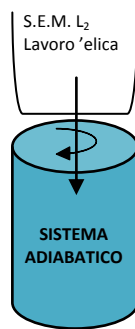


Figura 3

Il primo principio della termodinamica applicato al sistema nelle condizioni più generali, fino alla particolareggiatura della figura 3, porge:

$$\Delta U = \sum Q + \sum L_{Volume} + \sum L_{elica} + \sum \Phi \quad \text{dove } \Delta U = \Delta U_{sistema} \Big|_i^f + (\sum U_{masse uscenti} - \sum U_{masse entranti}) \quad (1)$$

$$\Delta U_{sistema} \Big|_i^f + (\sum U_{masse uscenti} - \sum U_{masse entranti}) = \sum Q + \sum L_{Volume} + \sum L_{elica} + \sum \Phi \quad (2)$$

$$\Delta U_{sistema} \Big|_i^f = L_{elica} \quad (3)$$

Il sistema è costituito da una massa d'acqua costante che si mantiene liquida per tutta la durata del processo. Il sistema è quindi del tipo p,v,t, pertanto, in ragione del postulato di stato, l'unico modo che ha di scambiare lavoro quasi statico, è quello che avviene per variazione di volume. Il lavoro che viene somministrato al sistema è un lavoro d'elica, come efficacemente mostra la figura riportata nel testo dell'esercizio. Esso non può quindi essere un lavoro quasi statico. Ci troviamo quindi impossibilitati ad esprimere il lavoro d'elica in funzione delle coordinate termodinamiche interne del sistema, come ad esempio è invece possibile per il lavoro di variazione di volume quasi statico.

$$|L_{elica}| \neq m_{sist} \Big|_i^f p \cdot dv;$$

Questa impossibilità vieta di esprimere, e quindi di quantificare, il lavoro necessario alla realizzazione del processo desiderato, a partire dalla evoluzione delle coordinate termodinamiche del sistema. Potremmo allora seguire la via del primo principio, determinando la variazione di energia interna del sistema $\Delta U_{sistema}$, relativa allo stato iniziale e finale di equilibrio termodinamico:

$$\Delta U_{\text{ sistema }} \Big|_i^f = U(t_i + 28^\circ\text{C}, v) - U(t_i, v) = L_{\text{ elica}}$$

Occorre allora conoscere la quantità a primo membro per sapere quanto lavoro d'elica è necessario somministrare al sistema. Potremmo conoscere il valore di tale variazione consultando le tabelle delle proprietà dell'acqua. In realtà però, a ben vedere, del sistema conosciamo solo che è in fase liquida e che deve eseguire a volume specifico costante un cambiamento di temperatura pari a 28°C. Questi dati non sono sufficienti per consultare le tabelle dell'acqua. È necessario conoscere gli stati assoluti, iniziale e finale, del sistema. Il testo dell'esercizio non ci fornisce i dati necessari alla loro determinazione. Non potendo consultare le tabelle allora bisogna verificare l'opportunità di fare ricorso a qualche espressione analitica approssimante le variazioni dell'energia interna per l'acqua in fase liquida.

L'acqua liquida non è un gas ideale, per cui non possiamo usare l'espressione dell'energia interna di un g.i. per calcolarci quella dell'acqua liquida. In sostanza risulta che:

$$\Delta U_{\text{ sistema }} \Big|_i^f = U(t_i + 28^\circ\text{C}, v) - U(t_i, v) \not\approx m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_v \cdot \Delta t .$$

Il simbolo di cancellazione, in corrispondenza dell'ultimo uguale, è dovuto al fatto che l'energia interna dell'acqua in fase liquida, così come dell'entalpia, non dipende esclusivamente dalla Temperatura, come risulta per il gas ideale, ma dipende anche dalla pressione.

La variazione di energia interna in funzione delle coordinate termodinamiche la dovremmo scrivere in una delle due seguenti forme alternative:

$$dU = \left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_p d\theta + \left. \frac{\partial U}{\partial p} \right|_\theta dp \quad (4)$$

$$dU = \left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_v d\theta + \left. \frac{\partial U}{\partial v} \right|_\theta dv; \quad (4')$$

