ESAMI E ESERCITAZIONI A.A. 2018-19

ANDREA RATTO

Sommario. In questo file presentiamo prove d'esame, esercitazioni ed esami relativi al Corso di Geometria e Algebra per Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, e Ingegneria Civile. Si precisa che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (telefoni cellulari, tablets etc.).

1. Esercizi di preparazione alla prima prova intermedia

Tempo a disposizione: 120 minuti

Esercizio 1.1. Si considerino i vettori $\vec{u} = [1, -1, 0]$ e $\vec{v} = [0, 1, 3]$.

(i) Calcolare l'area A del parallelogramma individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(ii) Calcolare il volume V del parallelepipedo individuato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{j}$.
(iii) Scrivere l'equazione del piano π che passa per $P = [0, 2, 3]$ ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(iv) Scrivere un sistema di equazioni che definisce la retta r passante per l'origine e parallela a $\vec{v}$.
(v) Scrivere l'equazione della sfera S avente centro l'origine e passante per il punto P di cui al (iii) sopra.
(vi) Scrivere l'equazione del piano π^* che contiene $P^* = [2, 0, 4]$ e la retta r di cui al (iv) sopra.

Esercizio 1.2. Sia

$$P(Z) = (z^2 + 4\sqrt{2}\, z + 12)^4 \cdot (z^4 + 16)^3 \, .$$

Determinare le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 1.3. Sia $z = 3 + 4i$. Calcolare

$$\mathrm{Re}(1/z^2) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/\overline{z}^2) \, .$$

Esercizio 1.4. Siano $\pi : x + z = 0$ e $P = [0, 0, 2]$.

(i) Determinare la proiezione ortogonale Q di P sul piano π.
(ii) Calcolare $\mathrm{dist}(P, \pi)$.
(iii) Scrivere l'equazione della sfera S di centro P e tangente a π;
(iv) Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a π.

Esercizio 1.5. Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} , \qquad r_2 : \begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} .$$

Verificare che r_1 e r_2 sono sghembe e determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2, precisando le coordinate dei punti di intersezione $Q_i = r \cap r_i$, $i = 1, 2$.

Esercizio 1.6. Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 \end{cases} , \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} .$$

Verificare che r_1 e r_2 sono incidenti e precisare le coordinate del punto di intersezione $Q = r_1 \cap r_2$. Poi, determinare il piano π che contiene r_1 e r_2.

Esercizio 1.7. Siano $P_0 = [1, 1, 0]$ e r la retta descritta da:

$$r \, : \, \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases} \quad .$$

(i) Calcolare $\operatorname{dist}(P_0, \, r)$.

(ii) Scrivere l'equazione del piano Π che contiene P_0 e r.

Esercizio 1.8. Siano $P_0 = [2, 1, 0]$, $P_1 = [-1, 1, 1]$ e $P_2 = [0, 2, 0]$.

(i) Determinare il piano π asse del segmento $\overline{P_0P_2}$.

(ii) Determinare il piano Π che contiene P_0 e P_1 e P_2.

Esercizio 1.9. Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \, : \, \begin{cases} x = 4 \\ z = 2 \end{cases} \, , \qquad r_2 \, : \, \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad .$$

Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2, e poi ragionare sul risultato trovato.

Esercizio 1.10. Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle seguenti equazioni:

$$\text{(i) } z^8 = 81 \, ; \qquad \text{(ii) } z^6 = -8 \, .$$

Esercizio 1.11. Si consideri il polinomio

$$P(z) = z^5 + 4z^4 + 7z^3 + 7z^2 + 4z + 1 \, .$$

Dopo aver verificato che $z_0 = -1$ è una radice di $P(z)$, determinare $m_a(z_0)$. Poi, determinare le altre radici in $\mathbb{C}$ di $P(z)$.

Esercizio 1.12. Rappresentare graficamente in $\mathbb{R}^2$ il seguente sottoinsieme di $\mathbb{C}$:

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \, : \, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 3 \operatorname{Re}(z) \ \text{ e } \ |z| \leq 1 \}$$

Soluzioni degli esercizi di preparazione alla prima prova intermedia:

Soluzione dell'Es. 1.1:

(i) $A = \sqrt{19}$.
(ii) $V = 3$.
(iii) $\pi \ : \quad 3x + 3y - z - 3 = 0$.
(iv)

$$r \ : \quad \begin{cases} x = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \quad .$$

(v) $S \ : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 13$.
(vi) $\pi^* \ : \quad 2x + 3y - z = 0$.

