

Corso di Idraulica 1 – prima parte
per allievi Ingegneri Civili Strutturisti e Ingegneri Civili Specialisti Ex Edili

Esercitazione n° 5 – A.A. 2008 – 2009

La pompa installata nella condotta in Figura 4, della quale sono assegnati il numero di giri, n , e le caratteristiche, $\Delta H(Q)$ e $W(Q)$, solleva la portata Q dal serbatoio A al serbatoio in pressione B, attraversando la condotta in acciaio AB. Assegnati la quota del piano dei carichi idrostatici nel serbatoio A, h_A , la quota dell'asse della condotta di aspirazione, z_a , l'indicazione del manometro metallico M, n_M , e la relativa quota, z_M , i diametri e le lunghezze dei diversi tronchi, l'indice di scabrezza, m , relativo alla formula di Kutter e la temperatura di esercizio, T , determinare:

- 1) la portata Q , le linee dei carichi totali e piezometrica, le prevalenze totale e manometrica e la potenza W in kW assorbita dal motore;
- 2) la portata Q' che la pompa solleverebbe, a parità di indicazione n_M qualora la condotta premente fosse costituita da tubi nuovi e il carico ΔH_v che dovrebbe essere assorbito dalla valvola V affinché la portata resti eguale a Q ;
- 3) nella situazione di tubi usati, verificare il funzionamento del sistema e calcolare la massima portata Q_M elevabile.

Dati:

- | | | |
|--|----------------------------|--|
| – $L_1 = 2,00 \text{ m}$; | – $DN_1 = 3''$; | – $m = 0,3 \text{ m}^{1/2}$ (tubi vecchi); |
| – $L_2 = 25,00 \text{ m}$; | – $DN_2 = 2''$; | – $m = 0,10 \text{ m}^{1/2}$ (tubi nuovi) |
| – $L_3 = 10,00 \text{ m}$; | – $DN_3 = 4''$; | – $n_M = 0,5 \text{ kp cm}^{-2}$ |
| – $L_4 = 10,00 \text{ m}$; | – $DN_4 = 3''$; | – $C_c = 0,61$ (imbocco) |
| – $h_A = 4,00 \text{ m}$; | – $z_M = 9,00 \text{ m}$; | – $T = 10^\circ\text{C}$ |
| – $\gamma(H_2O) = 9806 \text{ N m}^{-3}$; | – $z_a = 3,00 \text{ m}$; | |

Schema di soluzione

- 1) La perdita di carico continua in un tronco di tubazione cilindrico di lunghezza L vale $Y = JL$, essendo la cadente J legata alla portata dalla formula di Chezy:

$$J = \frac{Q^2}{\chi^2 \Omega^2 \mathcal{R}} \quad (1)$$

dove Ω è la sezione della tubazione, $\mathcal{R} = D/4$ il suo raggio idraulico e il coefficiente di Chezy, χ , è qui espresso dalla formula di Kutter:

$$\chi = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{\mathcal{R}}}} \quad (2)$$

Le perdite di carico localizzate si calcolano in funzione della portata con le seguenti formule:

- di imbocco:
$$\Delta H_i = 0,5 \frac{Q^2}{2g\Omega_1^2} ; \quad (3)$$

$$\text{- per brusco allargamento da } D_2 \text{ a } D_3: \Delta H_B = \left(\frac{1}{\Omega_2} - \frac{1}{\Omega_3} \right)^2 \frac{Q^2}{2g}; \quad (4)$$

$$\text{- per brusco restringimento da } D_3 \text{ a } D_1: \Delta H_r = \eta_r \frac{Q^2}{2g\Omega_1^2}; \quad (5)$$

$$\text{- di sbocco: } \Delta H_s = \frac{Q^2}{2g\Omega_1^2}. \quad (6)$$

Il coefficiente η_r si desume dalla Tabella 1 in funzione del rapporto fra le aree delle sezioni dei due tronchi (v. Manuale di Ingegneria Civile Cremonese, edizione 1981, Parte 1^a, pag. 208), eventualmente per interpolazione.

Tabella 1. Coefficiente di contrazione e coefficiente η_r della formula per il calcolo della perdita di carico localizzata per brusco restringimento.

Ω_v/Ω_m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
C_c	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,813	1,0
η_r	0,47	0,44	0,40	0,35	0,28	0,21	0,10	0

Per effetto delle condizioni al contorno e delle perdite di carico, in corrispondenza della pompa si deve produrre un differenziale di carico totale fra monte e valle detto *prevalenza totale* della pompa, indicato con il simbolo ΔH . Il corrispondente differenziale di carico piezometrico è detto *prevalenza manometrica*.

