Corso di Idraulica 1 – prima parte
per allievi Ingegneri Civili Strutturisti e Ingegneri Civili Specialisti Ex Edili

Esercitazione n° 6 – A.A. 2008 – 2009

Il canale raffigurato in Figura 1, indefinito a monte e sbarrato a valle con uno stramazzo Francis (a contrazione laterale) di larghezza ℓ, è diviso in due tronchi: il primo a sezione circolare chiusa di diametro D, pendenza i_{f1} e scabrezza di Strickler k_{s1}; il secondo a sezione trapezia di larghezza b_0 alla base, sponde inclinate aventi scarpa m, pendenza i_{f2} e scabrezza di Strickler k_{s2}.

Si richiede di:

1) tracciare, per ciascun tronco, le curve (scale) delle sezioni, Ω, dei contorni bagnati, B, dei raggi idraulici, $\mathfrak{R}$, dei coefficienti di Chezy, χ, delle portate, Q, e delle velocità, U;
2) determinare la massima portata, Q_{max}, che può defluire in moto uniforme nella galleria;
3) determinare l'altezza del petto dello stramazzo Francis, h_p, affinché nel canale a sezione trapezia sia mantenuto il moto uniforme per la portata Q_{max};
4) determinare l'altezza del gradino, Δ, da realizzare nella sezione di passaggio fra i due tronchi, affinché la portata Q_{max} fluisca in moto uniforme anche nel primo tronco e l'innalzamento della superficie libera, δ, che si produce nel secondo tronco per effetto del cambio di sezione.

