

I ONDE PIANE

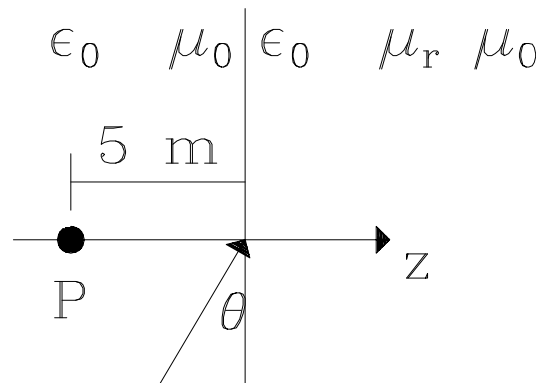
OP 1 Una onda piana ha $\mathbf{k} = (200 \mathbf{i}_x, 0 \mathbf{i}_y, 150 \mathbf{i}_z) m^{-1}$ ed ha $E_s = -jE_p$ con densità di potenza pari a $3 \mu W/m^2$. Sapendo che il mezzo in cui l'onda si propaga ha $\epsilon_r = 2$, calcolare la frequenza dell'onda e le componenti del campo elettrico e magnetico.

$$\left[\left[f = 8.43 GHz; E_y = 28.3 mV/m \quad E_y = j 17 mV/m \quad E_z = -j 22.6 mV/m; \right] \right]$$

$$\left[\left[H_x = -63.6 \mu A/m \quad M_y = j 0.11 mA/m \quad H_z = 80 \mu A/m \right] \right]$$

OP 2 Una onda piana a frequenza $f = 20 MHz$ incide su un semispazio di costanti ϵ_0 e $\mu_r \mu_0$.

Le componenti E_y ed E_z del campo incidente sono uguali ed in fase ed il suo vettore di Poynting è pari a $1 W/m^2$. Calcolare il modulo del campo elettrico totale nel punto $P (0, 0, -5 m)$, e determinarne la polarizzazione.



$$\theta = 60^\circ, \mu_r = 3$$



Il campo incidente è polarizzato linearmente, in quanto per l'onda incidente $E_x = -E_z \tan \theta$, e pertanto il fasore del campo elettrico è reale.

Dal valore di $|S_i|$ segue $|E| = 27.5 V/m$ e, poichè

$$|E|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2 = |E_z|^2 (2 + \tan^2 \theta)$$

si ha $|E_z| = |E_y| = 12.3 V/m$ e $|E_x| = 21.3 V/m$.

I coefficienti di riflessione sono dati dalle formule di Fresnel:

$$\Gamma_{TE} = \frac{\mu_r \cos \theta_1 - \sqrt{\mu_r - \sin^2 \theta_1}}{\mu_r \cos \theta_1 + \sqrt{\mu_r - \sin^2 \theta_1}} \quad \Gamma_{TM} = \frac{\sqrt{\mu_r - \sin^2 \theta_1} - \cos \theta_1}{\sqrt{\mu_r - \sin^2 \theta_1} + \cos \theta_1}$$

dove $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta$ è l'angolo di incidenza e θ_2 , dato dalla legge di Snell $\sin \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_r}} \sin \theta_1$, quello di rifrazione. Risulta $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 16.8^\circ$, $\Gamma_{TE} = .221$, $\Gamma_{TM} = .314$ e l'onda riflessa è anch'essa polarizzata linearmente.

Ognuna delle due componenti (TE e TM) del campo è data da

$$\mathbf{E} = E_i e^{-jk_x x} (e^{-jk_z z} \mathbf{i}^+ + \Gamma e^{jk_z z} \mathbf{i}^-)$$