Nella Tabella 2, tratta da un catalogo commerciale, sono riportate le caratteristiche dimensionali, il peso ed il costo unitario aggiornato delle tubazioni del tipo in questione. In tale tabella, DN rappresenta il *diametro nominale*, soltanto indicativo della sezione del tubo ma, in generale, non coincidente con alcuno dei diametri geometrici (interno o esterno). I diametri interni da inserire nelle formule dovranno perciò ottenersi per differenza fra il diametro esterno (\emptyset esterno) ed il doppio dello spessore della tubazione, s :

$$D_i = \phi_{esterno} - 2s. \quad (7)$$

I vari calcoli dovranno effettuarsi previa espressione di tutte le grandezze in unità coerenti.

Tabella 2. Tubi in acciaio senza saldatura filettabili in FE330, a norma UNI 8863, zincati a caldo, marchiati a vernice con nome produttore, diametro e norme di riferimento, estremità filettate, fornitura in barre da 6 m.

DN (pollici)	\emptyset Esterno (mm)	Spessore (mm)	Peso (kg/m)	Prezzo (Euro/m)
1/2"	21,3	2,3	1,13	3,98
3/4"	26,9	2,3	1,45	4,65
1"	33,7	2,9	2,28	6,56
1" 1/4	42,4	2,9	2,92	8,01
1" 1/2	48,3	2,9	3,35	8,99
2"	60,3	3,2	4,63	12,09
2" 1/2	76,1	3,2	5,91	15,13
3"	88,9	3,6	7,76	19,88
4"	114,3	4,0	11,08	32,76

Sommando membro a membro le espressioni delle perdite di carico nei vari tratti, si ottiene la forma finita dell'equazione dell'energia per la corrente (costituente la estensione della legge di Bernoulli ad una corrente di un fluido viscoso):

$$H_A - H_B = 0,5 \frac{Q^2}{2g\Omega_1^2} + \frac{Q^2}{\chi_1^2 \Omega_1^2 \mathfrak{R}_1} L_1 - \Delta H + \frac{Q^2}{\chi_2^2 \Omega_2^2 \mathfrak{R}_2} L_2 + \left(\frac{1}{\Omega_2} - \frac{1}{\Omega_3} \right)^2 \frac{Q^2}{2g} +$$

$$+ \frac{Q^2}{\chi_3^2 \Omega_3^2 \mathfrak{R}_3} L_3 + \eta_r \frac{Q^2}{2g\Omega_4^2} + \frac{Q^2}{\chi_4^2 \Omega_4^2 \mathfrak{R}_4} L_4 + \frac{Q^2}{2g\Omega_4^2} \quad (8)$$

con:

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} \cong z_A + \frac{p_A}{\gamma} = h_A \quad (9)$$

$$H_B = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g} \cong h_B \quad (10)$$

avendo assunto che nella sezione terminale B l'energia cinetica sia stata integralmente persa, coerentemente con l'inclusione della perdita di sbocco (6) nel computo delle perdite di carico.

Mettendo in evidenza il quadrato della portata nell'espressione del teorema di Bernoulli, detta equazione si riscrive in una forma che esprime esplicitamente il legame tra la prevalenza totale richiesta e la portata corrispondente, detta *equazione caratteristica della condotta*:

$$\Delta H = h_B - h_A + KQ^2 \quad (11)$$

in cui il dislivello tra il piano dei carichi idrostatici del serbatoio B ed il pelo libero del serbatoio A, $h_B - h_A = \Delta H_G$ è detto *prevalenza geodetica*, mentre il coefficiente K è dato da:

$$K = \frac{1}{2g} \left[\frac{0,5}{\Omega_1^2} + \frac{2gL_1}{\chi_1^2 \Omega_1^2 \mathfrak{R}_1} + \frac{2gL_2}{\chi_2^2 \Omega_2^2 \mathfrak{R}_2} + \left(\frac{1}{\Omega_2} - \frac{1}{\Omega_3} \right)^2 + \frac{2gL_3}{\chi_3^2 \Omega_3^2 \mathfrak{R}_3} + \frac{\eta_r}{\Omega_4^2} + \frac{2gL_4}{\chi_4^2 \Omega_4^2 \mathfrak{R}_4} + \frac{1}{\Omega_4^2} \right] \quad (12)$$

La prevalenza geodetica è esprimibile tramite le indicazioni fornite nello schema della condotta.