Per l'acqua in fase liquida non siamo autorizzati a porre uguale a zero i secondi addendi del secondo membro delle (4) e (4'). Nella seconda parte del corso potremo constatare che l'energia interna dell'acqua che si trova in un generico stato di equilibrio nella fase liquida, alla temperatura θ , può essere approssimata all'energia interna relativa allo stato di equilibrio in condizioni di saturazione alla stessa temperatura θ . Pertanto la variazione di energia interna corrispondente a due qualsiasi stati di equilibrio nella fase liquida dell'acqua, stati "i" e "f", è approssimativamente uguale alla variazione che avviene tra quei due stati di equilibrio posti sulla curva di saturazione liquida, aventi le medesime temperature dei due stati in considerazione, stati termodinamici "1" e "2", figura 4. In base a questo possiamo scrivere:

$$\Delta U_{\text{ sistema }} \Big|_i^f \approx \Delta U_{\text{ sistema }} \Big|_1^2 \Rightarrow U(t_{\text{iniz}} + 28^\circ\text{C}, v) \Big|_f - U(t_i, v) \Big|_i \approx U(t_{\text{iniz}} + 28^\circ\text{C}) \Big|_{\text{sat.}2} - U(t_{\text{iniz}}) \Big|_{\text{sat.}1} \quad (5)$$

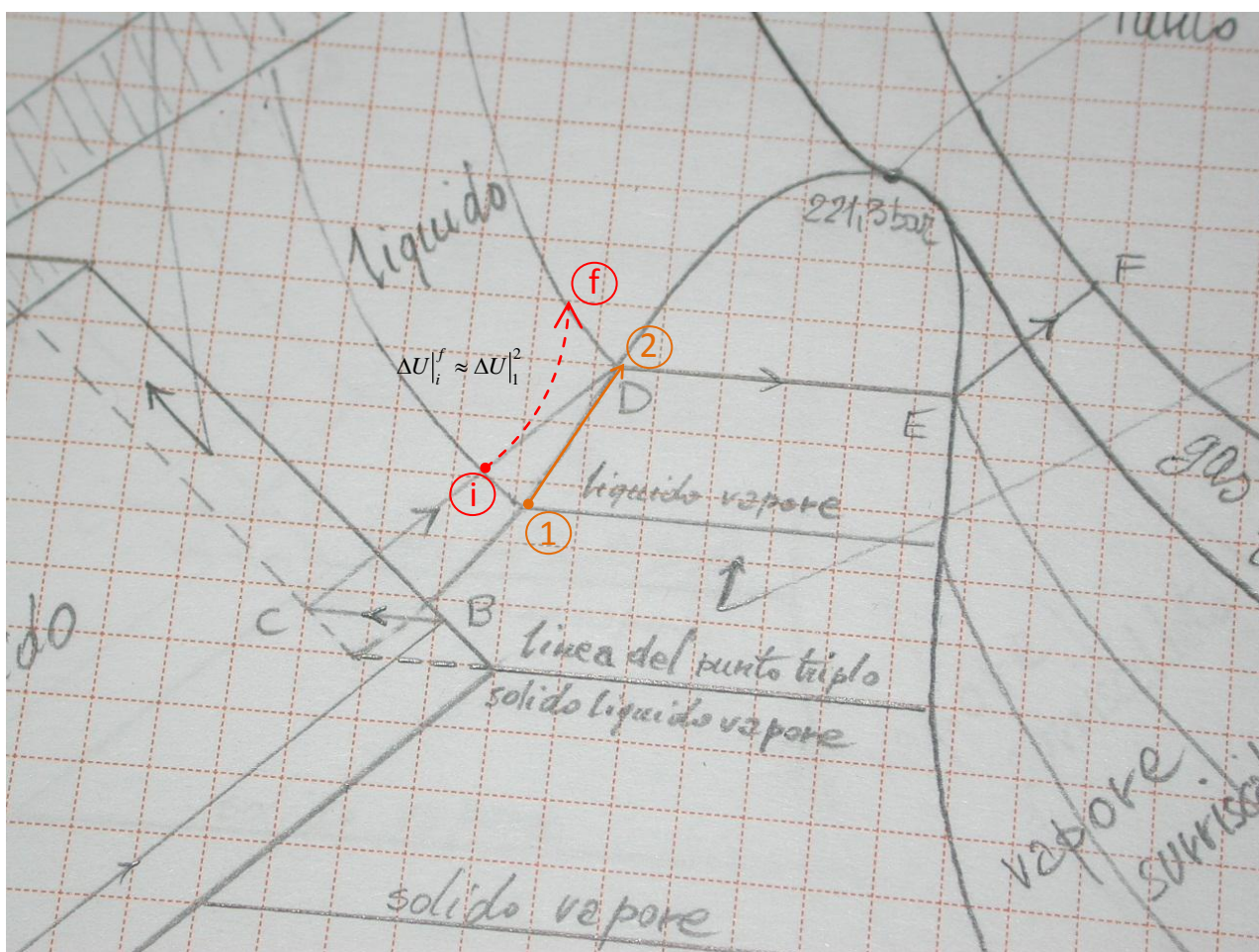
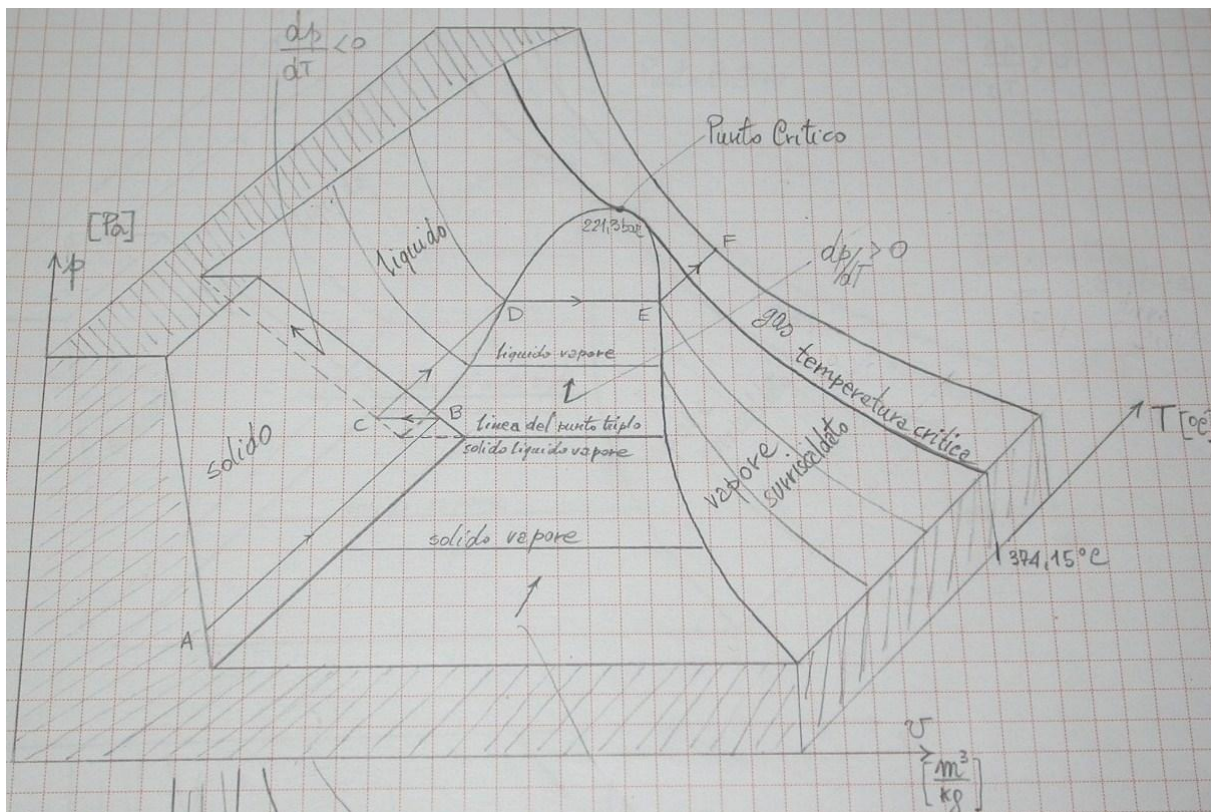