Soluzione dell'Es. 1.2:

$$\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}\,, \ -\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$$

ognuna con molteplicità algebrica 3, e

$$-2\sqrt{2} \pm 2i\,,$$

ognuna con molteplicità algebrica 4.

Soluzione dell'Es. 1.3:

$$\mathrm{Re}(1/z^2) = -\frac{7}{625} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{Im}(1/\overline{z}^2) = \frac{24}{625} \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.4:

(i) $Q = [-1, 0, 1]$.
(ii) $\mathrm{dist}\,(P, \pi) = \sqrt{2}$;
(iii) $S \ : \ x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$;
(iv) $P' = [-2, 0, 0]$.

Soluzione dell'Es. 1.5:

$$r \ : \quad \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

e

$$Q_1 = [-1, 2, 2] \ , \quad Q_2 = [-1, 2, 1] \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.6:

$$\pi \ : \quad x + y - 1 = 0\,, \quad Q = [2, -1, 2] \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.7:

(i) $\operatorname{dist}(P_0,\, r) = 3/\sqrt{2}$;
(ii) $\Pi \; : \; 2x + 2y + z - 4 = 0$.

Soluzione dell'Es. 1.8:

(i) $\pi \; : \; 4x - 2y - 1 = 0$;
(ii) $\Pi \; : \; x + 2y + 3z - 4 = 0$;

Soluzione dell'Es. 1.9:

$$r \; : \quad \begin{cases} x - 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 1.10:

(i)
$$\pm\sqrt{3}\,,\ \pm\sqrt{3}i\,,\ \frac{\sqrt{6}}{2} \pm i\frac{\sqrt{6}}{2}\,,\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm i\frac{\sqrt{6}}{2}$$
.

(ii)
$$\pm\sqrt{2}i\,,\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$$
.

Soluzione dell'Es. 1.11:

$$P(z) = (z+1)^3\,(z^2 + z + 1)$$

da cui $m_a(z_0) = 3$ e le altre radici di $P(z)$ sono $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$ con molteplicità algebrica 1.

Soluzione dell'Es. 1.12:

$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \; : \; 0 \le y \le 3x \;\text{ e }\; x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

per cui si può procedere facilmente alla realizzazione del disegno.

2. Simulazione prima prova intermedia

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 2.1. (Punti: 2+2)

Siano $P(z) = z^5 + z^4 + z^3 + 8z^2 + 8z + 8$, $P'(z) = z^2 + z + 1$:

(1) Calcolare quoziente $Q(z)$ e resto $R(z)$ della divisione di polinomi $P(z)/P'(z)$.
(2) Determinare le radici in $\mathbb{C}$ di $P(z)$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 2.2. (Punti: 2+(1+1)+4+2)

Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} , \ t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} .$$

(1) Calcolare $\mathrm{dist}(r_2, O)$.
(2) Determinare l'equazione del piano π che contiene l'origine O e la retta r_1; dare una rappresentazione parametrica di π .
(3) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2 .
(4) Scrivere un sistema di equazioni che descrive la retta r' che passa per l'origine O ed è parallela a r_1 .

Esercizio 2.3. (Punti: 3)
Sia $z = \sqrt{2}\, e^{i\,(\pi/4)}$. Calcolare

$$\mathrm{Re}(1/z^4) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^4) .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza e la qualità dell'esposizione).

Soluzioni della simulazione:

Soluzione dell'Es. 2.1:

(1) $Q(z) = z^3 + 8$ e $R(z) \equiv 0$.

(2) Osservando che $P(z) = Q(z) \cdot P'(z)$ si trovano 5 radici in $\mathbb{C}$ (ognuna con molteplicità algebrica 1):

$$z_0 = -2 \ , \ z_1 = 1 + i\sqrt{3} \ , \ z_2 = \bar{z}_1 = 1 - i\sqrt{3} \ ,$$

$$z_3 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \quad z_4 = \bar{z}_3 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Soluzione dell'Es. 2.2:

(i) $\mathrm{dist}(r_2, O) = 1$.

