FORME BILINEARI E FORME QUADRATICHE

(1) Sia V^n uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Consideriamo:

$$\mathrm{B}(V,\mathbb{K}) = \{\Phi : V \times V \to \mathbb{K} \ : \ \Phi \text{ è una forma bilineare}\}$$

$$\mathrm{B}_s(V,\mathbb{K}) = \{\Phi : V \times V \to \mathbb{K} \ : \ \Phi \text{ è una forma bilineare simmetrica}\}$$

$$\mathrm{B}_a(V,\mathbb{K}) = \{\Phi : V \times V \to \mathbb{K} \ : \ \Phi \text{ è una forma bilineare antisimmetrica}\}.$$

a) Data una forma bilineare $\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$, provare que $\Phi_s(u,v) = \Phi(u,v) + \Phi(v,u)$ (rispettivamente, $\Phi_a(u,v) = \Phi(u,v) - \Phi(v,u)$) è una forma bilineare simmetrica (rispettivamente, antisimmetrica) su V.

b) Si dimostri che $\mathrm{B}(V,\mathbb{K})$ rispetto alle operazioni così definite:

$$(\Phi_1 + \Phi_2)(u,v) = \Phi_1(u,v) + \Phi_2(u,v), \qquad (\lambda\Phi_1)(u,v) = \lambda\Phi_1(u,v),$$

dove $\lambda \in \mathbb{K}, \Phi_1, \Phi_2 \in \mathrm{B}(V,\mathbb{K})$, è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$.

c) Fissata una base $\mathcal{B}$ di V, provare che

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{B}(V,\mathbb{K}) &\to \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ \Phi &\mapsto M_{\mathcal{B}}(\Phi) \end{aligned}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.

d) Provare che $\mathrm{B}_a(V,\mathbb{K})$ e $\mathrm{B}_s(V,\mathbb{K})$ sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{B}(V,\mathbb{K})$ e che $\mathrm{B}(V,\mathbb{K}) = \mathrm{B}_a(V,\mathbb{K}) \oplus \mathrm{B}_s(V,\mathbb{K})$.

e) Determinare le dimensioni degli spazi vettoriali $\mathrm{B}(V,\mathbb{K})$, $\mathrm{B}_a(V,\mathbb{K})$ e $\mathrm{B}_s(V,\mathbb{K})$.

(2) Provare che le seguenti applicazioni sono forme bilineari e determinare la matrice associata rispetto alla base canonica dello spazio vettoriale su cui sono definite.

a) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)$.

b) $\Phi : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\Phi(A,B) = \mathrm{tr}(AB^t - BA^t)$.

c) $\Phi : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\Phi(A,B) = \mathrm{tr}(ACB)$, dove $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\Phi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$, $\Phi(p(x),q(x)) = p(2)q(2)$.

e) Dire se le precedenti forme bilineari sono simmetriche o antisimmetriche.

(3) Quali delle seguenti applicazioni sono forme bilineari?

a) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = 7$.

b) $\Phi : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\Phi(A, B) = \det(A + B)$.

c) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = |\sum_{i=1}^n x_i y_i|$.

d) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = e^{x_1 y_3} + x_2 y_2$.

(4) Si consideri al variare di $k \in \mathbb{R}$ la forma bilineare $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x, y) = x_1 y_1 + x_4 y_4 + x_3 y_1 + x_1 y_3 + k(x_4 y_2 + x_2 y_4).$$

a) Determinare (se esistono) i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la forma bilineare è simmetrica (rispettivamente, antisimmetrica).

b) Determinare il rango di Φ al variare di k.

c) Determinare (se esistono) valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la forma bilineare è non degenere.

(5) Una forma bilineare $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ha come matrice associata rispetto alla base

$$\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1), (1, -1, 1), (1, -1, 0)\}$$

la matrice

$$M_{\mathcal{B}'}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Usare $M_{\mathcal{B}'}(\Phi)$ per calcolare $\Phi((1, -1, 0), (1, 0, -2))$ e $\Phi((1, 1, 1), (1, 1, 1))$.

b) Determinare $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$, dove $\mathcal{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

c) Determinare $\Phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$, per due generici vettori $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ di $\mathbb{R}^3$.

(6) Sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare, se esiste, una forma bilineare simmetrica $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\Phi(e_i, e_i) = 1$, $i = 1, 2, 3$ e tale che i vettori $e_1 + e_2$, $e_1 + e_3$, $e_2 + e_3$ sono isotropi.

(7) Sia $\Phi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$, $\Phi(p(x), q(x)) = p(1)q(2)$.

a) Provare che Φ è una forma bilineare e determinare $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$, dove $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Determinare il rango ρ di Φ.

c) Determinare $M_{\mathcal{B}'}(\Phi)$, dove $\mathcal{B}' = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$

(8) Sia $\Phi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$, $\Phi(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

a) Provare che Φ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Determinare $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$, dove $\mathcal{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}_2[x]$.

(9) Per ciascuna delle forme quadratiche su $\mathbb{R}^3$ seguenti calcolare la matrice $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ associata alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e la forma bilineare polare.

a) $Q(x, y, z) = xy + xz + yz$.

b) $Q(x, y, z) = -x^2 - 4xy + 3y^2 + 5z^2$.

c) $Q(x, y, z) = xy + 7y^2 + 4z^2 + 2xz - 8yz$.

d) $Q(x, y, z) = 2yx - 2yz$.

(10) a) Diagonalizzare, usando il metodo del completamento del quadrato, le forme quadratiche dell'esercizio precedente determinando il relativo cambiamento di coordinate e la base diagonalizzante $\mathcal{B}'$.

b) Esprimere $M_{\mathcal{B}'}(\Phi) = C^t M_{\mathcal{B}}(\Phi) C$, con $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

c) Determinare il rango e la segnatura delle forme quadratiche (dell'esercizio precedente).

d) Dire se le forme quadratiche sono indefinite, definite positive, definite negative, semidefinite positive o semidefinite negative.

(11) Si scriva in forma canonica la seguente forma quadratica su $\mathbb{R}^4$:

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_3^2 - x_1x_3 + x_3x_4 + x_1x_2$$

e si trovi la matrice del cambiamento di base effettuato per portarla in forma canonica. Se ne calcoli poi il rango e la segnatura, e si determini se è indefinita, definita positiva, definita negativa, semidefinita positiva o semidefinita negativa.