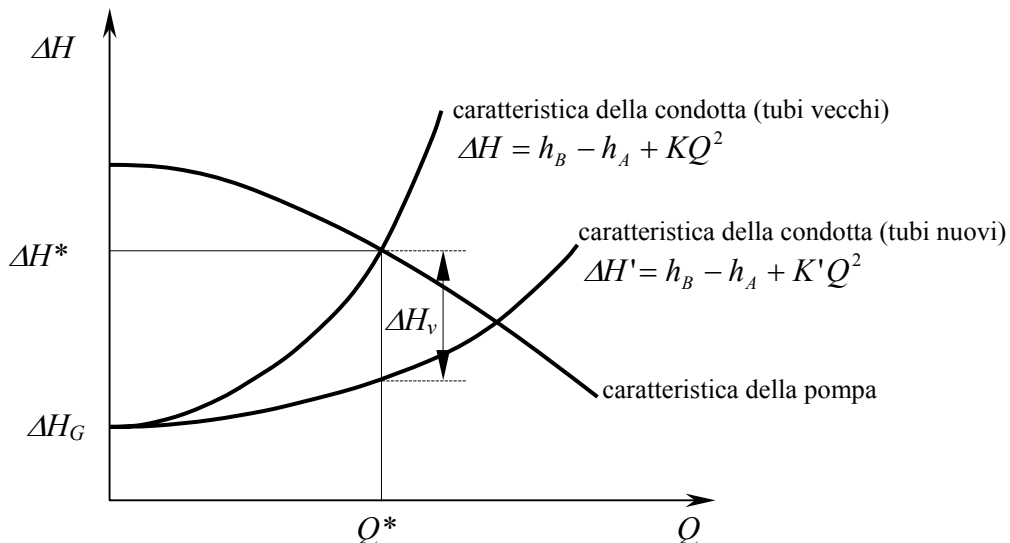


Figura 1. Determinazione del punto di funzionamento di un sistema pompa – condotta.

In particolare, ricordando che $1 \text{ kp cm}^{-2} = 9,806 \times 10^4 \text{ Nm}^{-2}$ è che il peso specifico dell'acqua è pari a $\gamma_{H_2O} = 9806 \text{ Nm}^{-3}$, l'altezza piezometrica in corrispondenza del manometro metallico è data da $p_M/\gamma = 10 n_M$. L'espressione della prevalenza geodetica può quindi scriversi in funzione della misura del manometro metallico come:

$$h_B - h_A = z_M + 10n_M - h_A \quad (13)$$

Le modalità di funzionamento della pompa sono descritte da una relazione fra prevalenza ΔH e portata Q determinata sperimentalmente dal costruttore, la cui rappresentazione grafica, riportata in Figura 3 per il caso in questione (sigla 32-125/11), è detta *curva caratteristica della pompa*. Tracciate sullo stesso diagramma le curve caratteristiche della tubazione e della pompa, l'ascissa del punto di intersezione misura la portata erogata Q e l'ordinata la corrispondente prevalenza totale ΔH della pompa, come riportato schematicamente in Figura 1. In corrispondenza dell'ascissa Q , sulla curva posta nella parte inferiore di Figura 3 si legge inoltre la potenza assorbita W in kW .

Determinate le perdite di carico continue e localizzate, nonché le altezze cinetiche relative alle diverse sezioni, si tracciano immediatamente le linee dei carichi totali e piezometrica.

La prevalenza manometrica, differenza tra le quote piezometriche delle sezioni a valle e a monte della pompa vale:

$$\Delta H_m = \left(z_v + \frac{p_v}{\gamma} \right) - \left(z_m + \frac{p_m}{\gamma} \right) = \left(H_v - \frac{U_2^2}{2g} \right) - \left(H_m - \frac{U_1^2}{2g} \right) = \Delta H - \left(\frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} \right). \quad (14)$$

2) La portata Q a tubi nuovi si calcola come nel punto 1). La nuova curva caratteristica della tubazione, $\Delta H = \Delta H_G + K'Q^2$, risulta sottostante a quella relativa a tubi vecchi per effetto di un valore del coefficiente $K' < K$, in relazione ai maggiori valori assunti dai coefficienti di Chezy χ relativi ai vari tratti della condotta.

La perdita di carico da produrre mediante una valvola, ΔH_v , è data dalla distanza tra le due caratteristiche della tubazione a tubi nuovi e a tubi usati misurata sull'ordinata passante per Q .