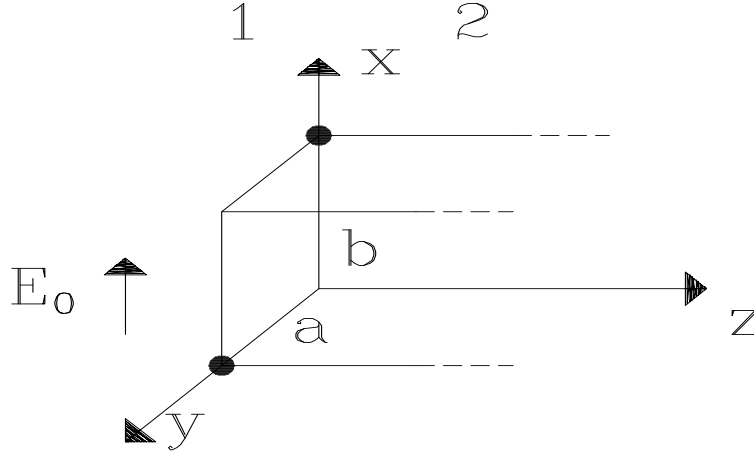
dove $k_x = k \cos \theta = .209 \text{ m}^{-1}$, $k_z = k \sin \theta = .363 \text{ m}^{-1}$ ed \mathbf{i}^+ , \mathbf{i}^- sono i versori del campo incidente e riflesso.

Per la componente TE $\mathbf{i}^+ = \mathbf{i}^- = \mathbf{i}_y$ e quindi $|E_y| = 9.98 \text{ V/m}$.

Per la componente TM i due versori \mathbf{i}^+ , \mathbf{i}^- hanno la stessa componente x ma componente z opposta; conviene quindi calcolare separatamente $|E_x|$ ed $|E_z|$. Risulta $|E_x| = 15.7 \text{ V/m}$ ed $|E_z| = 15.8 \text{ V/m}$, per cui $|E| = 24.4 \text{ V/m}$.

II TEOREMI DI POYNTING

T 1 Un'onda piana di ampiezza E_0 , polarizzata secondo l'asse x incide normalmente su un semispazio buon conduttore di costanti $\mu_0, \epsilon_0, \sigma$. Verificare il teorema di Poynting nel volume a, b, ∞ di figura.



Poichè nel volume assegnato non esistono generatori, nè perdite dielettriche o magnetiche, si tratta di verificare che la potenza dissipata P_L è opposta alla parte reale del flusso del vettore di Poynting *uscende* dal contorno del volume. Se chiamiamo mezzo 1 quello per $z < 0$ e mezzo 2 quello per $z > 0$ si ha (posto Z_1, Z_2 l'impedenza caratteristica dei mezzi 1 e 2 rispettivamente, k_{z2} la costante di propagazione nel mezzo 2)

$$E_2(z) = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} E_0 e^{-j k_{z2} z} = E_{20} e^{-j k_{z2} z}$$

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2} \int_V \sigma |E_2(z)|^2 dV = \frac{1}{2} \sigma a b \int_0^\infty |E_{20} e^{-j k_{z2} z}|^2 dz = \frac{1}{2} \sigma a b |E_{20}|^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha z} dz = \\ &= \frac{1}{4} \sigma |E_{20}|^2 a b \delta = \frac{1}{4} \frac{|E_{20}|^2}{R_s} a b \end{aligned}$$

avendo posto $R_s = \frac{1}{\sigma \delta}$.

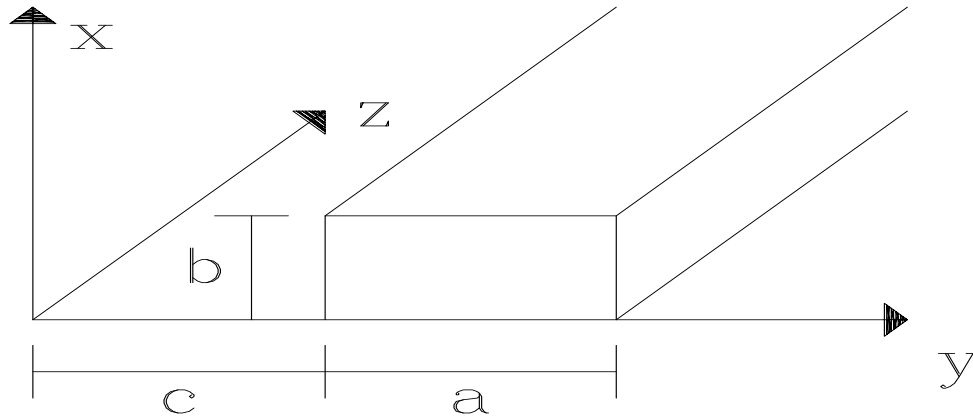
Il flusso P del vettore di Poynting, posto S pari alla superficie $a \times b + \text{Sup. Laterale} + \text{Sup. all'infinito}$, è:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \oint_S \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2^* \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \frac{|E_{20}|^2}{Z_2^*} dx dy = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{|E_{20}|^2 a b}{\frac{(1-j)}{\sigma \delta}} = -\frac{1}{2} |E_{20}|^2 a b \frac{1+j}{2} \sigma \delta \end{aligned}$$

