ESAMI E ESERCITAZIONI A.A. 2017-18

ANDREA RATTO

Sommario. In questo file presentiamo prove d'esame, esercitazioni ed esami relativi al Corso di Geometria e Algebra per Ingegneria per l'Ambientale e il Territorio, e Ingegneria Civile. Si precisa che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (telefoni cellulari, tablets etc.).

1. Esercizi di preparazione alla prima prova intermedia

Tempo a disposizione: 120 minuti

Esercizio 1.1. Si considerino i vettori $\vec{u} = [0, -1, 2]$ e $\vec{v} = [2, 1, 3]$.

(i) Calcolare l'area A del parallelogramma individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(ii) Calcolare il volume V del parallelepipedo individuato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{j}$.
(iii) Scrivere l'equazione del piano π che passa per $P = [0, 2, 3]$ ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(iv) Scrivere un sistema di equazioni che definisce la retta r passante per l'origine e parallela a $\vec{v}$.
(v) Scrivere l'equazione della sfera S avente centro l'origine e passante per il punto P di cui al (iii) sopra.
(vi) Scrivere l'equazione del piano π^* che contiene $P^* = [2, 0, 4]$ e la retta r di cui al (iv) sopra.

Esercizio 1.2. Sia

$$P(Z) = (z^2 + 2\,z + 5)^2 \cdot (z^4 + 4)^3 \,.$$

Determinare le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 1.3. Sia $z = 3 - 4i$. Calcolare

$$\mathrm{Re}(1/z^2) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/\overline{z}^2) \ .$$

Esercizio 1.4. Siano $\pi\ : x - z = 0$ e $P = [0, 0, 2]$.

(i) Determinare la proiezione ortogonale Q di P sul piano π.
(ii) Calcolare $\mathrm{dist}(P, \pi)$.
(iii) Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a π.

Esercizio 1.5. Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1\ :\ \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \qquad , \qquad r_2\ :\ \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \quad .$$

Verificare che r_1 e r_2 sono sghembe e determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2, precisando le coordinate dei punti di intersezione $Q_i = r \cap r_i$, $i = 1, 2$.

Esercizio 1.6. Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1\ :\ \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 \end{cases} \qquad , \qquad r_2\ :\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad .$$

Verificare che r_1 e r_2 sono incidenti e precisare le coordinate del punto di intersezione $Q = r_1 \cap r_2$. Poi, determinare il piano π che contiene r_1 e r_2.

Esercizio 1.7. Siano $P_0 = [2, 1, 0]$ e r la retta descritta da:

$$r \,:\, \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases} .$$

(i) Calcolare $\operatorname{dist}(P_0,\, r)$.
(ii) Scrivere l'equazione del piano Π che contiene P_0 e r.

Esercizio 1.8. Siano $P_0 = [2, 1, 0]$, $P_1 = [-1, 1, 1]$ e $P_2 = [0, 1, 0]$.
(i) Determinare il piano π asse del segmento $\overline{P_0P_2}$.
(ii) Determinare il piano Π che contiene P_0 e P_1 e P_2.
(iii) Dare una rappresentazione parametrica del luogo di punti equidistanti rispetto a P_0, P_1 e P_2.

Esercizio 1.9. Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \,:\, \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases} , \qquad r_2 \,:\, \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases} .$$

Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2, e poi ragionare sul risultato trovato.

Esercizio 1.10. Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle seguenti equazioni:

$$\text{(i) } z^8 = 256\,; \qquad \text{(ii) } z^{12} = 64\,; \qquad \text{(iii) } z^6 = -64\,.$$

Esercizio 1.11. Si consideri il polinomio

$$P(z) = z^5 + 6z^4 + 13z^3 + 14z^2 + 12z + 8\,.$$

Dopo aver verificato che $z_0 = -2$ è una radice di $P(z)$, determinare $m_a(z_0)$. Poi, determinare le altre radici in $\mathbb{C}$ di $P(z)$.

