DIAGONALIZZAZIONE DI UN ENDOMORFISMO

(1) Sia $f \in \mathrm{End}(V^n)$ un endomorfismo e λ_i, $i = 1, \dots, k$, gli autovalori distinti di f. Rivedere la dimostrazione delle seguenti affermazioni:

a) Se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, allora essi sono linearmente indipendenti.

b) La somma degli autospazi V_{λ_i}, $i = 1, \dots, k$, è diretta.

c) Se $\mathcal{B}_i$ è una base di V_{λ_i}, $i = 1, \dots, k$, allora $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ è una base dello spazio $\oplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$.

d) L'endomorfismo f è diagonalizzabile se e solo se $\sum_{i=1}^k \mathrm{mg}(\lambda_i) = n$, dove $\mathrm{mg}(\lambda_i)$ rappresenta la molteplicità geometrica di λ_i.

(2) a) Sia $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Provare che A è diagonalizzabile.

b) Provare che la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

(3) a) Sia $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ una matrice tale que $\det(A) < 0$. Provare che A è diagonalizzabile.

b) Sia $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ una matrice tale que $A^2 = 2\, I_2$. Provare che A è diagonalizzabile.

(4) Per ciascuna delle seguenti matrici determinare (se possibile) una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $P^{-1}AP = D$.

$$i)\, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad ii)\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad iii)\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(5) Determinare i valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ per i quali è diagonalizzabile la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & h^2 & k \\ 0 & k^2 & 0 \\ k & h & k \end{pmatrix}.$$

(6) Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ il cui polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + k^2\, \lambda, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

a) Esistono valori $k \in \mathbb{R}$ per i quali f è un automorfismo?

b) Per quali valori $k \in \mathbb{R}$ si ha che f è diagonalizzabile?

(7) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ tale che

$$f(1) = x^2, \qquad f(x) = x^2 + x - 1, \qquad f(x^2) = x^2.$$

a) Determinare autovalori e autospazi di f.

b) Stabilire se f è un automorfismo e se f è diagonalizzabile.