Pertanto

$$\text{Re}[P] = -\frac{1}{4} \frac{|E_{20}|^2}{R_s} a b = -P_L$$

T 2 Un' onda piana di ampiezza E^+ e pulsazione ω , polarizzata col campo elettrico secondo x e propagantesi lungo l' asse z , incide dal vuoto su un semispazio buon conduttore di caratteristiche ϵ, μ, σ .



Calcolare il flusso medio di potenza complessa attraverso la superficie $[a, b]$ della figura. Mostrare che la parte reale di tale flusso può porsi sotto la forma $P_r = \frac{1}{2} R a^2 |I|^2$, dove I è la corrente lineare per unità di lunghezza (colchè aI è la corrente totale nel volume in figura) che circola nel buon conduttore ed R una resistenza equivalente.



Il flusso medio di potenza complessa vale:

$$P = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \int_S E H^* ds$$

dove S è la superficie $[a, b]$ e si tenuto conto che \mathbf{E} , \mathbf{H} , $d\mathbf{s}$ sono ortogonali.

Per $z < 0$ esisteranno tanto l'onda diretta, quanto l'onda riflessa. Invece per $z > 0$ si propagherà solo l'onda trasmessa data da:

$$E = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} E^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

con

$$k_2 = \beta - j\alpha = \omega \sqrt{\mu(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega})} \simeq (1 - j) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

avendo supposto $\sigma \gg \omega\epsilon$ (buon conduttore). Inoltre

$$H = \frac{E}{Z_2} = \frac{2E^+}{Z_1 + Z_2} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}.$$

Le impedenze intrinseche del mezzo per $z < 0$ e $z > 0$, Z_1 e Z_2 , sono date da:

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad , \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} \simeq \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = R + jX$$

Quindi avremo:

$$P = \frac{1}{2} \int_c^{c+a} dy \int_0^b |E^+|^2 \frac{4Z_2}{|Z_1 + Z_2|^2} dx = \frac{2Z_2 |E^+|^2}{|Z_1 + Z_2|^2} ab$$

Calcoliamo la corrente indotta nel mezzo $z > 0$. \mathbf{E} è un vettore diretto secondo x e quindi \mathbf{J} sarà anch'esso parallelo a x . Integrando \mathbf{J} in una striscia avente larghezza Δy lungo l'asse y si ha:

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{i}_x dy dz = \int_0^\infty \sigma E dz \int_0^{\Delta y} dy \\ &= \Delta y \cdot \int_0^\infty \sigma \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} E^+ e^{-jk_z z} dz = \frac{2\sigma Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{E^+}{jk_2} \Delta y \end{aligned}$$

Ora

$$\frac{\sigma Z_2}{jk_2} \simeq \frac{\sigma \sqrt{j \frac{\omega \mu}{\sigma}}}{j \sqrt{-j \sigma \omega \mu}} = 1$$