(ii) $\pi \ : \ 2y - z = 0$. In forma parametrica

$$\pi \ : \begin{cases} x = u \\ y = vz = 2v \end{cases} \ , \quad u, v \ \in \ \mathbb{R} \ .$$

(iii)

$$r \ : \ \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \ .$$

(iv)

$$r' \ : \ \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \ .$$

Soluzione dell'Es. 2.3:

$$\mathrm{Re}(1/z^4) = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^4) = 0 \ .$$

3. Prova intermedia del 24 aprile 2019

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 3.1. (Punti: 4)
Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z+2)^2(z^4+81)=0\,,$$

precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 3.2. (Punti: 2+3+2+3)
Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1\ :\ \begin{cases} x=-1 \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad , \qquad r_2\ :\ \begin{cases} x+2y-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \quad .$$

(i) Verificare che r_1 e r_2 sono incidenti e determinare il punto di incidenza Q.
(ii) Determinare il piano Π che contiene r_1 e r_2.
(iii) Determinare l'equazione del piano Π' che contiene l'origine O e la retta r_1 .
(iv) Calcolare $\mathrm{dist}(r_1,\,O)$.

Esercizio 3.3. (Punti: 4) $z_0=2$ è una radice del polinomio

$$P(z)=z^5-6z^4+16z^3-32z^2+48z-32\,.$$

Calcolare $m_a(z_0)$ e determinare tutte le radici in $\mathbb{C}$ di $P(z)$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 24 aprile 2019:

Soluzione dell'Es. 3.1: Le soluzioni sono: $z = -2$ con molteplicità algebrica 2; e poi

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}, \ \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}, \ -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}, \ -\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

ognuna con molteplicità algebrica 1.

Soluzione dell'Es. 3.2:

(i) Le due rette sono incidenti nel punto $Q = [-1, 1, 1]$.

(ii) $\Pi \; : \; x + 2y - 2z + 1 = 0$.

(iii) $\Pi' \; : \; y - z = 0$.

(iv) $\mathrm{dist}(r_1, O) = 1$.

Soluzione dell'Es. 3.3:

$$P(z) = (z-2)^3\,(z^2+4)\,,$$

per cui $m_a(z_0) = 3$ e le altre due radici di $P(z)$ sono $\pm 2i$ con molteplicità algebrica uno.

4. Esercitazione del 28 maggio 2019

Esercizio 4.1. (Punti: 8) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$x^2 + 10\sqrt{3}\,xy + 11y^2 - 1 = 0 \ , \tag{4.1}$$

precisando le equazioni degli asintoti rispetto alle coordinate x, y. Indicare anche le coordinate (nel sistema Oxy) dei due punti V_1 e V_2 dell'iperbole che risultano essere più vicini all'origine O.

Esercizio 4.2. (Punti: 4) Determinare una base $\mathcal{C}$ del sottospazio vettoriale $W \subsetneq \mathbb{R}^5$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ x_3 - 3\,x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Esercizio 4.3. (Punti: 3+3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

(i) Determinare, se possibile, una matrice invertibile $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ è una matrice diagonale.

(ii) Determinare una base **ortonormale** $\mathcal{C}$ dell'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = 0$.

Soluzioni dell'esercitazione del 28 Maggio 2019:

Soluzione dell'Es. 4.1: Conica non degenere (iperbole). Gli autovalori della matrice A associata alla parte quadratica sono $\lambda_1 = 16$ e $\lambda_2 = -4$. Poi, si individua la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/2) & -(\sqrt{3}/2) \\ \\ (\sqrt{3}/2) & (1/2) \end{bmatrix} \qquad \text{tale che} \quad {}^tPAP = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate x', y', legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione dell'iperbole γ diventa:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

con $a = (1/4)$ e $b = (1/2)$. Si può inoltre osservare che, geometricamente, gli assi x', y' si ottengono da quelli di partenza mediante una rotazione, in senso antiorario, pari ad un angolo $\theta = (\pi/3)$. Le equazioni degli asintoti sono:

$$y = \frac{(2+\sqrt{3})}{(1-2\sqrt{3})}\, x \ ; \quad y = \frac{(\sqrt{3}-2)}{(1+2\sqrt{3})}\, x \ .$$

Inoltre, $V_1 = [(1/8), (\sqrt{3}/8)]$ e $V_2 = [-(1/8), -(\sqrt{3}/8)]$.
Detto questo, non è difficile concludere passando alla rappresentazione grafica (si consiglia di prestare attenzione al disegno degli asintoti).

