SPAZI AFFINI

(1) Si consideri lo spazio affine standard $\mathbb{R}^3$ munito del riferimento $S' = (O', \mathcal{B}')$, con $O' = (1, -3, 5)$ e $\mathcal{B}' = \{(1, -1, 0), (2, 2, 1), (1, 1, 1)\}$.
 a) Determinare le coordinate affini del punto $P = (7, 3, -4)$ nel riferimento S'.
 b) Determinare le equazioni del cambiamento di riferimento da S' al riferimento affine standard $S = (O, \mathcal{B})$.

(2) Sia V uno spazio vettoriale visto come spazio affine e $f : V \to W$ una applicazione lineare da V in un altro spazio vettoriale W. Dato $w \in f(V)$, mostrare che l'insieme $f^{-1}(w)$ è un sottospazio affine di V con giacitura $\operatorname{Ker} f$.

(3) Siano (A, V, π) uno spazio affine, $Q \in A$ e S un sottospazio affine m-dimensionale di A.
 a) Dimostrare che esiste un unico sottospazio affine m-dimensionale di A, passante per Q e parallelo ad S.
 b) Dimostrare che se $f \in \mathrm{Aff}(A)$, allora $f(S)$ è un sottospazio affine di A di dimensione m.

(4) Nello spazio affine $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_4 = 0\}$.
 a) Descrivere i punti di W e quelli del sottospazio affine $S = (4, 3, 2, 1) + W$. Determinare inoltre la dimensione di S.
 b) Dati $P_1 = (1, -3, 5, 0)$ e $P_2 = (0, -3, 5, 1)$. Dire se i sottospazi affini $P_1 + W$ e $P_2 + W$ coincidono.

(5) Nello spazio affine $\mathbb{R}^5$, si consideri il punto $Q = (1, 0, 1, 0, 1)$. Determinare equazioni cartesiane e parametriche:
 a) per la retta passante per il punto Q e avente vettore direttore $(0, 1, 2, 3, 4)$;
 b) per il sottospazio affine $S = Q + W$, dove $W = L((2, 1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 3, 2))$.

(6) Provare che lo spazio affine (A^n, V, π) è isomorfo allo spazio affine (V, V, π'), $\pi'(u, v) = v - u$.

(7) Dire per quali valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ le seguenti equazioni rappresentano: i) una affinità; ii) una isometria:

$$\begin{cases} x' = 2hx - ky + 5 \\ y' = 4x - ky - 3. \end{cases}$$

(8) Dire se esiste una affinità $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(P_i) = Q_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, dove $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (1, 0, 0)$, $P_3 = (1, 0, 3)$, $P_4 = (0, 1, 0)$, $Q_1 = (1, 1, 0)$, $Q_2 = (1, 1, 1)$, $Q_3 = (1, -2, 1)$ e $Q_4 = (0, 1, 0)$. In caso affermativo, descriverla e dire se si tratta di una isometria.

(9) Considerare i sottospazi affini di $\mathbb{R}^4$ dati da:

$$S_1 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_3 + 3x_4 = 0, \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Determinare $S_1 \cap S_2$, la sua dimensione e la sua giacitura.