Esercizio 1.12. Rappresentare graficamente in $\mathbb{R}^2$ il seguente sottoinsieme di $\mathbb{C}$:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, 0 \le \operatorname{Im}(z) \le [\operatorname{Re}(z)]^2 \;\text{ e }\; |z| \le \sqrt{2} \right\}$$

Soluzioni degli esercizi di preparazione alla prima prova intermedia:

Soluzione dell'Es. 1.1:

(i) $A = 3\sqrt{5}$.
(ii) $V = 4$.
(iii) $\pi \ : \quad 5x - 4y - 2z + 14 = 0$.
(iv)
$$r \ : \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} .$$
(v) $S \ : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 13$.
(vi) $\pi^* \ : \quad 2x - y - z = 0$.

Soluzione dell'Es. 1.2:

$$1 \pm i \,, \ -1 \pm i$$

ognuna con molteplicità algebrica 3, e

$$-1 \pm 2i \,,$$

ognuna con molteplicità algebrica 2.

Soluzione dell'Es. 1.3:

$$\mathrm{Re}(1/z^2) = -\frac{7}{625} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/\overline{z}^2) = -\frac{24}{625} \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.4:

(i) $Q = [1, 0, 1]$.
(ii) $\mathrm{dist}\,(P, \pi) = \sqrt{2}$;
(iii) $P' = [2, 0, 0]$.

Soluzione dell'Es. 1.5:

$$r \ : \quad \begin{cases} 3x - 3y + 1 = 0 \\ 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

e

$$Q_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2\right] , \quad Q_2 = \left[1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right] .$$

Soluzione dell'Es. 1.6:

$$\pi \ : \quad x + y - 1 = 0 \,, \quad Q = [2, -1, 2] \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.7:

(i) $\operatorname{dist}(P_0, r) = \sqrt{6}$;
(ii) $\pi \; : \; x + y + z - 3 = 0$.

Soluzione dell'Es. 1.8:

(i) $\pi \; : \; x - 1 = 0$;
(ii) $\Pi \; : \; y - 1 = 0$;
(iii)

$$r \; : \quad \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 1.9:

$$r \; : \quad \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 1.10:

(i) $\pm 2\,,\ \pm 2i\,,\ \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}\,,\ -\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}\ .$
(ii)

$$\pm\sqrt{2}\,,\ \pm\sqrt{2}i\,,\ \frac{\sqrt{6}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{6}}{2}\,,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{6}}{2}\,.$$

(iii) $\pm 2i\,,\ \sqrt{3} \pm i\,,\ -\sqrt{3} \pm i\ .$

Soluzione dell'Es. 1.11:

$$P(z) = (z+2)^3\,(z^2+1)$$

da cui $m_a(z_0) = 3$ e le altre radici di $P(z)$ sono $\pm i$ con molteplicità algebrica 1.

Soluzione dell'Es. 1.12:

$$A = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le x^2 \;\text{ e }\; x^2 + y^2 \le 2\right\}$$

per cui si può procedere facilmente alla realizzazione del disegno.

2. Simulazione prima prova intermedia a.a. 2017-18

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 2.1. (Punti: 2+2)

Siano $P(z) = z^5 + z^4 + z^3 + 8z^2 + 8z + 8$, $P'(z) = z^2 + z + 1$:

(1) Calcolare quoziente $Q(z)$ e resto $R(z)$ della divisione di polinomi $P(z)/P'(z)$.
(2) Determinare le radici in $\mathbb{C}$ di $P(z)$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 2.2. (Punti: 2+(1+1)+4+2)

Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} , \ t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} .$$

(1) Calcolare $\operatorname{dist}(r_2, O)$.
(2) Determinare l'equazione del piano π che contiene l'origine O e la retta r_1; dare una rappresentazione parametrica di π .
(3) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2 .
(4) Scrivere un sistema di equazioni che descrive la retta r' che passa per l'origine O ed è parallela a r_1 .