Soluzione dell'Es. 4.2: $\dim W = 1$ e una sua base è:

$$\mathcal{C} = \left\{ {}^t[5, -15, -12, -4, 1] \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 4.3:
(i)

$$\lambda_1 = 0,\ m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1);\ \lambda_2 = 3,\ m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2),$$

per cui A è diagonalizzabile. Si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(ii) Ad esempio:

$$\mathcal{C} = \left\{ {}^t[0,1,0],\ {}^t[(2/\sqrt{5}), 0, -(1/\sqrt{5})] \right\} \ .$$

5. Prova parziale del 31 Maggio 2019

Tempo a disposizione: 70 minuti. Voto massimo: 18.

Esercizio 5.1. (Punti: 8) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$10\,x^2 + 8\,xy + 4\,y^2 - 3 = 0 \tag{5.1}$$

(porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

Esercizio 5.2. (Punti: 5) Determinare una base del sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^5$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ x_3 - 3\,x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Esercizio 5.3. (Punti: 3+3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

(i) Determinare, se possibile, una matrice invertibile $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ è una matrice diagonale.
(ii) Determinare una base **ortonormale** $\mathcal{C}$ dell'autospazio V_{λ_1} associato all'autovalore $\lambda_1 = 0$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova parziale del 31 Maggio 2019:

Soluzione dell'Es. 5.1: Conica non degenere (ellisse). Gli autovalori della matrice A associata alla parte quadratica sono $\lambda_1 = 12$ e $\lambda_2 = 2$. Poi, si individua la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (2/\sqrt{5}) & -(1/\sqrt{5}) \\ & \\ (1/\sqrt{5}) & (2/\sqrt{5}) \end{bmatrix} \qquad \text{tale che} \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate x', y' legate alle coordinate di partenza da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione dell'ellisse γ diventa:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

con $a = (1/2)$ e $b = (\sqrt{3}/\sqrt{2})$. L'equazione dell'asse x' è $x - 2y = 0$, mentre quella dell'asse y' è $2x + y = 0$. Ora si può disegnare l'ellisse mettendo in luce anche le intersezioni con l'asse x $(\pm\sqrt{(3/10)})$ e con l'asse y $(\pm(\sqrt{3}/2))$.

Soluzione dell'Es. 5.2: $\rho(A) = 4$, per cui $\dim W = 1$. Si trova:

$$W = \left\{ {}^t[-4x_5, 6x_5, 6x_5, 2x_5, x_5] \in \mathbb{R}^5 \ : \ x_5 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Quindi una base di W è, ad esempio, $\mathcal{B} = \{{}^t[-4, 6, 6, 2, 1]\}$.

Soluzione dell'Es. 5.3: (i)

$$\lambda_1 = 0,\ m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1);\ \lambda_2 = 2,\ m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2),$$

per cui A è diagonalizzabile. Si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(ii) V_{λ_1} è definito da $x_1 + x_3 = 0$. Ortonormalizzando le prime due colonne di P con il metodo di Gram-Schmidt si perviene a:

$$\mathcal{C} = \left\{ {}^t[(1/\sqrt{2}), 0, -(1/\sqrt{2})],\ {}^t[0, 1, 0 \right\} .$$

Si noti che ovviamente questa soluzione non è unica.

6. Esame del 17 giugno 2019

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 6.1. (Punti: 8) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$73\,x^2 - 72\,xy + 52\,y^2 - 400 = 0 \tag{6.1}$$

(porre $\lambda_1 < \lambda_2$).

Esercizio 6.2. (Punti: 5) Determinare una base ortonormale del sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ definito da:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ x_3 - 3\,x_4 = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

Esercizio 6.3. (Punti: 8) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \in M_3(\mathbb{R})\ .$$

Determinare, se possibile, una matrice invertibile $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che

$P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 6.4. (Punti: 5+5)

Siano $\Pi\colon x + y - z = 0$ e $P = [1, 2, 1]$.

(i) Determinare l'equazione della sfera S che è tangente al piano Π ed ha centro in P.

