SPAZIO DUALE

(1) Siano V^n un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una sua base e $\mathcal{B}^* = \{\eta_1, \dots \eta_n\}$ la base duale. Dati $v \in V$ e $F \in V^*$, verificare che:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(v)\, e_i, \qquad F = \sum_{i=1}^{n} F(e_i)\, \eta_i,$$

ovvero

$$v_{\mathcal{B}} = (\eta_1(v), \dots, \eta_n(v)), \qquad F_{\mathcal{B}^*} = (F(e_1), \dots, F(e_n)).$$

(2) Sia V uno spazio vettoriale, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una sua base e $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*\}$ la base duale. Se $F = -3v_1^* + 7v_3^* - v_4^*$, determinare $F(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4)$.

(3) Siano

$$v_1 = (1, -1, 2), \qquad v_2 = (1, 2, -1), \qquad v_3 = (1, -1, 1).$$

a) Provare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare la base duale $\mathcal{B}^*$.

c) Sia $F \in V^*$, data da $F(x, y, z) = 2x - y + z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcolare $F_{\mathcal{B}^*}$ (ovvero le coordinate di F nella base $\mathcal{B}^*$).

(4) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita e $v \in V$. Provare che se $F(v) = 0$ per ogni $F \in V^*$, allora $v = 0$.

(5) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita e $\mathcal{C}$ una base di V^*. Dimostrare[1] che esiste una (unica) base $\mathcal{B}$ di V tale che $\mathcal{B}^* = \mathcal{C}$.

(6) Siano date $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, con

$$f_1(x, y, z) = 2x - y, \qquad f_2(x, y, z) = x + y + z, \qquad f_3(x, y, z) = 2y + z.$$

a) Provare che $f_i \in (\mathbb{R}^3)^*$, $i = 1, 2, 3$, e che formano una base di $(\mathbb{R}^3)^*$.

b) Determinare $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ base di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3\}$.

(7) Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 e $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ la sua base canonica. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, considerare la funzione (detta k-valutazione):

$$\nu_{x_0}^k : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R},$$
$$p(x) \mapsto p^{(k)}(x_0),$$

[1]**Suggerimento:** Si consideri la base duale $\mathcal{C}^*$ del biduale V^{**} e si faccia uso dell'isomorfismo canonico $\phi : V \to V^{**}$.

dove $p^{(k)}$ indica la k-esima derivata del polinomio p.

a) Provare che $\nu_{x_0}^k$ appartiene allo spazio vettoriale duale di $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Provare che la base duale di $\mathcal{B}$ è

$$\mathcal{B}^* = \Big\{\nu_0, \nu_0^1, \frac{\nu_0^2}{2}\Big\}.$$

c) Determinare le coordinate del funzionale lineare

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}_2[x] &\to \mathbb{R}\\ p(x) &\mapsto \int_0^1 p(x)\,dx,\end{aligned}$$

nella base $\mathcal{B}^*$.

(8) Si consideri $V = \mathbb{R}_2[x]$ munito della base $\mathcal{B} = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ e sia $\mathcal{B}^* = \{\eta_0, \eta_1, \eta_2\}$ la base duale di V^*. Determinare $\eta_0(3+5x+2x^2)$, $\eta_1(2+2x)$ e $\eta_2(x^2)$.

(9) Si consideri $V = \mathbb{R}_3[x]$ munito della base canonica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Provare che

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}_3[x] &\to \mathbb{R}\\ p(x) &\mapsto p(2),\end{aligned}$$

è un vettore di V^* e si scriva come combinazione lineare dei vettori della base duale $\mathcal{B}^*$.

(10) Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[x]$.

a) Dato $k \in \mathbb{R}$, provare che

$$\begin{aligned}\phi_k : \mathbb{R}_2[x] &\to \mathbb{R}\\ p(x) &\mapsto \int_0^k p(x)\,dx,\end{aligned}$$

appartiene allo spazio vettoriale duale di $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ tre numeri tutti diversi tra loro. Provare che $\{\phi_a, \phi_b, \phi_c\}$ è una base dello spazio duale V^*.

(11) Si consideri $V = \mathbb{R}_2[x]$ e $\phi_i \in V^*$, $i = 1, 2, 3$, i funzionali lineari dati da

$$\phi_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx, \qquad \phi_2(p(x)) = p'(1), \qquad \phi_3(p(x)) = p(0).$$

a) Provare che $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ è una base di V^*.

b) Determinare la base $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ di V la cui base duale $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.