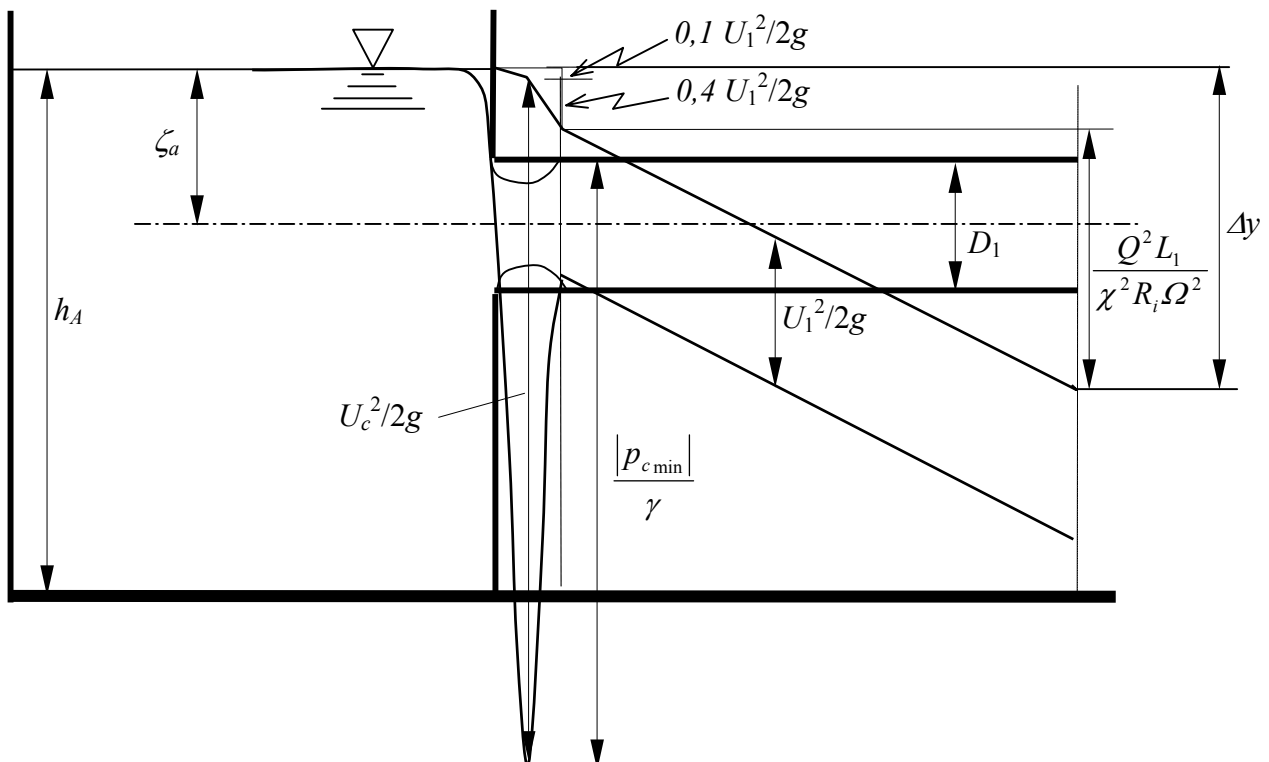


Figura 2. Dettaglio della linee dei carichi totali e piezometrica nella condotta di aspirazione.

3) L'effettiva possibilità di realizzare il passaggio di una data portata dipende dal regime delle pressioni che si stabiliscono nelle varie sezioni della condotta. La condotta a monte della pompa (*condotta di aspirazione*) può essere soggetta in vari punti a condizioni di depressione (Figura 2). In particolare, le sezioni critiche sono la sezione contratta in prossimità dell'imbocco e la sezione di ingresso della pompa. Più precisamente, per quanto riguarda la pompa, la sezione critica è quella posta all'imbocco della girante della macchina. Tuttavia, per motivi pratici, la verifica viene effettuata con riferimento alla sezione di collegamento con la condotta di mandata, come di seguito descritto. All'interno delle singole sezioni, il punto a pressione minima sarà quello posto alla quota massima: il punto di intradosso della condotta e dell'imbocco della pompa.