Esercizio 2.3. (Punti: 3)
Sia $z = \sqrt{2}\, e^{i\,(\pi/4)}$. Calcolare

$$\operatorname{Re}(1/z^4) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z^4) \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza e la qualità dell'esposizione).

Soluzioni della simulazione:

Soluzione dell'Es. 2.1:

(1) $Q(z) = z^3 + 8$ e $R(z) \equiv 0$.

(2) Osservando che $P(z) = Q(z) \cdot P'(z)$ si trovano 5 radici in $\mathbb{C}$ (ognuna con molteplicità algebrica 1):

$$z_0 = -2 \ , \ z_1 = 1 + i\sqrt{3} \ , \ z_2 = \bar{z_1} = 1 - i\sqrt{3} \ ,$$
$$z_3 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \quad z_4 = \bar{z_3} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Soluzione dell'Es. 2.2:

(i) $\mathrm{dist}(r_2, O) = 1$.

(ii) $\pi \ : \ 2y - z = 0$. In forma parametrica

$$\pi \ : \begin{cases} x = u \\ y = vz = 2v \end{cases} \ , \quad u, v \ \in \ \mathbb{R} \ .$$

(iii)

$$r \ : \ \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \ .$$

(iv)

$$r' \ : \ \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \ .$$

Soluzione dell'Es. 2.3:

$$\mathrm{Re}(1/z^4) = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^4) = 0 \ .$$

3. Prova intermedia del 18 aprile 2018

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 3.1. (Punti: 3)
Sia $z = -3 - 2i$: calcolare

$$\mathrm{Re}(1/\overline{z}^2) \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}(1/z^2) \ .$$

Esercizio 3.2. (Punti: 2+3+2+3)
Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases} \quad , \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad .$$

(i) Stabilire se r_1 e r_2 sono incidenti oppure sghembe.
(ii) Se la risposta corretta alla domanda (i) è **incidenti**, allora determinare il piano Π che contiene r_1 e r_2. Se, invece, la risposta corretta alla domanda (i) è **sghembe**, allora determinare la comune perpendicolare a r_1 e r_2.
(iii) Determinare l'equazione del piano Π' che contiene l'origine O e la retta r_2 .
(iv) Calcolare $\mathrm{dist}(r_2, O)$.

Esercizio 3.3. (Punti: 2+2)
Siano

$$P(z) = z^5 + 6z^4 + 15z^3 + 26z^2 + 36z + 24$$

e $z_0 = -2$. Dopo aver verificato che z_0 è una radice del polinomio $P(z)$, calcolare $m_a(z_0)$ e determinare tutte le radici in $\mathbb{C}$ di $P(z)$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 18 aprile 2018:

Soluzione dell'Es. 3.1:

$$\mathrm{Re}(1/\overline{z}^2) = \frac{5}{169} \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}(1/z^2) = \frac{5}{169} \ .$$

Soluzione dell'Es. 3.2:

(i) **Incidenti** nel punto $Q = [-1, 1, 1]$.

(ii) $\Pi \ : \ x + 2y - 2z + 1 = 0$.

(iii) $\Pi' \ : \ y - z = 0$.

(iv) $\mathrm{dist}(r_2, O) = 1$.

Soluzione dell'Es. 3.3:

$$P(-2) = -32 + 96 - 120 + 104 - 72 + 24 = 0$$

e poi:

$$P(z) = (z + 2)^3\,(z^2 + 3)\,,$$

per cui $m_a(z_0) = 3$ e le altre due radici di $P(z)$ sono $\pm i\sqrt{3}$ con molteplicità algebrica uno.

4. Esercitazione del 18 maggio 2018

Esercizio 4.1. (Punti: 8) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$x^2 + 10\sqrt{3}\,xy + 11y^2 - 1 = 0 \ , \tag{4.1}$$

precisando le equazioni degli asintoti rispetto alle coordinate x, y. Indicare anche le coordinate (nel sistema Oxy) dei due punti V_1 e V_2 dell'iperbole che risultano essere più vicini all'origine O.

