SFERE, CONI E CILINDRI

(1) Scrivere l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche
   a) della circonferenza $\mathcal{C}$ contenente il punto $P_1 = (5, 3)$ e avente centro nel punto $C_1 = (4, 1)$;
   b) della sfera $\mathcal{S}$ contenente il punto $P_2 = (3, 2, 1)$ e avente centro nel punto $C_2 = (2, 0, 0)$.

(2) Determinare l'equazione cartesiana: i) della retta tangente nel punto $A_1 = (3, -1)$ alla circonferenza $\mathcal{C}$; ii) del piano tangente alla sfera $\mathcal{S}$ nel punto $A_2 = (1, -2, -1)$ (date nell'esercizio anteriore).

(3) Utilizzando il concetto di fasci di circonferenze, determinare:
   a) l'equazione della circonferenza contenente i punti $O = (0, 0)$, $A = (0, 6)$ e $B = (2, 6)$;
   b) le circonferenze passanti per i punti $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (-1, 0)$ e tangenti la retta $r: \ x + y = 2$;
   c) l'equazione della circonferenza contenente il punto $C = (4, 2)$ e i punti comuni alla circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e all'asse x.

(4) Dopo aver dimostrato che l'equazione $x^2+y^2-x+3y-10 = 0$ rappresenta una circonferenza, determinare le equazioni delle rette per $A = (-2, 6)$ tangenti alla circonferenza data.

(5) Determinare l'equazione della circonferenza dello spazio euclideo di centro $C = (1, 1, 0)$ e tangente alla retta

$$r: \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = -t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(6) a) Dimostrare che il piano $x-2y+z-2 = 0$ è secante la sfera $x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z+1 = 0$.
   b) Determinare centro e raggio della circonferenza

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 1 = 0, \\ x - 2y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

   c) Dire se Γ è o no un equatore della sfera $3(x^2 + y^2 + z^2) - 7x + 2y - z = 7$.
   d) Determinare l'equazione della retta tangente a Γ nel punto $P_0 = \Big(\frac{3-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\Big)$.

(7) Determinare l'equazione cartesiana della sfera di centro $C = (-1, 2, 1)$ che è tangente al piano $2x + 3y - 2z - 4 = 0$.

(8) Determinare l'equazione cartesiana della sfera passante per l'origine, avente centro sulla retta $r: \begin{cases} y = 0, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$ e secante sul piano $y = 0$ una circonferenza di raggio 2.

(9) Determinare l'equazione cartesiana della sfera tangente al piano $\pi: \ x - 3y + 2z + 1 = 0$ nel punto $P = (1, 0, -1)$ ed avente centro sul piano $\pi': \ 2x + y - 3z + 2 = 0$.

(10) Determinare il cilindro circolare avente per asse di rotazione la retta $r(t) = (2t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ e tale che le generatrici abbiano distanza 1 da tale retta.

(11) Determinare l'equazione cartesiana del cono di vertice $V = (0, 0, -6)$ e circoscritto alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 0$.

(12) Determinare l'equazione cartesiana del cilindro avente generatrici perpendicolari al piano $x - y + z + 10 = 0$ e circoscritto alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$.

(13) Determinare le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana del cilindro avente generatrici di direzione $v = (0, 1, 1)$ e come direttrice la curva $\alpha(t) = (t - 1, t + 1, (t - 1)^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

(14) Determinare le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana del cono di vertice $V = (1, 2, -1)$ e avente come direttrice la curva $\alpha(t) = (1 + 2t, -t, t - t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

(15) Mostrare che la superficie di equazione $x^2 - y^2 - z^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ è un cono e determinarne il vertice. Stabilire se si tratta di un cono circolare retto e, in tale caso, determinarne l'asse di rotazione.

(16) Determinare equazioni parametriche per la superficie di equazione cartesiana

$$x^2 + 9y^2 - 6xy - 2x + 6y - z + 5 = 0.$$

Mostrare, inoltre, che tale superficie è un cilindro, determinando la direzione delle sue generatrici e una curva direttrice.

(17) Riconoscere e parametrizzare le seguenti superfici dello spazio euclideo, specificando quali sono superfici di rotazione:

a) $y = \sin x$, *b*) $x^2 + 9z^2 = 1$, *c*) $zy - 1 = 0$, *d*) $x^2 + y^2 - 2x - 6y = -9$.