Figura 4. Diagramma di stato dell'acqua nel piano pv

Se adesso consideriamo un processo quasi statico che ci conduca dallo stato di saturazione 1 fino al 2 in modo quasi statico possiamo scrivere:

$$\Delta U_{sistema}|_i^f \approx U(t_{iniz} + 28^\circ C)_{sat.}|_2 - U(t_{iniz})_{sat.}|_1 = Q + L = \int_1^2 m_{H_2O} \cdot c_{sat. liminf} dt - \int_1^2 m_{H_2O} \cdot p \cdot dv = V \cdot \left(\int_1^2 \rho_{H_2O} \cdot c_{sat. liminf} dt - \int_1^2 \rho_{H_2O} \cdot p \cdot dv \right)$$

La variazione di volume specifico lungo la curva di saturazione (curva limite inferiore) è di entità tale da rendere trascurabile il termine relativo al lavoro quasi statico, rispetto al termine relativo allo scambio di calore.

$$\Delta U_{sistema}|_i^f \approx U(t_{iniz} + 28^\circ C)_{sat.}|_2 - U(t_{iniz})_{sat.}|_1 \approx Q = V \cdot \int_1^2 \rho_{H_2O} \cdot c_{sat. liminf} dt$$

Sperimentalmente è possibile verificare che il calore specifico lungo la curva limite inferiore è di poco superiore al calore specifico a volume costante, mentre è leggermente inferiore a quello a pressione costante.

$$c_v(p, t) \approx c_{sat. lim. inf}(p, t) \approx c_p(p, t) \quad (6);$$

In prima approssimazione è allora possibile sostituire il calore specifico calcolato lungo la curva limite inferiore, "c_{sat. lim. inf}", con il calore specifico a pressione costante "c_p"

$$\Delta U_{sistema}|_i^f \approx U(t_{iniz} + 28^\circ C)_{sat.}|_2 - U(t_{iniz})_{sat.}|_1 \approx Q \approx V \cdot \int_1^2 \rho_{H_2O} \cdot c_p dt$$

Per piccole variazioni di temperatura lungo la curva di saturazione e lontano dalla temperatura critica il "c_p" non è mai inferiore a 4.183 [kJ/kg°C] e mai superiore a 4.6 [kJ/kg°C] (fino a 220 [°C] e 30 [bar]). Per un calcolo di prima approssimazione possiamo allora considerare costante il valore del calore specifico. A titolo di esempio consideriamo un valore pari a 4.3 [kJ/kg°C]. Stesso ragionamento giustificato, in forza dei dati sperimentali, lo possiamo condurre per la densità dell'acqua, ρ_{H₂O}. Non avendo specifiche indicazioni, consideriamo un valore standard per la densità dell'acqua nella fase liquida pari a 1000 kg/m³.

$$\Delta U_{sistema}|_i^f \approx U(t_{iniz} + 28^\circ C)_{sat.}|_2 - U(t_{iniz})_{sat.}|_1 \approx Q \approx V \cdot \int_1^2 \rho_{H_2O} \cdot c_p dt \approx V \cdot \rho_{H_2O} \cdot c_p \cdot \int_1^2 dt = 0.045 [m^3] \cdot 1000 \left[\frac{kg}{m^3} \right] \cdot 4.3 \left[\frac{kJ}{kg^\circ C} \right] \cdot 28 [^\circ C] = 5418 [kJ]$$

A seguito di queste considerazioni possiamo concludere che la variazione di energia interna, così come quella dell'entalpia, in prima approssimazione può essere espressa mediante una funzione analitica delle coordinate termodinamiche:

$$\Delta U_{sistema}|_i^f \approx V \cdot \int_1^2 \rho_{H_2O} \cdot c_p \cdot dt \quad \text{laddove vogliamo tenere conto della variabilità della densità e del calore specifico in funzione della temperatura};$$

$$\Delta U_{sistema}|_i^f \approx V \cdot \rho_{H_2O} \cdot c_p \Delta t|_i^f \quad \text{laddove possiamo ritenere trascurabili le variazioni della densità e del calore specifico lungo l'intervallo di temperature abbracciato da } \Delta t.$$

Riconsiderando l'equazione (3) di primo principio

$$\Delta U_{sistema}|_i^f = L_{elica} \quad (3)$$

possiamo allora conoscere la quantità di lavoro, necessaria al sistema, per la realizzazione del processo termodinamico.

$$\Delta U_{sistema}|_i^f = L_{elica} \approx 1204 [kJ];$$

La conoscenza di questa dose di kJ di lavoro ci permetterà di valutare quanto tempo "τ" dovrà funzionare il motore elettrico per poter somministrare al sistema 5418 [kJ]. Infatti visto che la potenza del motore elettrico è di

0.5 [kW], allora significa che, per ogni secondo di funzionamento, il motore è in grado di eseguire 0.5kJ. Al sistema termodinamico gli occorrono 5418 [kJ], allora il tempo “ τ ” di funzionamento si ricava dalla seguente formula:

$$P_{mot.elettr.} \cdot \tau = L_{elica} \Rightarrow \tau = \frac{L_{elica}}{P_{mot.elettr.}} = \frac{5418[kJ]}{0.5 \frac{kJ}{s}} = 10836[s] \equiv 3[h];$$

Allo stesso risultato ci saremmo potuti arrivare seguendo una seconda via, molto più breve. Partiamo dalla equazione (3) di primo principio.