Esercizio 4.2. (Punti: 4) Determinare una base $\mathcal{C}$ del sottospazio vettoriale $W \subsetneq \mathbb{R}^5$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ x_3 - 3\,x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Esercizio 4.3. (Punti: 3+3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

(i) Determinare, se possibile, una matrice invertibile $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ è una matrice diagonale.

(ii) Determinare una base **ortonormale** $\mathcal{C}$ dell'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = 0$.

Soluzioni dell'esercitazione del 18 Maggio 2018:

Soluzione dell'Es. 4.1: Conica non degenere (iperbole). Gli autovalori della matrice A associata alla parte quadratica sono $\lambda_1 = 16$ e $\lambda_2 = -4$. Poi, si individua la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/2) & -(\sqrt{3}/2) \\ \\ (\sqrt{3}/2) & (1/2) \end{bmatrix}$$

tale che

$$^tPAP = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione dell'iperbole γ diventa:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

con $a = (1/4)$ e $b = (1/2)$. Si può inoltre osservare che, geometricamente, gli assi x', y' si ottengono da quelli di partenza mediante una rotazione, in senso antiorario, pari ad un angolo $\theta = (\pi/3)$. Le equazioni degli asintoti sono:

$$y = \frac{(2+\sqrt{3})}{(1-2\sqrt{3})}\, x \ ; \quad y = \frac{(\sqrt{3}-2)}{(1+2\sqrt{3})}\, x \ .$$

Inoltre, $V_1 = [(1/8), (\sqrt{3}/8)]$ e $V_2 = [-(1/8), -(\sqrt{3}/8)]$.
Detto questo, non è difficile concludere passando alla rappresentazione grafica (si consiglia di prestare attenzione alla rappresentazione degli asintoti).

Soluzione dell'Es. 4.2: $\dim W = 1$ e una sua base è:

$$\mathcal{C} = \left\{ {}^t[5, -15, -12, -4, 1] \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 4.3:
(i)

$$\lambda_1 = 0,\ m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1);\ \lambda_2 = 3,\ m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2),$$

per cui A è diagonalizzabile. Si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(ii) Ad esempio:

$$\mathcal{C} = \left\{ {}^t[0,1,0],\ {}^t[(2/\sqrt{5}), 0, -(1/\sqrt{5})] \right\} .$$

5. Prova parziale del 23 Maggio 2018

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 5.1. (Punti: 7) Svolgere lo studio completo dell'ellisse γ di equazione:

$$2\,x^2 + 4\,xy + 5\,y^2 - 6 = 0 \tag{5.1}$$

(porre $\lambda_1 > \lambda_2$). Si richiedono, in particolare, le equazioni rispetto alle coordinate x, y dei due assi di simmetria dell'ellisse.

Esercizio 5.2. (Punti: 4) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ x_3 - 3\,x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 - x_5 = -1 \end{cases} \tag{5.2}$$

Esercizio 5.3. (Punti: 3+4) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

(i) Determinare, se possibile, una matrice invertibile $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ è una matrice diagonale.

(ii) Determinare una base **ortonormale** $\mathcal{C}$ dell'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = 0$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova parziale del 23 Maggio 2018:

Soluzione dell'Es. 5.1: Conica non degenere (ellisse). Gli autovalori della matrice A associata alla parte quadratica sono $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 1$. Poi, si individua la matrice di rotazione

$$P = \left[\begin{array}{cc} (1/\sqrt{5}) & -(2/\sqrt{5}) \\ \\ (2/\sqrt{5}) & (1/\sqrt{5}) \end{array} \right]$$

tale che

$$^tP \cdot A \cdot P = \left[\begin{array}{cc} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] .$$

Rispetto alle coordinate x', y' legate alle coordinate di partenza da

$$\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] = P \left[\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right] ,$$

l'equazione dell'ellisse γ diventa:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

con $a = 1$ e $b = \sqrt{6}$. L'equazione dell'asse x' è $y = 2x$, mentre quella dell'asse y' è $y = -(1/2)x$. Ora si può disegnare l'ellisse mettendo in luce anche le intersezioni con l'asse x $(\pm\sqrt{3})$ e con l'asse y $(\pm\sqrt{6/5})$.