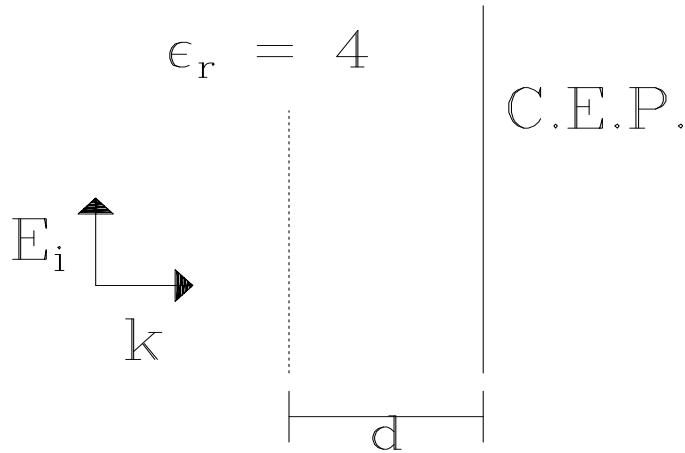
per cui $\hat{I} \simeq \frac{2E^+}{Z_1 + Z_2} \Delta y$.

La corrente per unità di lunghezza vale $I = \hat{I}/\Delta y$ per cui $P = \frac{1}{2} Z_2 |I|^2 ab$ e la sua parte reale

$$P_r = \text{Re}(P) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} |I|^2 ab = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{b}{a\delta} \right) a^2 |I|^2 = \frac{1}{2} R a^2 |I|^2.$$

N.B. R è la resistenza statica del conduttore, tenendo però conto della disuniformità del flusso di corrente (per cui la profondità efficace è pari a δ).

T 3 Determinare la frequenza minima per la quale le energie elettrica e magnetica immagazinata nello strato di spessore $d = 0.5 \text{ m}$ sono uguali, ed il valore della energia elettrica.

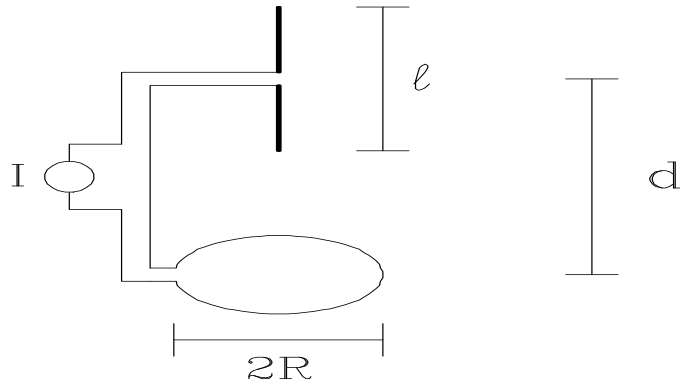


$$E_i = 100 \text{ V/m}$$

$$\left[f = 75 \text{ MHz}, W_e = 88.6 \text{ nJ/m}^2 \right]$$

III ANTENNE IN TRASMISSIONE

- A 1** Calcolare la potenza irradiata dal sistema in figura. (L'asse della spira è allineato col dipolo)



$$f = 1GHz; \ell = 1 \text{ cm}; R = 0.5 \text{ cm}; I = 3 \text{ A}; d = 6 \text{ cm}$$



Per definizione

$$P_{irr} = Re \left\{ \int \int_S (\mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_n) dS \right\}$$

dove S è una superficie chiusa contenente le sorgenti. Tale superficie può essere scelta per comodità sferica e sufficientemente grande da poter considerare il campo del dipolo rivolto lungo \mathbf{i}_θ (asse z allineato col dipolo) e quello della spira lungo \mathbf{i}_ϕ . Quindi il vettore di Poynting è la somma dei vettori relativi alle due antenne separate.

$$P_{irr} = P_{dip} + P_{sp} = \frac{1}{2}(R_{dip} + R_{sp})|I|^2$$

Ora

$$R_{dip} = 800 \left(\frac{\ell/2}{\lambda} \right)^2 = 0.22 \Omega$$

$$R_{sp} = 800 \left(\frac{\beta S}{\lambda} \right)^2 = 800 \left(\frac{2\pi^2 R^2}{\lambda^2} \right)^2 = 3200 \left(\frac{\pi R}{\lambda} \right)^4 = 0.02 \Omega$$

