Corso di Idraulica 1 – prima parte
per allievi Ingegneri Civili Strutturisti e Ingegneri Civili Specialisti Ex Edili

Esercitazione n° 1 – A.A. 2008 – 2009

I due serbatoi A e B in Figura 1, aventi larghezza comune pari a b, sono in comunicazione attraverso la luce di fondo aperta nel setto divisorio. Il primo, A, contiene acqua di peso specifico γ_a fino all'altezza h; il secondo contiene acqua fino all'altezza h_1 e, sopra ad esso, uno strato di spessore h_x di carburante di peso specifico γ_b.

1) Tracciare il diagramma delle pressioni relative e determinare compiutamente (in modulo, direzione, verso e punto di applicazione) la spinta $\vec{S}_1$ sulla parete (1);
2) Determinare h_x;
3) Tracciare il diagramma delle pressioni relative e determinare compiutamente la spinta $\vec{S}_2$ sulla parete (2);
4) Tracciare il diagramma delle pressioni relative e determinare compiutamente la spinta $\vec{S}_3$ sulla parete (3);
5) Determinare le indicazioni dei due manometri.

Dati:

– $\gamma_a = 9806\, N/m^3$;	– $h = 7{,}00\, m$;	– $\alpha = 30°$;
– $\gamma_b = 6900\, N/m^3$;	– $h_1 = 1{,}00\, m$;	– $b = 4.50\, m$;
– $\gamma_m = 132970\, N/m^3$.	– $z_M = 3{,}00\, m$;	

Schema di soluzione

1) Entro uno stesso liquido la pressione assoluta in un punto affondato di h sotto il pelo liquido supera la pressione atmosferica di γh costituente, per definizione, la pressione relativa in quel punto. Il corrispondente diagramma ha pertanto andamento lineare con la profondità. Il modulo della spinta (relativa), S_1, è dato dal volume del solido delle pressioni (costituito in questo caso da un prisma a sezione retta triangolare e larghezza b) ed è pertanto pari a:

$$S_1 = \frac{\gamma_a h}{2} \frac{h}{\cos\alpha} b \ . \qquad (1)$$

La spinta ha direzione normale alla superficie, così come, punto per punto, le forze elementari di pressione di cui essa costituisce la risultante. Essendo inoltre le pressioni ovunque positive, la spinta ha verso rivolto verso la superficie, che risulta quindi sollecitata a compressione. Poiché le forze di pressione agenti su una superficie piana costituiscono un sistema di forze parallele rappresentate dal solido delle pressioni, la risultante ammette come punto di applicazione il baricentro del solido stesso. Trattandosi di un prisma a sezione triangolare, detto baricentro è posto sulla sezione triangolare del solido fatta con il suo piano di simmetria, nel baricentro del triangolo: pertanto, alle distanze da ciascuno dei cateti pari ad un terzo dell'altro cateto. Poiché, inoltre, una forza può liberamente scorrere lungo la propria retta d'azione, essa può essere anche applicata a contatto con la superficie premuta, ad una distanza dal cateto della sezione retta rappresentativo delle pressioni pari ad un terzo della lunghezza del cateto rappresentativo del profilo della parete piana. In pratica risulta di interesse solo tale distanza.

2) Sulla superficie di separazione tra acqua e carburante l'acqua esercita la pressione $\gamma_a(h-h_1)$, il carburante la pressione $\gamma_b h_x$. Dovendo le due pressioni essere uguali, risulta:

$$h_x = (h - h_1)\frac{\gamma_a}{\gamma_b} \quad . \tag{2}$$

3) La pressione alla profondità h_x dal pelo libero del carburante è $\gamma_b h_x$ ed alla profondità h_x+h_1 dallo stesso pelo libero (ovvero alla profondità h dal pelo libero dell'acqua) è $\gamma_a h$. Il modulo della spinta, S_2, è dato dal volume del corrispondente solido delle pressioni, costituito in questo caso da un prisma a sezione retta composta da un triangolo, corrispondente alla distribuzione di pressione nel carburante, e da un trapezio, corrispondente alla distribuzione di pressione nell'acqua (a sua volta scomponibile in un rettangolo ed un triangolo). Si ha quindi:

$$S_2 = \frac{\gamma_b h_x}{2}\frac{h_x}{\cos\alpha}b + \frac{\gamma_b h_x + \gamma_a h}{2}\frac{h_1}{\cos\alpha}b \quad . \tag{3}$$