Detto $\zeta_a = h_A - z_a$ l'affondamento dell'asse della condotta rispetto alla superficie libera del serbatoio A , e ricordato che la prima parte della perdita di imbocco che si osserva nella sezione contratta è data, per l'imbocco a spigolo vivo, da $0,1 U_1^2/2g$, la massima depressione nella sezione contratta si calcola dalla relazione:

$$0,1 \frac{U_1^2}{2g} + \frac{U_c^2}{2g} = \zeta_a - \frac{D_1}{2} - \frac{p_{c_{min}}}{\gamma}, \quad (15)$$

in cui U_c rappresenta la velocità nella sezione contratta e $p_{c_{min}} < 0$ se la situazione è quella rappresentata in Figura 2. Il corrispondente valore dell'altezza piezometrica è quindi dato da:

$$\frac{p_{c_{min}}}{\gamma} = \zeta_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g}. \quad (16)$$

La pressione assoluta all'intradosso si ottiene dalla:

$$p_{c_{min}}^* = p_{atm}^* + p_{c_{min}}. \quad (17)$$

Il limite massimo al quale si può spingere la depressione corrisponde al raggiungimento di una pressione assoluta pari alla *tensione di vapore* (o *pressione di vapor saturo*), p_v^* , del liquido convogliato nelle particolari condizioni di funzionamento. Il superamento di tali condizioni limite comporta infatti l'instaurarsi di un processo di passaggio massivo del liquido in fase gassosa, del tutto identico all'ebollizione, detto *cavitazione* a causa della formazione di cavità gassose all'interno del liquido. L'alternò formarsi e richiudersi delle bolle gassose è causa di urti violenti sulle pareti della condotta e della pompa; particolarmente nocivi nei confronti degli organi mobili della macchina, che in tali condizioni viene messa fuori uso in breve tempo. Inoltre, la ridotta solubilità dell'aria alle basse pressioni determina una maggiore attività ossidante sulle parti metalliche per effetto della maggiore presenza di ossigeno libero.

Al fine di evitare la cavitazione, deve essere perciò strettamente verificata la condizione:

$$p_{c_{min}}^* + p_{atm}^* > p_v^* \quad (18)$$

In funzione dei dati del problema in questione, e considerando, cautelativamente, una pressione assoluta minima accettabile p_{acc}^* tale che $p_{acc}^*/\gamma = p_v^*/\gamma + 0,5m$, deve pertanto aversi:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + \zeta_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g} > \frac{p_{acc}^*}{\gamma}. \quad (19)$$

La tensione di vapore di un liquido dipende dalla sua temperatura, T . Il valore corrispondente alla temperatura di esercizio assegnata si deduce dalla Tabella 3. Ai fini del calcolo, si tenga presente che $1 atm = 1,033 kp cm^{-2} = 101'303 Pa$.

Tabella 3. Valori della tensione di vapore dell'acqua in funzione della temperatura.

$T (^{\circ}C)$	$p_v^* (atm)$	$T (^{\circ}C)$	$p_v^* (atm)$	$T (^{\circ}C)$	$p_v^* (atm)$
-25	$6,26 \times 10^{-4}$	10	$1,21 \times 10^{-2}$	90	$6,92 \times 10^{-1}$
-15	$1,63 \times 10^{-3}$	30	$4,19 \times 10^{-2}$	100	1,00
-5	$3,95 \times 10^{-3}$	50	$1,22 \times 10^{-1}$	150	4,70
0,01	$6,03 \times 10^{-3}$	70	$3,08 \times 10^{-1}$	200	39,24

Nella verifica della depressione massima per la pompa bisogna tenere conto del fatto che, rispetto alla sezione di entrata, la corrente è soggetta ad ulteriori cadute di pressione all'interno della macchina, sia per perdite di carico che per aumento della velocità fino all'ingresso nella girante. Oltre a ciò, la quota del punto critico all'ingresso della girante non coincide necessariamente con la quota dell'intradosso della condotta all'attacco con la pompa. La verifica della massima depressione va pertanto eseguita soltanto convenzionalmente con riferimento a tale punto della condotta, tenendo conto dei termini che concorrono a determinare la massima depressione attraverso una grandezza, funzione della portata, detta *NPSH* (*net positive suction head*: carico positivo netto di aspirazione) determinata anch'essa sperimentalmente e fornita dal costruttore in forma grafica.