Soluzione dell'Es. 5.2: $\rho(A) = \rho(A') = 4$, per cui abbiamo ∞^1 soluzioni parametrizzabili come segue:

$$I = \left\{ {}^t[5x_5 - 5, -15x_5 + 15, -12x_5 + 12, -4x_5 + 4, x_5] \in \mathbb{R}^5 \ : \ x_5 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 5.3: (i)

$$\lambda_1 = 0,\ m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1);\ \lambda_2 = 4,\ m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2),$$

per cui A è diagonalizzabile. Si trova, ad esempio,

$$P = \left[\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right] .$$

(ii) V_{λ_1} è definito da $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Ortonormalizzando le prime due colonne di P con il metodo di Gram-Schmidt si perviene a:

$$\mathcal{C} = \left\{ {}^t[(1/\sqrt{2}), 0, -(1/\sqrt{2})],\ {}^t[(1/\sqrt{3}), -(1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{3})] \right\} .$$

Si noti che ovviamente questa soluzione non è unica.

6. Prova parziale di recupero del 30 Maggio 2018

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 6.1. (Punti: 7) Svolgere lo studio completo dell'ellisse γ di equazione:

$$52\,x^2 - 72\,xy + 73\,y^2 - 100 = 0 \tag{6.1}$$

(porre $\lambda_1 < \lambda_2$). Si richiedono, in particolare, le equazioni rispetto alle coordinate x, y dei due assi di simmetria dell'ellisse.

Esercizio 6.2. (Punti: 4) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ x_3 - 3\,x_4 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

Esercizio 6.3. (Punti: 3+4) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \in M_3(\mathbb{R})\ .$$

(i) Determinare, se possibile, una matrice invertibile $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ è una matrice diagonale.

(ii) Determinare una base **ortonormale** $\mathcal{C}$ dell'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = 0$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova di recupero del 30 Maggio 2018:

Soluzione dell'Es. 6.1: Conica non degenere (ellisse). Gli autovalori della matrice A associata alla parte quadratica sono $\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = 100$. Poi, si individua la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (4/5) & -(3/5) \\ & \\ (3/5) & (4/5) \end{bmatrix}$$

tale che

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate x', y' legate alle coordinate di partenza da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione dell'ellisse γ diventa:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

con $a = 2$ e $b = 1$. L'equazione dell'asse x' è $4y - 3x = 0$, mentre quella dell'asse y' è $4x + 3y = 0$. Ora si può disegnare l'ellisse mettendo in luce anche le intersezioni con l'asse x in $x_\pm = \pm(10/\sqrt{52})$ e con l'asse y in $y_\pm = \pm(10/\sqrt{73})$.

Soluzione dell'Es. 6.2: $\rho(A) = \rho(A') = 4$, per cui abbiamo ∞^1 soluzioni parametrizzabili come segue:

$$I = \left\{ {}^t[2x_5 + 1, -8x_5 + 1, -6x_5, -2x_5, x_5] \in \mathbb{R}^5 \ : \ x_5 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 6.3: (i)

$$\lambda_1 = 0,\ m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1);\ \lambda_2 = 1,\ m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2),$$

per cui A è diagonalizzabile. Si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

(ii) V_{λ_1} è definito da $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Ortonormalizzando le prime due colonne di P con il metodo di Gram-Schmidt si perviene a:

$$\mathcal{C} = \left\{ {}^t[(1/\sqrt{2}), 0, -(1/\sqrt{2})],\ {}^t[(1/\sqrt{6}), (2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{6})] \right\} .$$

7. Prova del 13 Giugno 2018

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 7.1. (Punti: 10) Eseguire lo studio completo della conica γ di equazione:

$$x^2 + 2\,xy + y^2 + x - y = 0 \; . \tag{7.1}$$

Esercizio 7.2. (Punti: 5+5)
Siano $P = [\,2,\,0,\,1\,]$ e r la retta

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - 2y = 0 \; . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P,\,r)$.