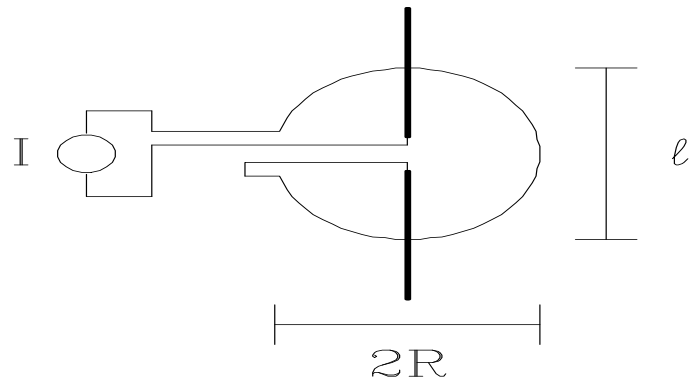
da cui

$$P_{irr} = 1.1 \text{ W}$$

-
- A 2** Calcolare la resistenza di irradiazione del sistema di antenne di figura.

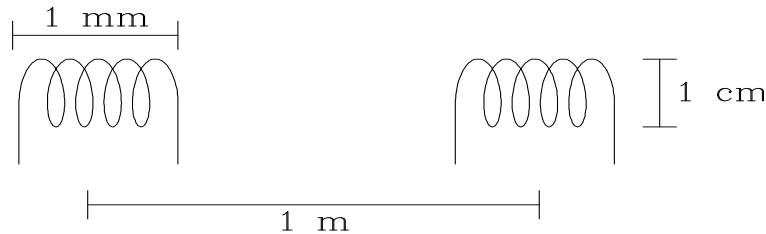
$$R = 7 \text{ cm}; \ell = 10 \text{ cm}; \lambda = 1 \text{ m}$$

$$\left[R_i = 9.5 \Omega \right]$$



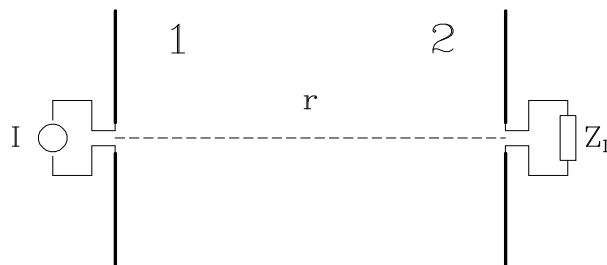
IV COLLEGAMENTI

- C 1** Si considerino le due bobine identiche, ciascuna composta di $N = 5$ spire, rappresentate nella figura



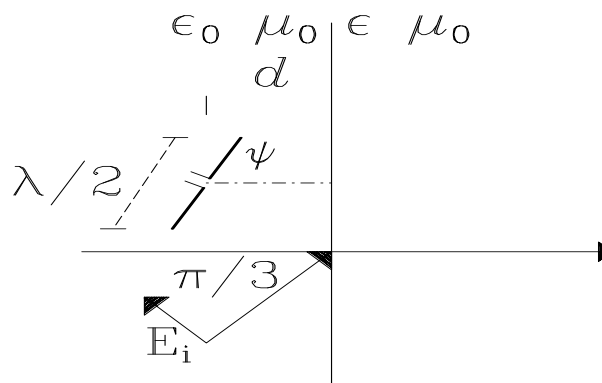
La prima bobina è alimentata da una corrente di 1 A alla frequenza $f = 300 \text{ MHz}$. Calcolare la tensione indotta sulla seconda spira, supposta aperta. [5.92 mV]

- C 2** Calcolare la minima potenza in ingresso richiesta da un dipolo corto distante 1 Km da un'antenna parallela al dipolo e con $\mathbf{h} = 0.8 \text{ m}$, per avere una tensione a vuoto di 10 mV alla frequenza di 100 MHz.