Detta Δw la perdita di carico che interviene fra la sezione di ingresso della pompa e la sezione di ingresso della girante e raccogliendo tutte le perdite di carico in condotta in un termine:

$$\Delta y = 0,5 \frac{Q^2}{2g\Omega_1^2} + \frac{Q^2}{\chi_1^2 \Omega_1^2 R_1} L_1, \quad (20)$$

un'analisi simile a quella condotta per la sezione contratta all'imbocco consente di esprimere la pressione relativa minima (massima depressione) all'interno della macchina, nell'ipotesi che la quota del punto critico all'imbocco della girante coincida con la quota dell'intradosso della condotta all'ingresso della pompa:

$$\zeta_A - \frac{D_1}{2} - \frac{p_{m_{\min}}}{\gamma} = \Delta y + \frac{U_g^2}{2g} + \Delta w, \quad (21)$$

in cui U_g rappresenta la velocità all'ingresso della girante. La condizione per il funzionamento regolare della pompa è espressa pertanto dalla:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + \zeta_A - \frac{D_1}{2} - \Delta y - \frac{U_g^2}{2g} - \Delta w > \frac{p_v^*}{\gamma} \quad (22)$$

da cui:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + \zeta_A - \frac{D_1}{2} - \Delta y - \frac{p_v^*}{\gamma} > \frac{U_g^2}{2g} + \Delta w, \quad (23)$$

nella quale:

$$NPSH_R = \frac{U_g^2}{2g} + \Delta w \quad (24)$$

è il valore di *NPSH* minimo richiesto. L'andamento dell'*NPSH* in funzione della portata, caratteristico della singola pompa, è determinato sperimentalmente dal costruttore e rappresentato generalmente in forma grafica (vedi Figura 3). In generale, l'espressione fornita dal costruttore tiene conto anche di eventuali differenze di quota fra l'intradosso della sezione di ingresso della pompa e il punto critico all'ingresso della girante, di modo da poter comunque scrivere l'equazione di verifica come sopra riportata.

La grandezza:

$$NPSH_a = \frac{p_{atm}^*}{\gamma} + \zeta_A - \frac{D_1}{2} - \Delta y - \frac{p_v^*}{\gamma} \quad (25)$$

è il valore di $NPSH$ disponibile all'imbocco della pompa. In sostanza, la verifica viene fatta calcolando un $NPSH$ disponibile che dipende soltanto da termini noti (p_{atm}^*) o calcolabili in funzione delle condizioni di esercizio (p_v^*, γ) o delle caratteristiche della condotta ($\zeta_A, D_1, \Delta y$), e confrontandolo con il valore minimo ammissibile fornito dal costruttore (perché *non determinabile per via deduttiva*). Anche in questo caso, a titolo cautelativo, è buona norma maggiorare l' $NPSH$ richiesto di una quantità dell'ordine di $0,5 m$ di colonna d'acqua (il che equivale a considerare lo stesso $NPSH$ e, nella (25), $p_{acc}^*/\gamma = p_v^*/\gamma + 0,5m$ in luogo di p_v^*/γ , come in precedenza).

Il raggiungimento delle condizioni di pressione minima accettabile, p_{acc}^* , nella sezione contratta all'imbocco della condotta di aspirazione o all'interno della pompa, dipende dalla presenza delle perdite di carico. Tali condizioni definiscono perciò un valore massimo della portata che può essere convogliata dalla condotta in oggetto *indipendentemente dalla potenza della pompa*. Tale valore sarà dato dal minore dei due valori di portata che si ottengono, per ciascuna delle sezioni di controllo esaminate in precedenza, imponendo sulla sezione la pressione assoluta minima, p_{acc}^* .

Per la sezione contratta all'imbocco il valore della portata critica si ottiene pertanto imponendo il segno di uguaglianza nella equazione (22):

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + \zeta_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g} = \frac{p_{acc}^*}{\gamma} \quad (26)$$

da cui:

$$10,33 + \zeta_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{Q_{cr_i}^2}{2g\Omega_1^2} - \frac{Q_{cr_i}^2}{2g\Omega_1^2 C_c^2} = \frac{p_{acc}^*}{\gamma}, \quad (27)$$

nella quale sono stati introdotti il valore di colonna d'acqua corrispondente alla pressione atmosferica standard e il coefficiente di contrazione all'imbocco, C_c .