Anche in questo caso, la parete è sollecitata a compressione da una spinta risultante ad essa normale. Analogamente al punto (1), la risultante è applicabile nel baricentro del solido delle pressioni, la cui posizione sul piano di simmetria si determina dalla media ponderale delle coordinate dei baricentri delle figure elementari (triangoli e rettangoli) che compongono la sua sezione retta, con pesi dati dalle aree delle figure corrispondenti. Anche in questo caso, poiché la risultante può scorrere lungo la propria retta d'azione, in pratica interessa conoscere la distanza della retta d'azione dal fondo del serbatoio, misurata lungo il profilo della parete 2, pari alla distanza del baricentro della sezione retta del prisma dal lato della sezione corrispondente alla pressione al fondo del serbatoio. Detti pertanto $x_{Gb}=h_1/\cos\alpha+(h_x/\cos\alpha)/3$, $x_{Gar}=(h_1/\cos\alpha)/2$ e $x_{Gat}=(h_1/\cos\alpha)/3$ rispettivamente le distanze dei baricentri della distribuzione triangolare di pressione del carburante e delle figure rettangolare e triangolare nelle quali può essere scomposta la distribuzione trapezoidale di pressione dell'acqua, ed $A_b=\gamma_b h_x(h_x/\cos\alpha)/2$, $A_{ar}=\gamma_b h_x(h_1/\cos\alpha)$ e $A_{at}=\gamma_a h_1(h_1/\cos\alpha)/2$ le aree corrispondenti, la distanza della retta d'azione della risultante dal fondo del serbatoio si ottiene dalla:

$$x_G = \frac{x_{Gb}A_b + x_{Gar}A_{ar} + x_{Gat}A_{at}}{A_b + A_{ar} + A_{at}} \tag{4}$$

Si osservi che tale relazione non esprime altro che l'uguaglianza del momento risultante della distribuzione di forze di pressione e del momento della risultante $\vec{S}_2$, calcolati rispetto al punto P della parete inclinata posto al fondo del serbatoio, sul piano di simmetria del solido delle pressioni che contiene $\vec{S}_2$. Le aree delle figure che compongono il diagramma delle pressioni sono infatti proporzionali, secondo il fattore comune b, alle corrispondenti spinte parziali applicate nei baricentri delle figure, la cui somma vettoriale fornisce la risultante $\vec{S}_2$.

4) La spinta risultante sulla parete 3 è la somma vettoriale delle spinte agenti sulle facce destra e sinistra, esercitate rispettivamente dal carburante e dall'acqua, parallele e rivolte in verso opposto, pari in modulo ai rispettivi volumi dei solidi di spinta. Considerato che, nell'eseguire la somma algebrica di detti volumi, le parti soggiacenti al piano di separazione acqua-carburante sono uguali ed opposte, la valutazione del modulo della spinta risultante sulla parete può ottenersi dalla differenza dei volumi costituiti dai prismi a sezione retta triangolare aventi base posta alla quota di detto piano di separazione e vertice superiore alle quote del rispettivi peli liberi. Tale differenza è pari al volume del prisma avente per sezione retta il triangolo tratteggiato in Figura 1. Poiché, inoltre, la spinta esercitata dal carburante è superiore in modulo a quella esercitata dall'acqua, la spinta risultante è rivolta da destra verso sinistra ed il suo modulo si ottiene dalla:

$$S_3 = \frac{\gamma_b h_x^{\ 2}}{2} b - \frac{\gamma_a}{2}(h - h_1)^2 b \ . \tag{5}$$

La spinta risultante è contenuta nel piano di simmetria dei prismi di spinta dei due liquidi. La posizione della sua retta d'azione si ottiene imponendo l'uguaglianza del momento della spinta risultante e del momento risultante delle due spinte esercitate individualmente dai due liquidi, calcolati rispetto al punto Q intersezione del piano contenente il setto, del piano di simmetria dei prismi di spinta e del piano di separazione acqua-carburante. Ragionando, come al punto precedente, in termini di aree delle distribuzioni di pressione (perché proporzionali ai moduli delle spinte corrispondenti), dette rispettivamente $y_{Ga} = (h\text{-}h_1)/3$ ed $y_{Gb} = h_x/3$ le quote delle rette d'azione delle spinte esercitate individualmente dall'acqua e dal carburante rispetto al piano di separazione dei due liquidi, $A_s = \gamma_a\,(h\text{-}h_1)^2/2$ ed $A_d = \gamma_b h_x^{\ 2}/2$ le corrispondenti aree dei diagrammi di pressione, si ottiene la quota y_G della retta d'azione della spinta risultante (e quindi dell'intersezione di quest'ultima con il setto) rispetto a tale piano:

$$y_G = \frac{y_{Gb} A_d - y_{Ga} A_s}{A_d - A_s} \tag{6}$$

5) Il manometro metallico misura la pressione vigente, approssimativamente, alla quota del centro del quadrante. L'indicazione del manometro metallico, il cui centro è affondato di $h_M = h_1 + h_x - z_M$ sotto il pelo libero del carburante, è pertanto pari a $\gamma_b h_M$ (Pa). Dovendo uguagliarsi le espressioni della pressione vigente sul menisco interno del manometro semplice a mercurio ottenibili con riferimento ai peli liberi del mercurio ed dell'acqua, l'indicazione del manometro a mercurio è data da $\Delta \ = \ h\gamma_a/\gamma_m$.