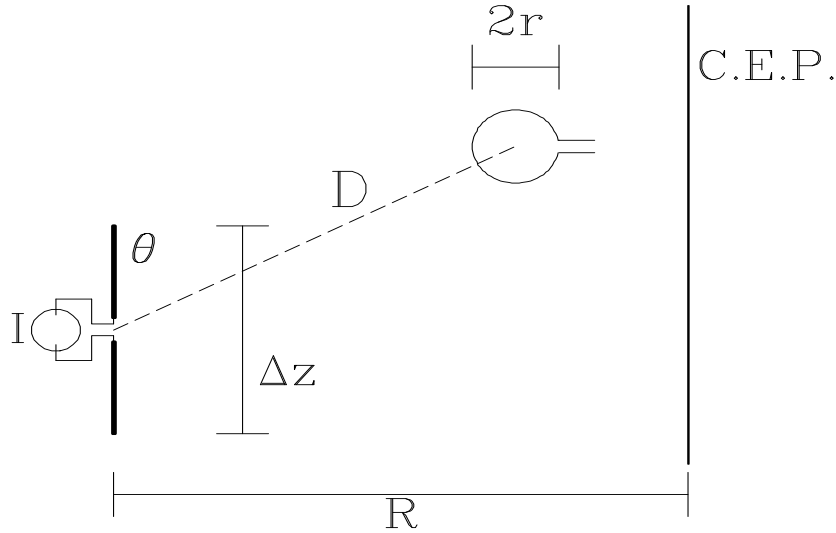


[1.76 W]

- C 3** Una onda piana con polarizzazione parallela, di intensità $S = 1 \text{ mW/m}^2$ e frequenza $f = 300 \text{ MHz}$, incide sul semispazio dielettrico di figura. Determinare la distanza minima tra il dipolo elementare e l'interfaccia tale che la tensione indotta a vuoto sia massima.



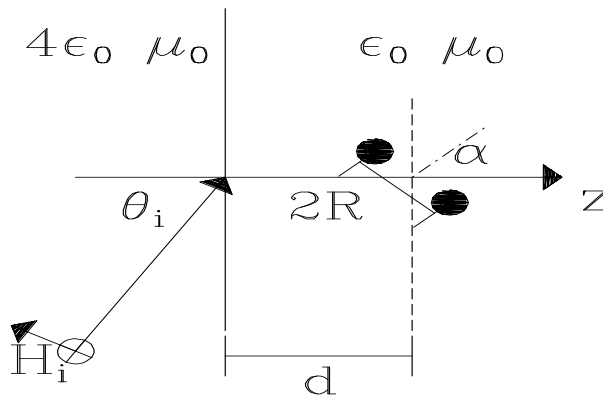
$$\epsilon = 2\epsilon_0, \quad \psi = \frac{\pi}{6}$$



- C 4** Calcolare la tensione a vuoto indotta dal dipolo elementare sulla spira di figura.
 $f = 100 \text{ MHz}$, $\Delta z = 5 \text{ cm}$, $r = 2 \text{ cm}$, $D = 50 \text{ cm}$, $R = 50 \text{ cm}$, $I = 3 \text{ A}$, $\theta = 45^\circ$.

$$\boxed{82.7 \text{ mV}}$$

- C 5** Con riferimento alla configurazione di figura (in cui una spira di raggio R è indicata tramite la sezione col piano di figura), determinare il valore dell'angolo α per cui è massimo il valore della tensione a vuoto sulla spira, nonché il valore di tale tensione.



$$\theta_i = \frac{\pi}{4}, \quad E_i = 100 \text{ V/m}, \quad f = 100 \text{ MHz}, \quad d = 1 \text{ m}, \quad R = 10 \text{ cm}.$$



La lunghezza d'onda è pari a 3 m , per cui la spira può essere considerata elementare. La tensione a vuoto sulla spira può essere calcolata in due modi:

- [B tramite la altezza efficace $V_0 = \mathbf{h}_S \cdot \mathbf{E}_{inc}$, essendo \mathbf{E}_{inc} il campo *incidente* sulla spira (e non sulla interfaccia!)
- tramite la legge di Faraday $V_0 = \omega \mu_0 \pi R^2 \mathbf{H}_{inc} \cdot \mathbf{i}_n$, essendo \mathbf{i}_n la normale alla spira.