Si ottiene quindi il valore della portata critica per la sezione di imbocco:

$$Q_{cr_i} = \sqrt{\frac{10,33 + \zeta_a - \frac{D_1}{2} - \frac{p_{acc}^*}{\gamma}}{\frac{0,1}{2g\Omega_1^2} + \frac{1}{2g\Omega_1^2 C_c^2}}}. \quad (28)$$

Analogamente, per la sezione di controllo all'imbocco della pompa, in condizioni critiche si avrà:

$$NPSH_a(Q_{cr_a}) = \frac{p_{atm}^*}{\gamma} + \zeta_A - \frac{D_1}{2} - \Delta y(Q_{cr_a}) - \frac{p_{acc}^*}{\gamma} = \frac{U_g^2}{2g} + \Delta w = NPSH_R(Q_{cr_a}). \quad (29)$$

Da tale relazione si può dedurre il valore della portata critica corrispondente per via grafica tracciando, sul grafico del $NPSH_R$ fornito dal costruttore, la curva dell' $NPSH_a$ in funzione di Q , determinabile sulla base dei valori del primo membro della (29), che è una parabola. Il valore di portata del punto di intersezione delle due curve rappresenta il valore critico per l'aspirazione della pompa (peraltro, nel caso di Figura 3, la curva dell' $NPSH_R$ non si estende fino a tale punto).

In generale, la portata massima elevabile Q_M è la minore delle due portate critiche di cui sopra.

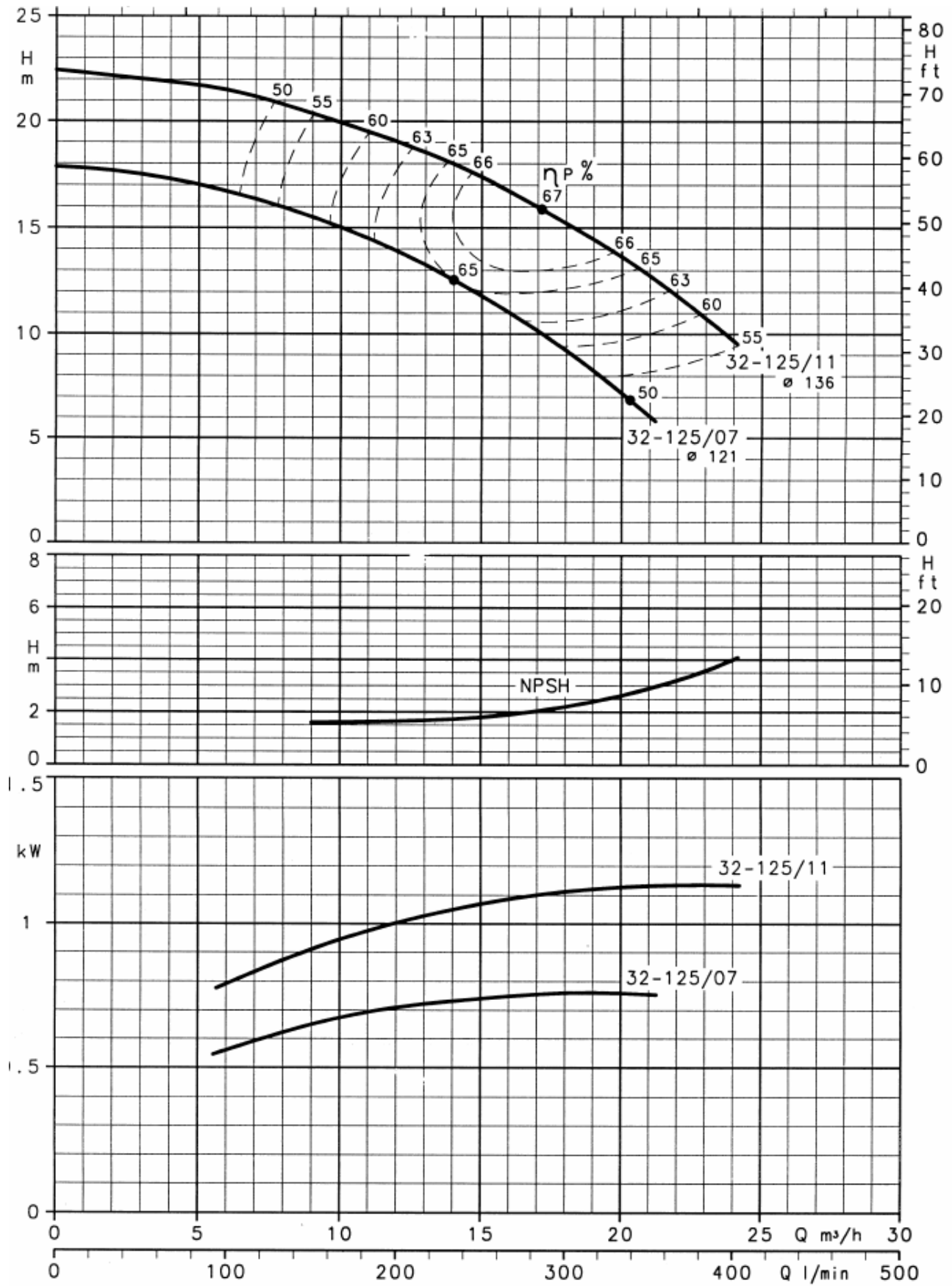


Figura 3. Curva caratteristica, della potenza assorbita e dell'NPSH_R in funzione della portata per una pompa centrifuga, a numero di giri costante (modello 32-125/11).