(ii) Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a Π.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova d'esame del 17 giugno 2019:

Soluzione dell'Es. 6.1: Conica non degenere (ellisse). Gli autovalori della matrice A associata alla parte quadratica sono $\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = 100$. Poi, si individua la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (3/5) & (4/5) \\ \\ -(4/5) & (3/5) \end{bmatrix} \quad \text{tale che} \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate x', y' legate alle coordinate di partenza da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione dell'ellisse γ diventa:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

con $a = 4$ e $b = 2$. L'equazione dell'asse x' è $4x + 3y = 0$. Ora si può disegnare l'ellisse mettendo in luce anche le intersezioni con l'asse x in $x_\pm = \pm(20/\sqrt{73})$ e con l'asse y in $y_\pm = \pm(20/\sqrt{52})$.

Soluzione dell'Es. 6.2: $\rho(A) = \rho(A') = 3$, per cui $\dim W = n - \rho(A) = 1$. Una base ortonormale di W è, ad esempio,

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{98}} \, {}^t[-3, 7, 6, 2] \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 6.3:

$$\lambda_1 = 0,\ m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1);\ \lambda_2 = -1,\ m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2),$$

per cui A è diagonalizzabile. Si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 6.4:

(i)

$$S\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \frac{4}{3} .$$

(ii)

$$P' = \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3} \right] .$$

7. Prova del 9 Luglio 2019

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 7.1. (Punti: 10) Eseguire lo studio completo della conica γ di equazione:

$$2x^2 + 4\,xy + 2y^2 + \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y = 0 \ . \tag{7.1}$$

Esercizio 7.2. (Punti: 5+5)
Siano $P = [\,1,\,0,\,1\,]$ e r la retta

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - 2y = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P,\, r)$.
(b) Determinare (se possibile) l'equazione del piano Π che contiene r e l'asse z .

Esercizio 7.3. (Punti: 5) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \in \ M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in \ M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 7.4. (Punti: 5) Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -1 \ . \end{cases} \tag{7.2}$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza e la qualità dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 9 Luglio 2019:

Soluzione dell'Es. 7.1: Si tratta di una conica non degenere in quanto $\det A' \neq 0$. Poiché $\det A = 0$ γ **è una parabola**. Diagonalizzando A si trova che la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

è tale che:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della parabola γ diventa (fare i calcoli necessari):

$$y' = 2\ x'^2 .$$

Tenendo conto che le colonne di P rappresentano rispettivamente i versori degli assi x' e y', è ora facile eseguire il disegno di γ (la parabola γ interseca gli assi **di partenza** nei punti di coordinate $[-(1/\sqrt{2}), 0]$ e $[0, (1/\sqrt{2})]$).

Soluzione dell'Es. 7.2:
(a) $\mathrm{dist}(P, r) = \sqrt{2}$;
(b) $\Pi \ : \quad x - 2y = 0$.

Soluzione dell'Es. 7.3: Si calcolano gli autovalori e le rispettive molteplicità:

$\lambda_1 = 0 \quad (\, m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1)\,) \ , \quad \lambda_2 = 2 \quad (\, m_a(\lambda_2) = 2 = m_g(\lambda_2)\,)$.

Quindi A è diagonalizzabile e si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 7.4:
Il sistema non ammette soluzioni in quanto $\rho(A) = 2$, mentre $\rho(A') = 3$.

8. Prova del 25 Luglio 2019

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 8.1. (Punti: 8+4)
(a) Determinare la comune perpendicolare r alle rette:

$$r_1 \ : \ \begin{cases} y-2=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} y+z=0 \\ x-1=0 \ , \end{cases}$$

precisando le coordinate del punto di intersezione di r con r_1 e del punto di intersezione di r con r_2 .

(b) Calcolare $\operatorname{dist}(r_2, O)$.

Esercizio 8.2. (Punti: 7+5) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare P tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.
(b) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ dell'autospazio V_3.

Esercizio 8.3. (Punti: 8)

Eseguire uno studio completo della conica γ di equazione:

$$52x^2 - 72xy + 73y^2 = 400 \qquad (8.1)$$

(assumere $\lambda_1 < \lambda_2$).