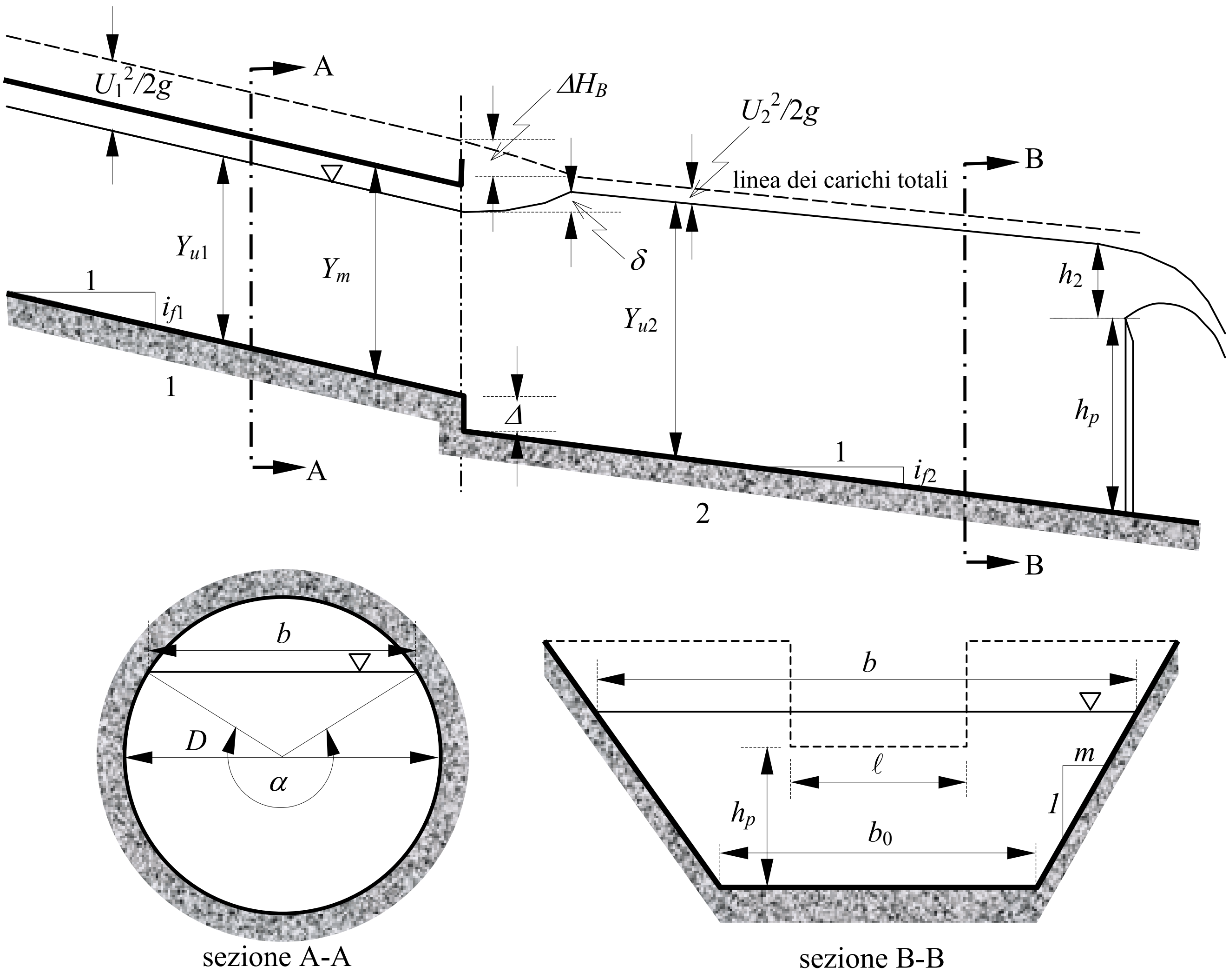

Figura 1. Sezione longitudinale e sezioni trasversali di un canale a pelo libero.

Dati:

- ℓ = 3.50 *m*;
- D = 2.50 *m*;
- m = 0.5;
- $k_{s1} = 75\ m^{1/3}s^{-1}$;
- $k_{s2} = 60\ m^{1/3}s^{-1}$;
- b_0 = 3.50 *m*;
- i_{f1} = 0.001;
- i_{f2} = 0.0001
- μ = 0.4

Avviamento alla soluzione

In una corrente in moto uniforme la linea dei carichi totali e la linea piezometrica sono rette parallele. Nel caso di una corrente a pelo libero la linea piezometrica è rappresentata dal profilo della superficie libera, per cui quest'ultimo deve risultare parallelo al profilo del fondo del canale nel caso di moto uniforme, dovendo essere costante anche l'area della sezione liquida. Dette j, i ed i_f rispettivamente la cadente dei carichi totali, la cadente piezometrica e la pendenza del fondo, in una corrente a pelo libero in moto uniforme risulta pertanto $j = i = i_f$. Tali condizioni di moto sono pertanto rappresentabili mediante l'equazione di Chezy, ove si ponga $j = i_f$:

$$i_f = \frac{U^2}{\chi^2 \Re} = \frac{Q^2}{\chi^2 \Re \Omega^2}\ , \tag{1}$$

nella il coefficiente di Chezy, χ, può esprimersi mediante la formula di Manning-Gauckler-Strickler:

$$\chi = k_s \Re^{1/6}\,. \tag{2}$$

Il tracciamento delle scale richieste dovrà effettuarsi per punti, preferibilmente con l'ausilio di un foglio di calcolo, per un numero di punti sufficiente a descrivere l'andamento delle grandezze indicate. Con riferimento allo schema di Figura 1, per quanto concerne la sezione circolare, le espressioni analitiche delle varie grandezze in funzione della profondità Y sono le seguenti:

$$b(Y) = D \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \tag{3}$$

$$\Omega(Y) = \frac{\alpha}{8}D^2 - \frac{1}{2}b\left(\frac{D}{2} - Y\right) = \frac{\alpha}{8}D^2 - \frac{D}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{D}{2} - Y\right) \tag{4}$$

$$\alpha(Y) = 2\arccos\left(\frac{D/2 - Y}{D/2}\right) \tag{5}$$

$$B(Y) = \frac{\alpha}{2}D \tag{6}$$

$$R_i(Y) = \frac{\Omega}{B} = \frac{D}{4} - \frac{1}{\alpha}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{D}{2} - Y\right) \tag{7}$$

$$\chi(Y) = k_s R_i^{1/6} = k_s\left[\frac{D}{4} - \frac{1}{\alpha}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{D}{2} - Y\right)\right]^{1/6} \tag{8}$$

$$U(Y) = \chi\sqrt{R_i i_f} = k_s R_i^{2/3}\sqrt{i_f} = k_s\left[\frac{D}{4} - \frac{1}{\alpha}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{D}{2} - Y\right)\right]^{2/3}\sqrt{i_f} \tag{9}$$

$$Q(Y)=\Omega\chi\sqrt{R_i i_f}=k_s\left[\frac{\alpha}{8}D^2-\frac{D}{2}\left(\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{D}{2}-Y\right)\right]\left[\frac{D}{4}-\frac{1}{\alpha}\left(\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{D}{2}-Y\right)\right]^{2/3}\sqrt{i_f}\ . \quad (10)$$