(b) Determinare (se possibile) l'equazione del piano Π che contiene r e l'asse y .

Esercizio 7.3. (Punti: 5) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;\in\; M_3(\mathbb{R}) \; .$$

Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 7.4. (Punti: 5) Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \; . \end{cases} \tag{7.2}$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza e la qualità dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 13 Giugno 2018:

Soluzione dell'Es. 7.1: Si tratta di una conica non degenere in quanto $\det A' \neq 0$. Poiché $\det A = 0$ γ **è una parabola**. Diagonalizzando A si trova che la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

è tale che:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = {}^tP \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della parabola γ diventa (fare i calcoli necessari):

$$y' = \sqrt{2}\, x'^2 .$$

Tenendo conto che le colonne di P rappresentano rispettivamente i versori degli assi x' e y', è ora facile eseguire il disegno di γ (la parabola γ interseca gli assi **di partenza** nei punti di coordinate $[-1, 0]$ e $[0, 1]$).

Soluzione dell'Es. 7.2:

(a) $\mathrm{dist}(P, r) = (\sqrt{41}/3)$;
(b) $\Pi \; : \quad x + z = 0$.

Soluzione dell'Es. 7.3: Si trovano gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \quad (\, m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1)\,) \quad , \quad \lambda_2 = 1 \quad (\, m_a(\lambda_2) = 2 = m_g(\lambda_2)\,) \; .$$

Quindi A è diagonalizzabile e si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 7.4:
Il sistema non ammette soluzioni in quanto $\rho(A) = 2$, mentre $\rho(A') = 3$.

8. Prova del 4 Luglio 2018

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 8.1. (Punti: 10) Determinare la comune perpendicolare r alle rette:

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x+y=0 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \ : \quad \begin{cases} x=0 \\ y=2 \ , \end{cases}$$

precisando le coordinate del punto di intersezione di r con r_1 e del punto di intersezione di r con r_2 .

Esercizio 8.2. (Punti: 8) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare P tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 8.3. (Punti: 12)

Eseguire uno studio completo della conica γ di equazione:

$$73x^2 - 72xy + 52y^2 = 100 \tag{8.1}$$

(assumere $\lambda_1 < \lambda_2$).

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova del 4 luglio 2018:

Soluzione dell'Es. 8.1: Si trova:

$$r \; : \qquad \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

La retta r interseca r_1 nel punto di coordinate $[-1, 1, 1]$, e r_2 nel punto di coordinate $[0, 2, 1]$.

Soluzione dell'Es. 8.2: La matrice A ha 2 autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2 \; ,$$

con $m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1)$, e $m_a(\lambda_2) = 2 = m_g(\lambda_2)$: pertanto A è diagonalizzabile e si costruisce, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione dell'Es. 8.3: Conica non degenere (ellisse). Gli autovalori della matrice A associata alla parte quadratica sono $\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = 100$. Poi, si individua la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (3/5) & -(4/5) \\ & \\ (4/5) & (3/5) \end{bmatrix}$$

tale che

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate x', y' legate alle coordinate di partenza da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \; ,$$

l'equazione dell'ellisse γ diventa:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

con $a = 2$ e $b = 1$. L'equazione dell'asse x' è $3y - 4x = 0$, mentre quella dell'asse y' è $4y + 3x = 0$. Ora si può disegnare l'ellisse mettendo in luce anche le intersezioni con l'asse y in $y_\pm = \pm(10/\sqrt{52})$ e con l'asse x in $x_\pm = \pm(10/\sqrt{73})$.

9. Prova del 20 Luglio 2018

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 9.1. (Punti: 10) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in M_4(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 9.2. (Punti: 10) Siano

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \ : \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ y - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2, precisando le coordinate dei punti di intersezione $Q_i = r \cap r_i$, $i = 1, 2$.