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova del 25 luglio 2019:

Soluzione dell'Es. 8.1: (a) Si trova:

$$r \ : \quad \begin{cases} y - z - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

La retta r interseca r_1 nel punto di coordinate $[1, 2, 0]$, e r_2 nel punto di coordinate $[1, 1, -1]$.
(b) $\operatorname{dist}(r_2, O) = 1$.
Soluzione dell'Es. 8.2: La matrice A ha 2 autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3 \ ,$$

con $m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1)$, e $m_a(\lambda_2) = 2 = m_g(\lambda_2)$: pertanto A è diagonalizzabile e si costruisce, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Ad esempio:

$$\mathcal{B} = \left\{ {}^t[0, 1, 0], {}^t[(3/\sqrt{10}), 0, (1/\sqrt{10})] \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 8.3: Conica non degenere (ellisse). Gli autovalori della matrice A associata alla parte quadratica sono $\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = 100$. Poi, si individua la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (4/5) & -(3/5) \\ \\ (3/5) & (4/5) \end{bmatrix}$$

tale che

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \ .$$

Rispetto alle coordinate x', y' legate alle coordinate di partenza da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \ ,$$

l'equazione dell'ellisse γ diventa:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

con $a = 4$ e $b = 2$. L'equazione dell'asse x' è $3x - 4y = 0$, mentre quella dell'asse y' è $4x + 3y = 0$. Ora si può disegnare l'ellisse mettendo in luce anche le intersezioni con l'asse y in $y_\pm = \pm(20/\sqrt{73})$ e con l'asse x in $x_\pm = \pm(20/\sqrt{52})$.

9. Prova del 17 Settembre 2019

Tempo a disposizione: 65 minuti

Esercizio 9.1. (Punti: 9) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in M_4(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 9.2. (Punti: 8) Siano

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \ : \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2 = 0 \ . \end{cases}$$

Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2, precisando le coordinate dei punti di intersezione $Q_i = r \cap r_i$, $i = 1, 2$.

Esercizio 9.3. (Punti: 9) Eseguire lo studio completo, disegno incluso, della parabola γ definita da

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 4x + 3y - 5 = 0 \, ,$$

precisando le coordinate del vertice V rispetto alle coordinate x, y.

Esercizio 9.4. (Punti: 4) Rappresentare graficamente in $\mathbb{R}^2$ il seguente sottoinsieme di numeri complessi:

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \colon 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1, \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2\mathrm{Re}(z) \} \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 17 Settembre 2019:

Soluzione dell'Es. 9.1: $P(\lambda) = \lambda^2 (2-\lambda)^2$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$, con $m_a(\lambda_i) = 2 = m_g(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. Quindi A è diagonalizzabile e si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione dell'Es. 9.2:

$$r \ : \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

e $Q_1 = [-(4/3), (4/3), 0]$ e $Q_2 = [-(2/3), 2, -(2/3)]$.

Soluzione dell'Es. 9.3: Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 25$ $\lambda_2 = 0$. Rispetto alle coordinate x', y', legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \ ,$$

l'equazione di γ diventa $y' = -5\, x'^2 + 1$. L'asse x' ha equazione $4x - 3y = 0$ e l'asse y' ha equazione $3x + 4y = 0$. La parabola interseca l'asse x nei punti di ascissa $2 \pm \sqrt{13}$ e l'asse y nei punti di ordinata $-(3/2) \pm (\sqrt{73}/2)$. V ha coordinate $[0, 1]$ nel sistema $Ox'y'$ e quindi $V = [-(4/5), (3/5)]$ nel sistema Oxy. Con questi dati è facile realizzare la rappresentazione grafica di γ.

Soluzione dell'Es. 9.4: A è il sottoinsieme avente come bordo esterno il triangolo di vertici O, $[1, 1]$ e $[1, 2]$.

10. Prova del 28 gennaio 2020

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 10.1. (Punti: 4+4) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.
(b) Posto $\lambda_1 = 0$, determinare una base ortonormale di V_{λ_1} .

Esercizio 10.2. (Punti: 4+4) Stabilire se il seguente sistema lineare è risolubile e, in caso affermativo, determinare l'insieme delle sue soluzioni.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \, . \end{cases}$$

Esercizio 10.3. (Punti: 8) Siano

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \ , \end{cases} \qquad r_2 \ : \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \ , \end{cases}$$

Determinare una rappresentazione parametrica della comune perpendicolare r a r_1 e r_2, precisando le coordinate dei punti di intersezione

$$Q_1 = r \cap r_1 \quad \text{e} \quad Q_2 = r \cap r_2 \ .$$

Esercizio 10.4. (Punti: 6) Eseguire lo studio completo della conica γ definita da

$$x^2 + 3y^2 + 2x - 6y + 1 = 0 \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 28 gennaio 2020:

Soluzione dell'Es. 10.1: (a) Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 2) \ .$$

Quindi $P(\lambda)$ ha autovalori reali $\lambda_1 = 0$, con $m_a(\lambda_1) = 2$; e $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$, entrambi con molteplicità algebrica 1. Poi, si ha $m_g(\lambda_1) = 2$ e quindi A è diagonalizzabile.

