GEOMETRIA EUCLIDEA

(1) a) Verificare che la retta r di equazione $4x + 3y - 5 = 0$ appartiene al fascio $\mathcal{F}$ (proprio o improprio?) di equazione:

$$(h - 3k)x + (2h - k)y - 2h + 3k = 0.$$

b) Determinare l'insieme dei punti del piano euclideo $\mathcal{E}^2$ aventi distanza 3 dalla retta r.

(2) Determinare la retta comune ai due fasci di equazioni

$$\mathcal{F}_1 : \ x + ky - 1 - 2k = 0, \qquad \mathcal{F}_2 : \ 3x - y + h = 0.$$

(3) Scrivere le equazioni delle rette passanti per $P = (1, -5)$ e che formano un angolo di $\pi/4$ con la retta $r : \ 3x - y - 8 = 0$.

(4) Dati due punti A_1, A_2 di $\mathcal{E}^2$ (o di $\mathcal{E}^3$), dimostrare che un punto P appartiene al segmento di estremi A_1 e A_2 se e solo se

$$P = tA_1 + (1 - t)A_2, \quad t \in [0, 1].$$

(5) Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali risultino complanari i punti:

$$P_1 = (2k, -2, 1 - k), \quad P_2 = (-1, k + 1, -1), \quad P_3 = (k, k - 1, 3k), \quad P_4 = (1, k, 0).$$

(6) Scrivere le equazioni della retta passante per il punto $P = (2, 1, 2)$ e ortogonale alle rette

$$r_1 : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0, \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y - 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

(7) Provare che le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 - t, \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x - y - 4z = 6, \end{cases}$$

sono complanari e determinare il piano che le contiene.

(8) a) Determinare la posizione reciproca e la distanza delle rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ x - y + 3z = 2. \end{cases}$$

b) Determinare l'unica coppia di piani paralleli π_1 e π_2, tali che π_i contenga r_i, $i = 1, 2$.

c) Dopo aver orientato la retta r_1 nel verso delle t descrescenti e la retta r_2 nel verso delle x crescenti, stabilire se è acuto oppure ottuso l'angolo da esse formato.

(9) Sia P_i, $i = 1, 2$, la proiezione ortogonale del punto $P = (1, 2, -1)$ sul piano π_i, $i = 1, 2$, dove

$$\pi_1 : \ 3x - y - 2z + 11 = 0, \qquad \pi_2 : \ 2x - 3y + z - 9 = 0.$$

Calcolare le coordinate del punto medio M dei punti P_1 e P_2.

(10) Determinare gli eventuali valori di h e k in corrispondenza dei quali la retta

$$r : \begin{cases} x + ky + z = h, \\ x - y - z - 2 = 0, \end{cases}$$

è contenuta nel piano π di equazione $2x + y = 3$.

(11) Assegnati tre punti non allineati $P_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathcal{E}^3$, $i = 1, 2, 3$, provare che l'equazione del piano affine che li contiene può essere scritta nella forma:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(12) Calcolare la distanza di $P_0 = (0, 0, 2)$ dalla retta $r : \begin{cases} x - y = 0, \\ z - 1 = 0. \end{cases}$

(13) Calcolare la distanza delle rette

$$r_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = \dfrac{2}{3} - t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2u, \\ y = 4u, \\ z = -2u, \quad u \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(14) Scrivere l'equazione del fascio di piani passanti per $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 2, 1)$.

(15) Usando il concetto di fascio di piani, determinare l'equazione del piano π' passante per $P_0 = (1, 1, -1)$, ortogonale al piano al piano $\pi : \ 2x - 3y + z - 1 = 0$ e parallelo alla retta $r : \ P(t) = (1 + 3t, 1 - t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(16) Nel fascio di piani di asse la retta $r : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 3 + t \\ z = 2t, \end{cases}$ determinare il piano π che risulta ortogonale al piano $\pi' : \ 3x - y + 8z - 1 = 0$. Determinare, inoltre, le equazioni cartesiane della retta r', proiezione ortogonale della retta r sul piano π'.

(17) Determinare i piani contenenti la retta $r: \begin{cases} 2x - 3z + 2 = 0 \\ y = 0, \end{cases}$ e che formano un angolo di $\pi/6$ col piano $\pi: x - z = 0$.

(18) In $\mathcal{E}^4$, si considerino i punti $A_1 = (1, 0, 1, -1)$, $A_2 = (0, 2, 2, 1)$ e l'iperpiano di equazione $x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 1 = 0$.

a) Determinare la distanza di A_2 dall'iperpiano dato.

b) Determinare l'equazione dell'iperpiano passante per A_1 e parallelo all'iperpiano dato.

(19) Provare che una retta affine in $\mathcal{E}^n$ di equazioni parametriche $x_i = q_i + k_i t$, $i = 1, \dots, n$, è perpendicolare all'iperpiano di equazione $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ se e solo se i vettori (non nulli) $(k_1, \dots, k_n)$ e $(a_1, \dots, a_n)$ sono proporzionali.

(20) Data una simmetria centrale $s_C : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ di centro $C \in \mathcal{E}^n$ dimostrare che:

a) s_C è una trasformazione involutoria, ovvero componendola con se stessa si ottiene la trasformazione identica;

b) s_C è una isometria con isomorfismo associato $-\mathrm{Id}_V$, dove V è la giacitura di $\mathcal{E}^n$;

c) Se S è un sottospazio affine di $\mathcal{E}$, allora[1] il suo simmetrico $S' := s_C(S)$ è parallelo a S. Inoltre, $S = S'$ se e solo se $C \in S$.

(21) In $\mathcal{E}^3$ determinare le equazioni parametriche e cartesiane del piano π' simmetrico del piano $\pi: x - 2z + 7 = 0$ rispetto alla simmetria centrale di centro $C = (1, 0, 2)$.

(22) In $\mathcal{E}^4$ si consideri l'iperpiano $S_1 : x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 8$ e il piano

$$\pi : \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Provare che π è propriamente parallelo a S_1. Determinare, inoltre, il piano $\pi' := s_C(\pi)$, dove s_C è la simmetria centrale di centro $C = (0, 1, 0, 0)$.

[1] Suggerimento: Provare che se $S = Q + W$, allora $S' = s_C(Q) + W$.