



CONICHE

(1) Si consideri il fascio di coniche

$$\mathcal{C}(k) : kx^2 + 2y^2 - 2kxy - 4kx + 8y = 0.$$

- Verificare che il punto $C = (0, -2)$ è un centro per tutte le coniche del fascio.
- È possibile che qualche conica $\mathcal{C}(k)$ sia:
 - un punto?
 - una coppia di rette parallele?
 - una coppia di rette incidenti?
 - una parabola?

Se non è possibile, spiegare perché; se è possibile, dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ ciò avviene.

- Determinare per quali valori di k si hanno ellissi reali e per quali iperboli.

(2) Provare che la conica

$$3x^2 + 3y^2 + 10xy + 2x + 14y + 3 = 0$$

è una iperbole e determinare la distanza tra i vertici.

(3) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Scrivere l'equazione cartesiana della conica ad essa associata.
- Calcolare gli invarianti e classificare la conica.
- Determinare il cambio di coordinate che porta la conica in forma canonica e l'equazione degli eventuali assi di simmetria.

(4) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Scrivere l'equazione cartesiana della conica ad essa associata.
- Calcolare gli invarianti e provare che si tratta di una parabola non degenere.
- Determinare la forma canonica della conica, l'equazione dell'asse di simmetria e le coordinate del vertice.
- Determinare il cambio di coordinate che porta la conica in forma canonica.



- (5) a) Classificare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la famiglia di coniche:

$$\mathcal{C}(k) : x^2 + 2y^2 + 2kxy - 2kx - 2y + 1 = 0.$$

- b) Per quali valori di k la conica $\mathcal{C}(k)$ si spezza in due rette complesse incidenti? Quali sono le equazioni di tali rette?
- c) Determinare l'equazione della conica che passa per il punto $P = (1, -1)$.
- (6) Nel piano euclideo con riferimento cartesiano Oxy è data la parabola \mathcal{C} passante per il punto $P = (0, 2)$, avente vertice $V = (-2, 2)$ e asse parallelo al vettore $i + j$.
- a) Determinare una forma canonica di \mathcal{C} .
- b) Determinare il cambio di coordinate che riduce \mathcal{C} in tale forma canonica.
- c) Scrivere l'equazione cartesiana della conica nel riferimento Oxy .
- (7) Nel piano euclideo, con riferimento cartesiano Oxy , si considerino le rette

$$r_1 : x + 3y - 1 = 0, \quad r_2 : 3x + y - 3 = 0.$$

- a) Determinare la famiglia di iperboli non degeneri aventi tali rette come asintoti.
- b) Ridurre in forma canonica l'iperbole \mathcal{C} passante per l'origine O .
- c) Scrivere le equazioni di una rototraslazione che porta \mathcal{C} in forma canonica.
- (8) Determinare l'equazione cartesiana della ellisse di semiassi $a = 2$, $b = 1$, di centro $C = (1, 1)$ ed avente la retta di equazione $2x - y - 1 = 0$ come supporto dell'asse maggiore.