(b) L'autospazio V_{λ_1} risulta definito da:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 2\,x_2 = 0 \\ 0 = 0 \ . \end{cases}$$

Ne segue facilmente che una base ortonormale di V_{λ_1} è, ad esempio,

$$\left\{ {}^t[1,0,0,0]\,,\, {}^t[0,0,0,1] \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 10.2: $\rho(A) = 2 = \rho(A')$, per cui il sistema è risolubile. Il sistema ha due equazioni significative ed è equivalente a:

$$\begin{cases} x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2\,. \end{cases}$$

Ora è facile concludere che l'insieme delle soluzioni è:

$$\left\{ {}^t[2 - x_2 + 3x_3, x_2, x_3, 1 - x_5, x_5] \in \mathbb{R}^5 \colon x_2, x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 10.3:

$$r \ : \qquad \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y = 0 \ . \end{cases}$$

In forma parametrica $r \ : \ [t, 0, 1+t]$, $t \in \mathbb{R}$.

$$Q_1 = \left[-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right] \ , \quad Q_2 = [0, 0, 1] \ .$$

Soluzione dell'Es. 10.4: Usando il metodo del completamento dei quadrati si verifica facilmente che l'equazione di γ è equivalente a

$$\frac{(x+1)^2}{3} + (y-1)^2 = 1 \ ,$$

per cui γ è un'ellisse con semiassi paralleli agli assi x e y. Più precisamente, il centro dell'ellisse è il punto di coordinate $[-1,\ 1]$, il semiasse orizzontale a ha lunghezza $\sqrt{3}$, mentre il semiasse verticale è $b = 1$; da questi dati è immediato realizzare la rappresentazione grafica di γ .

11. Prova del 18 febbraio 2020

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 11.1. (Punti: 5+4)
Siano $P = [3, 1, 0]$ e

$$r \ : \qquad \begin{cases} y + z = 0 \\ x = 1 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P,\, r)$.
(b) Scrivere un sistema lineare che definisce la retta r_1 che passa per P ed è parallela a r.

Esercizio 11.2. (Punti: 7)
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \in \ M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare P tale che ${}^tP \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 11.3. (Punti: 9)
Eseguire uno studio completo della conica γ definita da

$$10\,x^2 \, + \, 10\,y^2 - \, 16\,xy \, - \, 9 \, = 0$$

(nello studio della rotazione, porre $\lambda_1 < \lambda_2$).

Esercizio 11.4. (Punti: 5) Determinare una base ortonormale del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$x - y - z = 0\,.$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 18 febbraio 2020:

Soluzione dell'Es. 11.1:

(a) La proiezione ortogonale di P su r è $Q = [1, (1/2), -(1/2)]$.

$$\mathrm{dist}(P,\, r) = \mathrm{dist}(P,\, Q) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ .$$

(b)

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} y + z - 1 = 0 \\ x - 3 = 0\ . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 11.2: Per prima cosa si calcolano gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0\ ; \qquad \lambda_2 = -2\ ; \qquad \lambda_3 = 4\ .$$

Poi si costruisce

$$P = \begin{bmatrix} 0 & (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}\ .$$

Soluzione dell'Es. 11.3: Si tratta di un'ellisse ruotata. Più precisamente, si determina la rotazione di assi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\ , \text{dove} \quad P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}\ .$$

Rispetto alle coordinate $[x', y']$ (assi ruotati di un angolo pari a $(\pi/4)$ in senso antiorario) l'equazione della conica diventa:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1\,,$$

dove $a = 3/\sqrt{2}$ e $b = 1/\sqrt{2}$. Ora è facile realizzare il disegno.

Soluzione dell'Es. 11.4: Si applica il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:

$$\left\{ {}^t[(1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}), 0], {}^t[(1/\sqrt{6}), -(1/\sqrt{6}), (2/\sqrt{6})] \right\}\ .$$

Università degli Studi di Cagliari, Dipartimento di Matematica e Informatica, Via Ospedale 72, 09124 Cagliari, Italia
Email address: rattoa@unica.it