Dalla legge di Snell si vede che l'angolo di incidenza è superiore all'angolo limite, per cui nel secondo mezzo si ha una onda piane **evanescente**. Si ha $k_{z2} = -j2.09 \text{ m}^{-1}$, $Z_1 = 267 \Omega$, $Z_2 = j377 \Omega$, per cui $|\mathcal{T}| = 1.633$ (l'impedenza caratteristica del secondo

mezzo è più alta di quella del primo, per cui può essere $|\mathcal{T}| > 1$, senza che la potenza trasmessa sia maggiore di quella incidente).

Segue

$$|E_{inc}| = |\mathcal{T}|E_i e^{-k_{2z}d} = 20.2 \text{ V/m}$$

Se scegliamo la strada a), occorre esprimere la altezza efficace $\mathbf{h}_S = -j\beta\pi R^2 \sin\psi \mathbf{i}_\phi$, con ψ angolo tra il vettore \mathbf{k} dell'onda incidente e la normale alla spira, in termini di α e θ_t .

Se l'onda incidente fosse una onda piana normale, si avrebbe $\psi = \pi + \theta_t - \alpha$, e quindi $\sin\psi = -\sin(\theta_t - \alpha)$. Ma quest'ultima espressione è una funzione analitica di θ_t che può quindi essere prolungata a valori complessi *. Inoltre il campo elettrico incidente è, $\forall\alpha$, parallelo ad \mathbf{i}_ϕ , e quindi basta massimizzare $|\sin(\theta_t - \alpha)|$ rispetto ad α . Poichè $\theta_t = \frac{\pi}{2} + j\varpi$, con $\cosh\varpi = \sqrt{2}$, allora $|\sin(\theta_t - \alpha)|^2 = \cos^2\alpha \cosh^2\varpi + \sin^2\alpha \sinh^2\varpi$ che è massimo per $\alpha = 0$; il valore massimo è 2. La tensione indotta è allora 1.9 V.

Se consideriamo invece la strada b), occorre determinare l'orientazione del campo magnetico. La componente trasversa del campo magnetico all'interfaccia vale

$$H_{2t} = |1 + \Gamma| \left[\frac{E_i}{\zeta/2} \cos\theta_i \right] = 433 \text{ mA/m}$$

mentre quella z si ottiene da $\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$:

$$H_{2z} = -\frac{k_{2x}}{k_{2z}} H_{2t} = -j612 \text{ mA/m}$$

ed entrambe si attenuano di $e^{-k_{2z}d} = .124$ nella propagazione tra interfaccia ed antenna.

La tensione a vuoto vale

$$V_0 = \omega\mu_0\pi R^2 [H_{2t} \sin\alpha + H_{2z} \cos\alpha] e^{-k_{2z}d}$$

e, poichè le due componenti di \mathbf{H} sono in quadratura, è massima per $\alpha = 0$, e vale $V_0 = 1.9 \text{ V}$

* Il prolungamento analitico della altezza efficace ad angoli complessi potrebbe essere eseguito per qualunque tipo di antenna. Si trova tuttavia che piccoli errori sulla altezza efficace per angoli reali danno luogo a errori molto più grandi per angoli complessi (il prolungamento è cioè una procedura *instabile*). Pertanto esso è praticamente possibile solo per antenne molto piccole

V FORZE

F 1 Dato un dipolo elementare di altezza $\Delta z = 3 \text{ cm}$ sul quale incide normalmente un'onda piana elettromagnetica di frequenza $f = 600 \text{ MHz}$ e campo magnetico massimo $H_{inc} = 30 \frac{\text{A}}{\text{m}}$, calcolare la forza media in un periodo esercitata sul dipolo, nel caso in cui:

- a) il campo elettrico incidente è parallelo al dipolo
 - b) il campo elettrico incidente è ortogonale al dipolo;
- assumendo per entrambi i casi che il dipolo sia chiuso su una reattanza induttiva che cancella esattamente la reattanza d'ingresso del dipolo stesso.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } F = \mu_0 S_{inc} \frac{3\lambda^2}{2\pi\zeta} = 67.5 \mu\text{N}, \quad \text{b) } F = 0 \end{array} \right]$$