$$\Delta U_{sistema}_i^f = L_{elica} \quad (3)$$

Questa equazione è la formulazione matematica del primo principio, applicato al particolare caso proposto nell’esercizio. La variazione di energia interna del processo termodinamico si vuole che sia causata da una somministrazione di lavoro d’elica, figura 5. La funzione variazione di energia interna è una funzione di stato, il suo valore non dipende dal particolare percorso che viene intrapreso per portare il sistema dallo stato iniziale fino allo stato finale. Nulla vieta di ipotizzare un processo termodinamico, alternativo a quello proposto dall’esercizio, che a partire dal medesimo stato iniziale, conduca il sistema allo stesso stato finale, causando la medesima variazione di energia interna. Allora il processo alternativo che può convenientemente essere immaginato è quello che avviene fornendo calore in modo quasi statico, a volume specifico costante, piuttosto che il lavoro d’elica, fino a raggiungere una variazione di temperatura pari a 28°C, figura 6. La variazione di energia interna del processo alternativo ipotizzato ha il medesimo valore numerico della variazione di energia interna del processo originale indicato nell’esercizio. Questa sostituzione del processo eseguito con il calore e non con il lavoro è legittimata dal fatto che il primo principio oltre a istituire la funzione energia interna ha stabilito anche l’equivalenza del calore in lavoro per il tramite dell’energia interna. Quindi anche il calore come il lavoro, quando entra nei corpi determina nel corpo una nuova potenzialità di essere convertito in lavoro cioè determina una variazione dell’energia interna del corpo.

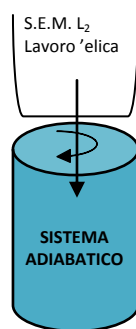


Figura 5



Figura 6

La scelta di un percorso ipotetico quasi statico alternativo è legata al fatto che il processo originale non quasi statico non permette di esprimere e quindi di calcolare la quantità di lavoro somministrata al sistema a partire dalla dinamica di evoluzione assunta dalle coordinate termodinamiche, durante la somministrazione del lavoro. In altri termini non è possibile scrivere la seguente eguaglianza:

$|L_{elica}| = \left| \int_i^f F_{ext} \cdot dl \right| = \left| \int_i^f F_{int}(p, v, t) \cdot dl \right|$ dove "F_{ext}" è la forza che l'ambiente circostante esercita sui punti materiali del sistema e "F_{int}" è la forza che il resto del sistema esercita sui quei punti del sistema in corrispondenza dei quali insistono anche le forze dell'ambiente circostante, figura 7.

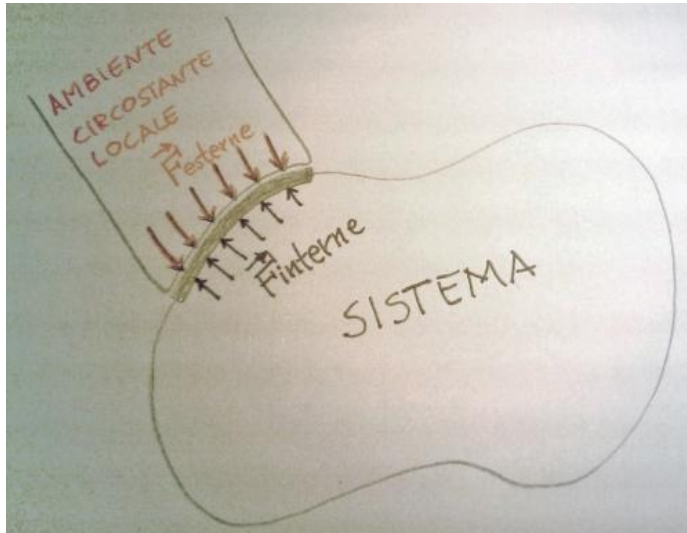


Figura 7

L'impossibilità è dovuta al fatto che, durante il processo non quasi statico, il sistema evolve passando per stati che non sono di quasi equilibrio termodinamico, e quindi non si riesce a descrivere il sistema mediante le sue coordinate termodinamiche p,v,θ, durante il suo tragitto termodinamico.

Per questo motivo si sceglie un percorso alternativo, intrappolato tra i medesimi stati iniziale e finale, che sia quasi statico. La quasi staticità ci permette di calcolare le entità di scambio (calore lavoro, ecc), tra ambiente circostante locale e sistema, a partire dal percorso tracciato dalle coordinate termodinamiche interne del sistema. Il percorso alternativo quasi statico è quello con solo scambio di calore a volume specifico costante fino a raggiungere una variazione di temperatura di 28°C. Il processo per essere quasi statico operativamente deve e può essere realizzato solo mediante una batteria di serbatoi di calore che sono in grado di somministrare calore con continuità a temperatura sempre più crescente fino a realizzare un aumento di 28°C, figura (8). Infatti se invece disponessimo di un solo serbatoio avente direttamente una temperatura maggiore di 28°C di quella posseduta dal sistema nelle condizioni iniziali, non saremmo in grado di realizzare un processo quasi statico, in quanto il calore verrebbe scambiato in condizioni di uno squilibrio termico finito.

