SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI

(1) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo.

a) Provare che se $v_1, \dots, v_k \in V$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali, allora sono linearmente indipendenti.

b) Provare che sussistono le seguenti identità, per ogni $u, v \in V$:

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2), \qquad ||u+v||^2 - ||u-v||^2 = 4\langle u, v\rangle.$$

c) Dimostrare la seguente disuguaglianza:

$$\big|||u|| - ||v||\big| \leq ||u+v||, \qquad u, v \in V.$$

d) Sia $\dim(V) = n$ e $\{e_1, \dots e_n\}$ una base ortonormale. Dato $v \in V$, provare che

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i, \qquad ||v||^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle^2.$$

e) Provare il Teorema di Carnot:

$$\|u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u||\,\|v\| \cos\theta,$$

dove θ è l'angolo tra i vettori non nulli $u, v \in V$.

(2) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e W_i, $i = 1, 2$, due sottospazi vettoriali. Verificare che:

a) $W_1^\perp$ è un sottospazio di V;

b) Se $W_1 \subseteq W_2$, allora $W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$;

c) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$;

d) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

(3) Siano $e_1, \dots, e_k \in V$ vettori non nulli a due a due ortogonali di uno spazio vettoriale euclideo $(V^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ e $v \in V$. Posto $a_i := \langle v, e_i\rangle, i = 1, \dots k$, provare che:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^2}{||e_i||^2} \leq \langle v, v\rangle.$$

(4) Sia $T : (V^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_V) \to (W^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ una applicazione lineare tra due spazi vettoriali euclidei. Provare che T è una trasformazione ortogonale se e solo se manda una base ortonormale di V in una base ortonormale di W.

(5) Sia $T : (V^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_V) \to (W^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ una applicazione tra due spazi vettoriali euclidei.

a) Provare che T preserva il prodotto scalare se e solo se T preserva la norma e vale

$$||T(u) - T(v)|| = ||u - v||, \qquad u, v \in V.$$

b) Provare che T è una trasformazione ortogonale se e solo se $T(0) = 0$ e

$$||T(u) - T(v)|| = ||u - v||, \qquad u, v \in V.$$

c) Provare che T è una trasformazione ortogonale se e solo se T è lineare e $||T(v)|| = ||v||$, per ogni $v \in V$. (Fatto a lezione).

(6) Si consideri $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

a) Applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt ai vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ per ottenere una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale rispetto al prodotto scalare dato.

b) Determinare una base per $L(v)^\perp$, dove $v = (1, 0, 2)$.

c) Si determini, se esiste, il valore $k \in \mathbb{R}$ affinché il vettore $w = (0, 1, k - 3)$ appartenga a $V^\perp$, dove $V = L((5, 0, 0), (-1, 3, 2))$.

(7) Si consideri $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard.

a) Determinare i valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ per i quali i sottospazi

$$V_1 = L((1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1))$$

e $V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + 3y + z - ht = 0, x + z + (h - k)t = 0\}$ sono ortogonali.

b) Determinare una base ortonormale del sottospazio

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + 2y - z - 2t = 0\}.$$

c) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $v = (1, 1, 0, 1)$ su W e $W^\perp$.

d) Calcolare le distanze $d(v, W)$ e $d(v, W^\perp)$.

(8) a) Provare che

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \qquad f, g \in V,$$

definisce un prodotto scalare (detto standard) nello spazio vettoriale $V = C([a,b],\mathbb{R})$.

b) Si usi la disuguaglianza di Schwarz nello spazio euclideo $C([0,1],\mathbb{R})$ per ottenere una stima dell'integrale
$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx.$$

c) Nello spazio vettoriale euclideo $C([0,1],\mathbb{R})$ applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt ai polinomi $v_1(x) = 1$, $v_2(x) = x$ e $v_3(x) = x^2$.

(9) Si consideri lo spazio $C([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ munito del prodotto scalare standard.

a) Provare che le seguenti funzioni sono ortogonali:
$$1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \ldots \cos(nx), \sin(nx).$$

b) Tra tutti gli elementi del sottospazio $W = L(1, \cos x, \sin x)$ determinare quello che meglio approssima la funzione $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi,\pi]$.

(10) Si consideri $\mathbb{R}_2[x]$ munito del prodotto scalare
$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$

a) Dati $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, esprimere $\langle p(x), q(x)\rangle$ in funzione dei coeficienti a_i, b_i, $i = 0,1,2$.

b) Determinare il coseno dell'angolo tra i polinomi $p(x) = \sqrt{2}(x-1)$ e $q(x) = -x^2 + x$.

(11) a) Si consideri lo spazio vettoriale $M_{n,m}(\mathbb{R})$. Date $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, provare che
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^tA)$$
definisce un prodotto scalare detto *stardard* poiché (si verifichi) coincide col prodotto scalare standard dei vettori $a = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nm}), b = (b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{nm}) \in \mathbb{R}^{nm}$.

b) In $M_2(\mathbb{R})$ munito del prodotto scalare standard si calcoli l'angolo formato dai vettori
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

(12) a) Sia $(V^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e $T : V \to V$ una trasformazione ortogonale. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di T, allora $\lambda = \pm 1$.

b) Dire se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (y, -x)$, è una trasformazione ortogonale. Quali sono i suoi autovalori?