Esercizio 9.3. (Punti: 10) Eseguire lo studio completo, disegno incluso, della conica γ definita da

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 3x - 4y = 0 \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 20 Luglio 2018:

Soluzione dell'Es. 9.1:

$P(\lambda) = \lambda^2\,(1-\lambda)^2$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, con $m_a(\lambda_i) = 2 = m_g(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. Quindi A è diagonalizzabile e si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione dell'Es. 9.2:

$$r \ : \quad \begin{cases} 3x - 3z - 2 = 0 \\ 3y + 3z - 2 = 0 \ , \end{cases}$$

con $Q_1 = [(2/3), (2/3), 0]$ e $Q_2 = [(1/3), 1, -(1/3)]$.

Soluzione dell'Es. 9.3:

Si tratta di una parabola. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 25$ $\lambda_2 = 0$. Rispetto alle coordinate x', y', legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \ ,$$

l'equazione di γ diventa $y' = 5\,x'^2$. La parabola interseca gli assi x, y in O e nei punti $[(-3/16), 0]$ e $[0, (4/9)]$. L'asse x' ha equazione $3x - 4y = 0$ e l'asse y' ha equazione $4x + 3y = 0$. Con questi dati è facile realizzare la rappresentazione grafica di γ.

10. Prova dell' 11 Settembre 2018

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 10.1. (Punti: 4+4) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.
(b) Posto $\lambda_1 = 0$, determinare una base ortonormale di V_{λ_1} .

Esercizio 10.2. (Punti: 5) Stabilire se il seguente sistema lineare è risolubile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \quad . \end{cases}$$

Esercizio 10.3. (Punti: 7+3) Siano

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \ , \end{cases} \qquad r_2 \ : \quad \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \ , \end{cases}$$

(a) Determinare una rappresentazione parametrica della comune perpendicolare r a r_1 e r_2.
(b) Precisare le coordinate dei punti di intersezione

$$Q_1 = r \cap r_1 \quad \text{e} \quad Q_2 = r \cap r_2 \ .$$

Esercizio 10.4. (Punti: 7) Eseguire lo studio completo della conica γ definita da

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0 \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova dell'11 Settembre 2018:

Soluzione dell'Es. 10.1: (a) Il polinomio caratteristico è:
$$P(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda^2 + 1) \ .$$
Quindi $P(\lambda)$ ha radici complesse, **non** reali $\pm i$. Ne segue che la matrice A **non** è diagonalizzabile.

(b) $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità algebrica e geometrica pari a 2. L'autospazio V_{λ_1} risulta definito da:
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \ . \end{cases}$$
Ne segue facilmente che una base ortonormale di V_{λ_1} è, ad esempio,
$$\{\, [1, 0, 0, 0] \, , \, [0, 0, 0, 1] \,\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 10.2: $\rho(A) = 2$, mentre $\rho(A') = 3$: per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema **non** ammette soluzioni.

Soluzione dell'Es. 10.3:

(a) La comune perpendicolare è la retta
$$r \ : \qquad \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y = 0 \ . \end{cases}$$
In forma parametrica $r \ : \ [t, 0, t-1]$, $t \in \mathbb{R}$.

(b)
$$Q_1 = \left[\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right] \ , \quad Q_2 = [1, 0, 0] \ .$$

Soluzione dell'Es. 10.4: Usando il metodo del completamento dei quadrati si verifica facilmente che l'equazione di γ è equivalente a
$$\frac{(x+1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \ ,$$
per cui γ è un'ellisse con semiassi paralleli agli assi x e y. Più precisamente, il centro dell'ellisse è il punto di coordinate $[-1, \, 1]$, il semiasse orizzontale a ha lunghezza 2, mentre il semiasse verticale è $b = 1$; da questi dati è immediato realizzare la rappresentazione grafica di γ .