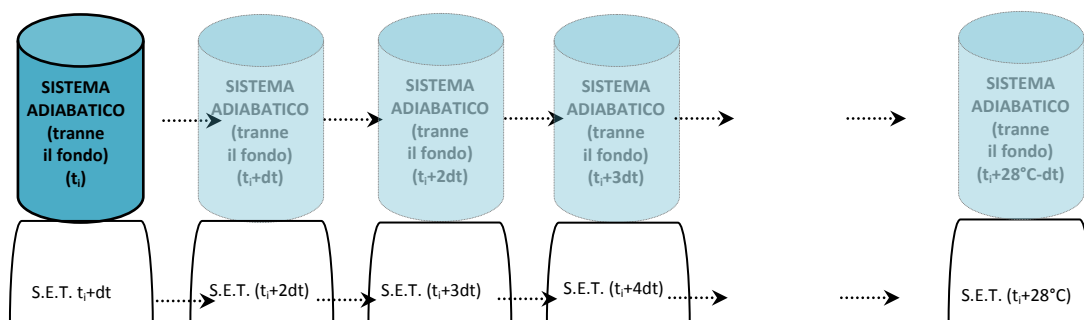


Figura (8) batteria di SET a temperatura crescente per realizzare uno scambio di calore in condizioni di quasi equilibrio, fino a raggiungere un incremento di temperatura pari a 28°C.

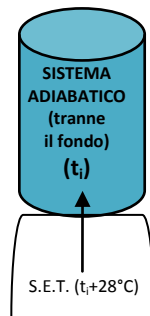


Figura 9. Il sistema raggiunge dopo un certo intervallo di tempo un incremento di temperatura di 28°C rispetto a quella posseduta all'inizio, ma il processo non è quasi statico

$$\Delta U_{\text{ sistema }} \Big|_i^f \Big|_{\text{quasi statico}} = Q$$

Essendo un percorso quasi statico posso allora esprimere la dose di calore fornita al sistema in questo modo:

$$Q = V \cdot \int_i^f \rho \cdot c_v \cdot dt ;$$

perciò:

$$\Delta U_{\text{ sistema }} \Big|_i^f \Big|_{\text{quasi statico}} = V \cdot \int_i^f \rho \cdot c_v \cdot dt \quad (7);$$

Anche nel percorso quasi statico possiamo adottare le medesime approssimazioni che abbiamo segnalato nel primo metodo di risoluzione, per quanto riguarda il calore specifico e la densità dell'acqua. Analizzando la equazione (6) possiamo sostituire nella (7) il c_v con il c_p e poi possiamo considerare sia la densità ρ , sia il calore specifico c_p , costanti durante il processo, e pari rispettivamente a 1000 [kg/m³] e 4.3 [kJ/kg°C].

$$\Delta U_{\text{ sistema }} \Big|_i^f \Big|_{\text{quasi statico}} \approx V \cdot \rho \cdot c_p \int_i^f dt = 5418 [kJ];$$

La variazione di energia interna provocata dal processo quasi statico coincide con quella del processo originale che a sua volta è uguale al lavoro d'elica di cui vogliamo conoscere il valore numerico.

$$\Delta U_{\text{ sistema }} \Big|_i^f \Big|_{\text{quasi statico}} = 12040 [kJ] = \Delta U_{\text{ sistema }} \Big|_i^f = L_{\text{elica}} \Rightarrow L_{\text{elica}} = 5418 [kJ];$$