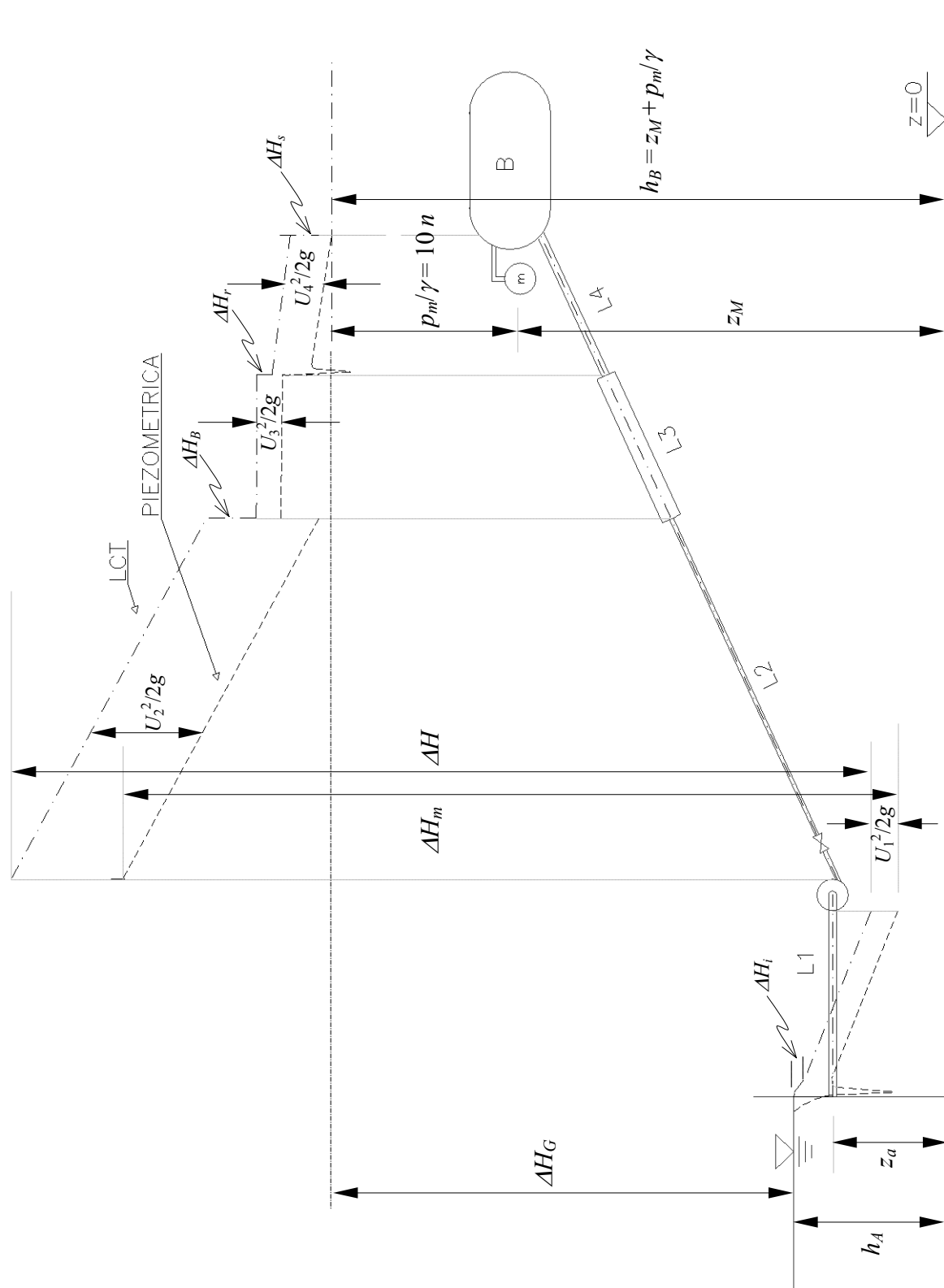


Figura 4. Schema di condotta in pressione con impianto di pompaggio.