F 2 Si consideri una onda piana di frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi} = 1 \text{ GHz}$ e di campo elettrico $E_i = 220 \frac{\text{V}}{\text{m}}$, che incide normalmente su un semispazio metallico con conducibilità $\sigma = 5.7 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$, e si calcoli la forza, per unità di superficie, esercitata dall'onda. Si passi poi al limite per $\sigma \rightarrow \infty$, verificando che la forza può essere espressa come

$$F = \frac{\mu_0}{2} \text{Re}[J_S H_i^*] \quad (1)$$

dove J_S è la corrente indotta dall'onda incidente e $H_i = \frac{H_{tot}}{2}$ è il campo magnetico *incidente*. Si giustifichi infine il risultato ottenuto.



Indichiamo col pedice 1 le grandezze relative al semispazio vuoto e col pedice 2 quelle relative al semispazio conduttore. Essendo $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \simeq 10^8$ allora, detta $\delta = 6.7 \mu\text{m}$ la profondità di penetrazione, si ha

$$k_2 = \frac{1-j}{\delta} \quad \zeta_2 = \frac{1+j}{\sigma\delta}$$

Il campo nel mezzo 2 è dato da

$$E_2 = \mathcal{T} E_i e^{-jk_2 z}$$

$$H_2 = \frac{E_2}{\zeta_2}$$

e la densità di corrente da

$$J = \sigma E_2$$

Il coefficiente di trasmissione \mathcal{T} è ovviamente pari a $\frac{2\zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2}$

La densità media di forza (di Lorentz) (diretta lungo la normale alla superficie) è pari a

$$F(z) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{\sigma\mu_0}{\zeta_2^*} |\mathcal{T}|^2 |E_i|^2 \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \right]$$

D'altra parte, essendo $|\zeta_2| \ll \zeta_1$, si ha $\frac{\mathcal{T}^*}{\zeta_2^*} \simeq \frac{2}{\zeta_1}$, per cui

$$F(z) = \frac{1}{2} \frac{4\mu_0}{\zeta_1^2} |E_i|^2 \frac{\exp(-\frac{2z}{\delta})}{\delta}$$

Tale forza si esercita su tutto il semispazio (in pratica in una zona profonda alcune decine di μm). Il valore per unità di superficie si ottiene integrando $F(z)$ rispetto a z , e vale

$$F = \frac{1}{2} \frac{2\mu_0}{\zeta_1^2} |E_i|^2 = 4.2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m^2}$$

Tale valore è indipendente da σ e pertanto costituisce anche il valore della forza per $\sigma \rightarrow \infty$. L'espressione precedente può essere riscritta come

$$F = \frac{\mu_0}{2} \left[\frac{|H_{tot}|^2}{2} \right]$$

che, essendo $\mathbf{J}_S = \mathbf{H}_{tot} \times \mathbf{i}_n$, coincide con la espressione (1). Il motivo per cui la forza è data dalla (1) e non dalla espressione intuitiva $F = \frac{\mu_0}{2} \text{Re}[J_S H_{tot}^*]$ è che nella espressione della forza su un elemento di corrente, $d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{2} d\mathbf{J} \times \mathbf{H}^*$, il campo \mathbf{H} è quello dovuto a tutte le altre correnti *esclusa* $d\mathbf{J}$. Infatti la auto-forza non può, per simmetria, avere risultante diversa da zero; il suo effetto è quindi solo di deformare (o, se la distribuzione è rigida, di tendere a deformare) la $d\mathbf{J}$. Nel nostro caso \mathbf{H} è quindi la somma del campo incidente e di quello reirradiato dalle correnti indotte sul piano, esclusa $d\mathbf{J}$. Quest'ultimo è poi nullo per simmetria. Infatti dalla figura si vede che per ogni \mathbf{J}_{S1} esiste un \mathbf{J}_{S2} simmetrico, con campo magnetico uguale ed opposto