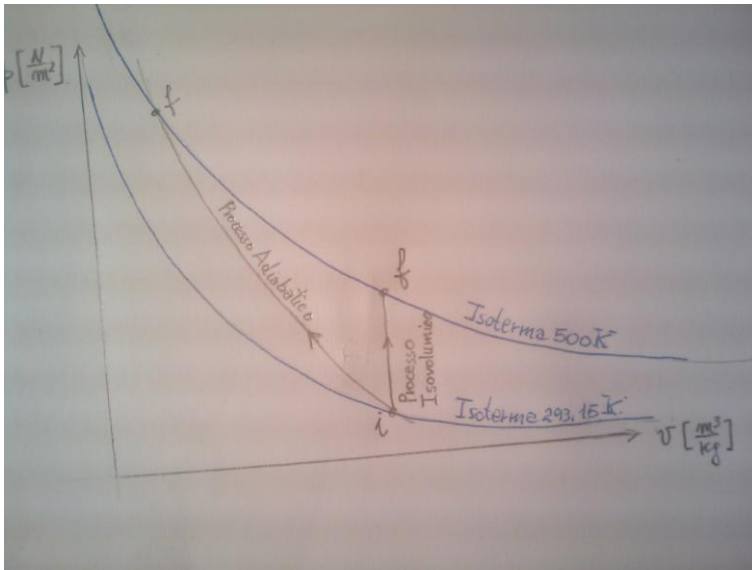
La conoscenza di questa dose di kJ di lavoro ci permetterà di valutare quanto tempo "τ" dovrà funzionare il motore elettrico per poter somministrare al sistema 5418 [kJ]. Infatti visto che la potenza del motore elettrico è di 0.5 [kW], allora significa che, per ogni secondo di funzionamento, il motore è in grado di eseguire 0.5kJ. Al sistema termodinamico gli occorrono 5418 [kJ], allora il tempo "τ" di funzionamento si ricava dalla seguente formula:

$$P_{\text{mot. elettr.}} \cdot \tau = L_{\text{elica}} \Rightarrow \tau = \frac{L_{\text{elica}}}{P_{\text{mot. elettr.}}} = \frac{5418 [kJ]}{0.5 \frac{kJ}{s}} = 10836 [s] \cong 3 [h];$$

6) In un recipiente a volume costante indeformabile con volume $V=0.1\text{m}^3$ è racchiusa aria a 20ata e 293 K. L'aria con una trasformazione isovolumica passa da 293K a 500K.

Si determinino:

a) le condizioni finali del sistema; b) il calore scambiato; c) la variazione di energia interna; la variazioni di entalpia. Nel caso in cui la trasformazione non sia più isovolumica, ripetere i calcoli per un processo adiabatico reversibile.



Processi termodinamici isovolumico e adiabatico del gas ideale tra le isoterme di 293.15K e 500K.

L'esercizio come prima domanda richiede di determinare le condizioni finali del sistema. Il sistema termodinamico è chiuso ed è costituito da una miscela omogenea di gas. È un sistema semplice descritto dalle coordinate p, v, t . Per conoscere termodinamicamente lo stato del sistema bisogna conoscere il valore delle tre coordinate termodinamiche. Alla determinazione dello stato finale del sistema manca la conoscenza della pressione finale. Nell'ipotesi, perfettamente accettabile, di poter considerare l'aria a comportamento ideale, nelle condizioni di pressione di 20 ata e 293K, possiamo allora determinare la massa di gas, contenuta in quel decimo di metro cubo di volume, mediante l'equazione di stato dei gas ideali, a partire dalle condizioni iniziali.

$$p_{iniz}V = m_{aria}R_{part}g_{iniz} \Rightarrow m_{aria} = \frac{p_{iniz}V}{R_{part}g_{iniz}} = \frac{(20 \cdot 9.81 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2) \cdot (0.1 \text{ m}^3)}{(286.65 \text{ J/kgK}) \cdot (293 \text{ K})} = 2.34 [\text{kg}];$$

Si ricorda che 1 ata è un atmosfera tecnica assoluta e che un atmosfera tecnica è pari a $98 \cdot 10^4 [\text{N/m}^2]$. La costante particolare dell'aria è pari a $R_{part} = 286.65 \text{ J/kgK}$.

La conoscenza della massa di gas ci permette di determinare la pressione finale del gas a seguito del riscaldamento isovolumico e il volume specifico del sistema. Sempre mediante l'equazione di stato possiamo scrivere:

$$p_{finale} V = m_{aria} R_{part} \theta_{finale} \Rightarrow p_{finale} = \frac{m_{aria} \cdot R_{part} \cdot \theta_{finale}}{V} = \frac{(2.3kg) \cdot (286.65 J/kgK) (500K)}{(0.1m^3)} = 33.54 \cdot 10^5 \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

$$v_{iniz} = v_{finale} = \frac{V}{m_{aria}} = \frac{0.1m^3}{2.3kg} = 0.043 \left[\frac{m^3}{kg} \right]$$

Per calcolare la variazione di energia interna che subisce l'aria possiamo usare l'espressione della variazione dell'energia interna di un gas ideale più che perfetto.

