# QUADRICHE

(1) Data una quadrica $\mathcal{Q}$ dello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ (a punti reali e non degenere), provare che $\mathcal{Q}$ è una superficie di rotazione se e solo se la matrice $B$ della forma quadratica associata ha almeno due autovalori uguali diversi da zero.

(2) Si consideri la quadrica

$$\mathcal{Q}: \quad x^2 + y^2 - z^2 + 2x + 2y - 4z - 1 = 0.$$

a) Stabilire se $\mathcal{Q}$ è una quadrica a centro e se è di rotazione. In questo caso, determinare l'asse di rotazione.

b) Ridurre la quadrica in forma canonica, determinando l'equazione degli eventuali assi di simmetria.

c) Determinare il cambio di coordinate che porta la quadrica in forma canonica.

(3) Stabilire se esiste una rototraslazione che porta $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{Q}'$:

$$\mathcal{Q}: \ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xz - z = 0, \qquad \mathcal{Q}': \ 4y^2 + 2z^2 + \sqrt{2}\,x - y = 0.$$

(4) Si consideri la famiglia di quadriche

$$\mathcal{Q}(k): \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 + k\,(2x^2 + 2yz - z - 1) = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

a) Per quali $k$ la quadrica è un paraboloide iperbolico e per quali un paraboloide ellitico?

b) Determinare per quali $k$ la quadrica è di rotazione e ridurre tali quadriche in forma canonica.

(5) Si consideri la quadrica

$$\mathcal{Q}: \quad 5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy - 4xz + 4yz - 2x + 2y + 8z + 1 = 0.$$

a) Calcolare gli invarianti e classificare la quadrica.

b) Determinare una forma canonica di $\mathcal{Q}$ e il cambio di coordinate che riduce $\mathcal{Q}$ in tale forma canonica.

(6) Si considerino le quadriche

$$\mathcal{Q}_1: \quad x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xy + 2z - 1 = 0,$$

$$\mathcal{Q}_2: \quad 5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 6xz - 8 = 0.$$

a) Verificare che le quadriche hanno un centro di simmetria e calcolarne le coordinate.

b) Verificare che le quadriche hanno tre assi di simmetria distinti e determinarli.

c) Determinare le equazioni dei piani di simmetria delle quadriche.

d) Determinare una forma canonica delle quadriche e il relativo sistema di riferimento cartesiano.

e) Quali delle due quadriche è di rotazione? Qual'è l'asse di rotazione?

(7) Si consideri le quadrica

$$\mathcal{Q}: \quad x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2x + 2y + 2z = 0.$$

a) Calcolare gli invarianti, il rango e classificare la quadrica.

b) Verificare che $\mathcal{Q}$ si spezza in due piani incidenti.

(8) Si consideri le quadrica

$$\mathcal{Q}: \quad y^2 + 4z^2 - 2xz = 0.$$

a) Stabilire se la quadrica è o no degenere e classificarla.

b) Ridurre $\mathcal{Q}$ in forma canonica.

c) L'intersezione di $\mathcal{Q}$ col piano $\pi$ di equazione $y = 2$ è una conica del piano $\pi$. Di che conica si tratta?