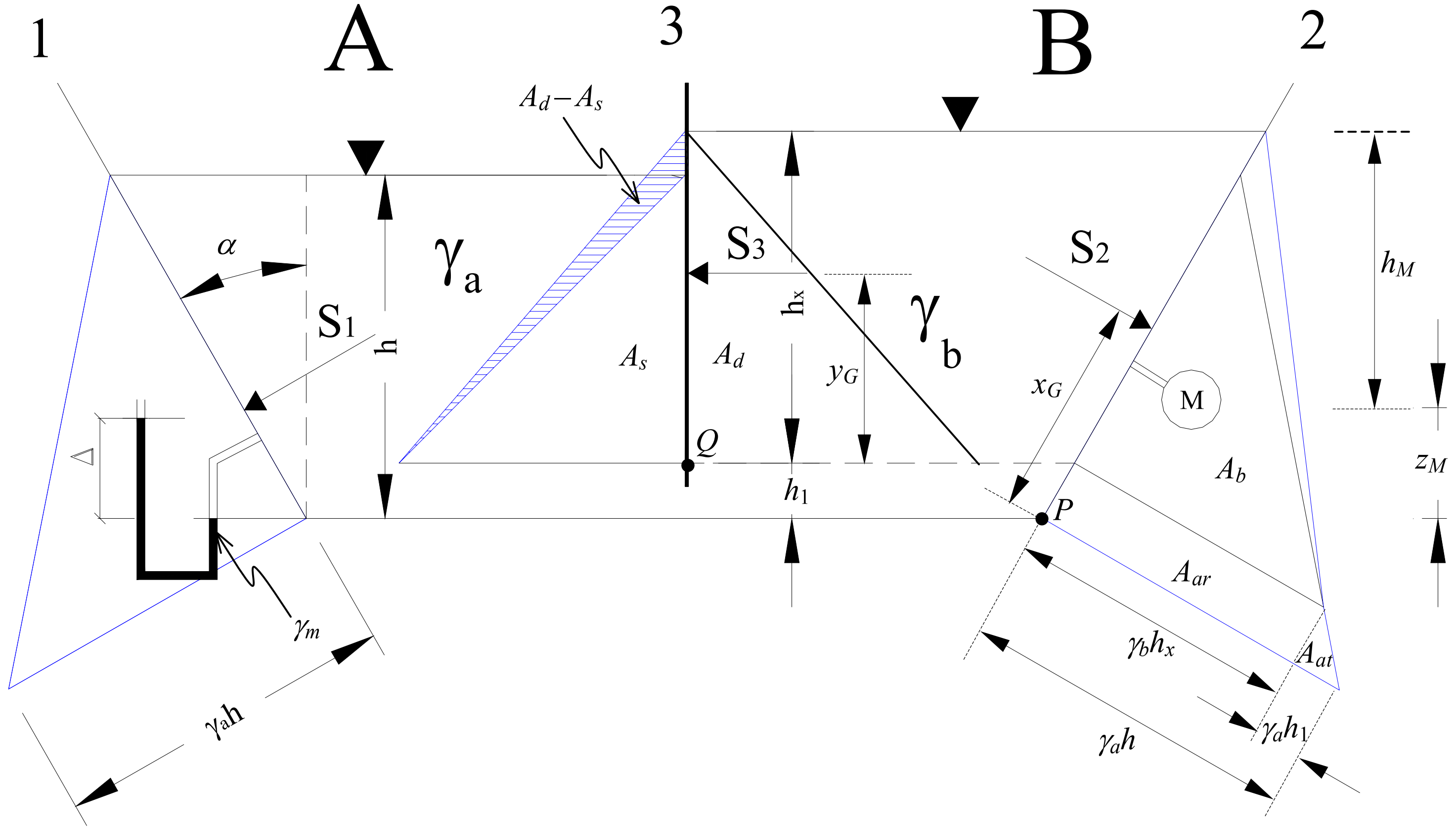

Figura 1. Schema qualitativo dei serbatoi con setto divisorio verticale.