$$\Delta U_i^f \text{ Processo Isovolumio} = m_{aria} \int_i^f c_v(\theta) \cdot (\theta_f - \theta_i) = m_{aria} c_v (\theta_f - \theta_i) = 2.3kg \left(718 J/kgK \right) (500K - 293K) = 341840J$$

Si ricordi che il calore specifico a volume costante si può ricavare dalla relazione valida per i gas ideali secondo cui $c_p - c_v = R_{part}$. Ricordando che il calore specifico a pressione costante è pari a 0.24kcal/kgK, cui corrispondono 1000J/kgK, e la costante particolare del gas aria è pari a 286.65 J/kgK, possiamo scrivere:

$$c_p - c_v = R_{part} \Rightarrow c_v = \left(1000 J/kgK \right) - \left(286.65 J/kgK \right) = 718 \left[\frac{J}{kgK} \right]$$

Questo valore di variazione di energia interna ci fornisce anche il valore del calore scambiato, in quanto in base al primo principio per processi quasi statici possiamo scrivere

$$\Delta U_i^f \text{ Processo Isovolumio} = Q - \int_i^f p dv = 341840J \text{ ma poiché il processo è a volume costante ed è quasi statico allora è anche a}$$

volume specifico costante pertanto $dv=0$; pertanto:

$$\Delta U_i^f \text{ Processo Isovolu} = Q = 341840J \equiv 81662cal$$

La variazione di entalpia la si può valutare a partire dall'ipotesi di gas a comportamento ideale più che perfetto, proprio come è stato fatto per l'energia interna:

$$\Delta H_i^f \text{ Processo Isovolumio} = m_{aria} \int_i^f c_p(\theta) d\theta = m_{aria} c_p (\theta_f - \theta_i) = 2.3kg \left(1000 J/kgK \right) (500K - 293K) = 207810J$$

Adesso supponiamo di eseguire il processo in modo adiabatico quasi statico. Lo stato iniziale è lo stesso di quello isovolumico. Però lo stato finale è diverso, il sistema deve sempre approdare ad uno stato in cui la temperatura è pari a 500K. Per determinare esaurientemente lo stato termodinamico (ci mancano pressione e volume specifico) dobbiamo utilizzare l'equazione di processo dell'adiabatica quasi statica e dei gas ideali in corrispondenza dello stato finale.

$$p v^\gamma = cost = p_i v_i^\gamma = p_f v_f^\gamma; \quad p_f v_f = R_{aria} \theta_f$$

Sostituendo nell'equazione dell'adiabatica l'espressione della p_f ricavata dalla equazione dei gas ideali, otteniamo:

$$v_f = \left(\frac{\frac{c_p}{p_i v_i^{\frac{c_p}{c_v}}}}{R_{aria} \theta_f} \right)^{\frac{1}{\frac{c_p}{c_v} - 1}} = \left(\frac{\left(20 \cdot 9.81 \cdot 10^4 \frac{N}{m^2} \right) \cdot \left(0.043 \frac{m^3}{kg} \right)^{\frac{1004}{718}}}{\left(286.65 J/kgK \right) \cdot 500K} \right)^{\frac{1}{\frac{1004}{718} - 1}} = 0.011 \left[\frac{m^3}{kg} \right]; \quad p_f = \frac{R_{aria} \theta_f}{v_f} = \frac{\left(286.65 J/kgK \right) \cdot (500K)}{\left(0.011 \frac{m^3}{kg} \right)} = 130 \cdot 10^5 \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

I valori della variazione dell'energia interna e dell'entalpia del processo adiabatico sono uguali a quelli del processo isovolumico, in quanto anche il processo adiabatico è intrappolato sulle medesime isoterme del processo isovolumico e l'energia interna come l'entalpia del gas ideale dipendono solo dalla temperatura del gas.

$$\Delta U_i^f \underset{\substack{\text{Processo} \\ \text{Adiabatico}}}{=} L_{\text{adiabatico}} = m_{\text{aria}} \int_i^f c_v(\vartheta) d\vartheta = m_{\text{aria}} (\vartheta_f - \vartheta_i) = 341840 \text{ J}$$

$$\Delta H_i^f \underset{\substack{\text{Processo} \\ \text{Adiabatico}}}{=} m_{\text{aria}} \int_i^f c_p(\vartheta) \cdot (\vartheta_f - \vartheta_i) = m_{\text{aria}} c_p (\vartheta_f - \vartheta_i) = 207810 \text{ J}$$