Le corrispondenti scale per la sezione trapezia sono date dalle:

$$b(Y)=b_0+2\ Y\,m \quad (11)$$

$$\Omega(Y)=\frac{1}{2}(b_0+b)\ Y=(b_0+Y\,m)\ Y \quad (12)$$

$$B(Y)=b_0+2\sqrt{Y^2+(Ym)^2}=b_0+2\ Y\sqrt{1+m^2} \quad (13)$$

$$R_i(Y)=\frac{\Omega}{B}=\frac{(b_0+Y\,m)\ Y}{b_0+2\ Y\sqrt{1+m^2}} \quad (14)$$

$$\chi(Y)=k_s R_i^{1/6}=k_s\left[\frac{(b_0+Y\,m)\ Y}{b_0+2\ Y\sqrt{1+m^2}}\right]^{1/6} \quad (15)$$

$$U(Y)=\chi\sqrt{R_i i_f}=k_s R_i^{2/3}\sqrt{i_f}=k_s\left[\frac{(b_0+Y\,m)\ Y}{b_0+2\ Y\sqrt{1+m^2}}\right]^{2/3}\sqrt{i_f} \quad (16)$$

$$Q(Y)=\Omega\chi\sqrt{R_i i_f}=k_s\frac{\left[(b_0+Y\,m)\ Y\right]^{5/3}}{\left(b_0+2\ Y\sqrt{1+m^2}\right)^{2/3}}\sqrt{i_f}\ . \quad (17)$$

Il massimo valore di portata, Q_{max}, che può defluire nel canale a sezione circolare chiusa, ed il corrispondente valore di profondità, Y_{u1}, si deducono dal grafico corrispondente o mediante il solutore di un foglio di calcolo (la funzione "Risolutore" di Microsoft Excel™ esegue la determinazione di massimi e minimi di una funzione).

Tenendo in conto l'energia cinetica della corrente nel secondo tronco del canale, la legge di efflusso dello stramazzo Francis, deducibile dal teorema di Bernoulli, si scrive:

$$Q=\mu(\ell-0.2\ h'_2)\sqrt{2g}\left[h'^{3/2}_2-\left(U_2^{\,2}/2g\right)^{3/2}\right], \quad (18)$$

in cui $h'_2=h_2+U_2^{\,2}/2g$ è il carico dinamico sullo stramazzo ed h_2 il corrispondente carico statico. Il carico dinamico si ricava dalla (18) inserendovi il valore di portata massima, per tentativi, graficamente o mediante il solutore di un foglio di calcolo ("Risolutore" o "Ricerca obiettivo" in Microsoft Excel™ o "solve" in MathCad™). Dedotte la profondità, Y_{u2}, e la velocità, U_2, di moto uniforme nel secondo tronco, dalle scale delle portate e delle velocità in corrispondenza di tale valore di portata, il carico statico si ottiene dalla:

$$h_2=h'_2-U_2^{\,2}/2g\ . \quad (19)$$

Il valore dell'altezza del petto dello stramazzo necessaria affinché in tutto il secondo tronco (a meno di una zona di sviluppo limitato prossima allo stramazzo) si verifichi il deflusso della portata massima in condizioni di moto uniforme si deduce imponendo la condizione $Y_{u2}=h_p+h_2$, da cui:

$$h_p = Y_{u2} - h_2 \ . \tag{20}$$

Il deflusso della portata massima può realizzarsi in condizioni di moto uniforme anche nel primo tronco, realizzando un gradino nella sezione di passaggio fra i due tronchi. L'altezza del gradino, Δ, può determinarsi sulla base della condizione di congruenza (Figura 1):

$$\Delta + Y_{u1} + \frac{U_1^{\,2}}{2g} = Y_{u2} + \frac{U_2^{\,2}}{2g} + \Delta H_B \ , \tag{21}$$

in cui ΔH_B è la perdita di carico localizzata per brusco allargamento che si produce nel cambio di sezione, esprimibile, in via approssimata, mediante la legge di Borda:

$$\Delta H_B = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^{\,2}}{2g} \ , \tag{22}$$

nella quale devono essere inseriti i valori delle sezioni liquide nei due tronchi, estratte, ancora, dalle scale corrispondenti del moto uniforme.

La sopraelevazione della superficie libera che si produce per effetto del cambio di sezione è infine data da:

$$\delta = \frac{U_1^{\,2}}{2g} - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^{\,2}}{2g} - \frac{U_2^{\,2}}{2g} = \frac{U_1 U_2 - U_2^{\,2}}{g} \ . \tag{23}$$